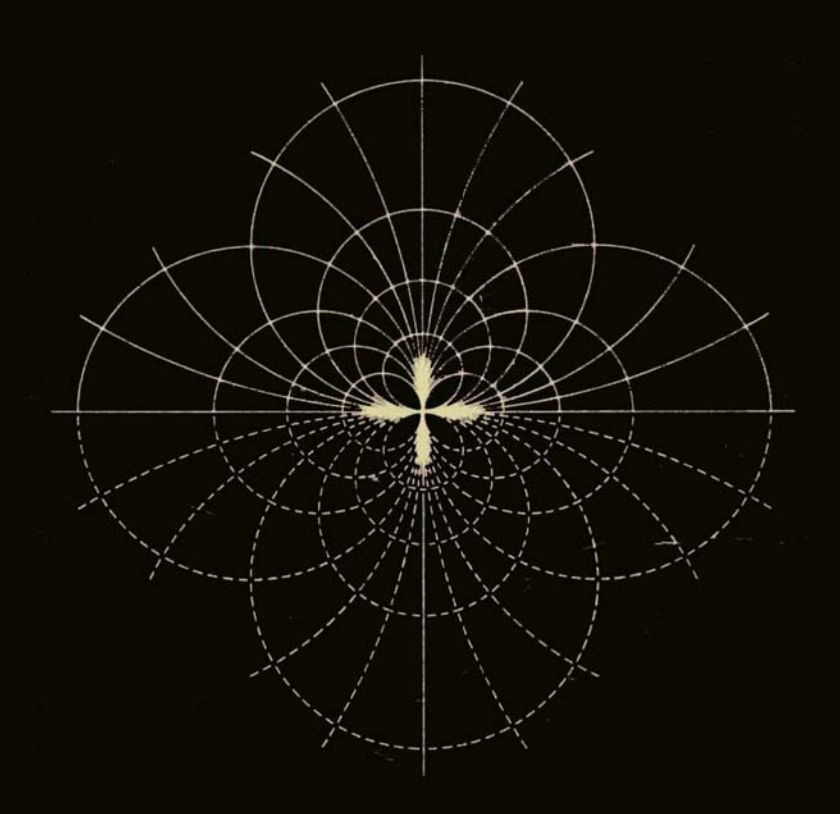
GEOMETRÍA SUPERIOR

N. V. EFÍMOV



EDITORIAL MIR
MOSCÚ


ИЗДАТЕЛЬСТВО
· МИР ·

Н. В. ЕФИМОВ

ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»



EDITORIAL·MIR·MOSCÚ

Traducido del ruso
por J. J. Tolosa, candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas,
y Yu. P. Murzín

Impreso en la URSS

На испанском языке

Indice

PARTE I

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

Capítulo I. Breve reseña de las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría

Capítulo II. Axiomas de la geometría elemental

Capítulo III. Teoría no euclidiana de las paralelas

Parte I

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

Capítulo I

BREVE RESEÑA DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

1. Axiomas de Euclides

§ 1. El surgimiento de las ideas geométricas se remonta a épocas muy lejanas. Las primeras formulaciones de las mismas son comúnmente adjudicadas a las antiguas culturas de Babilonia y de Egipto.

A partir del siglo VII antes de nuestra era comienza el período del desarrollo de la geometría en los trabajos de los científicos griegos. En los siglos VI y V se obtuvieron muchos resultados geométricos fundamentales. Hacia esta época, por lo visto, se consolidó el concepto de demostración de teoremas.

En el siglo III los griegos ya poseían conocimientos geométricos profundos; ellos no sólo tenían acumulada una buena cantidad de resultados, sino que también disponían de métodos de demostraciones geométricas. Resulta natural, por ello, que en este período aparecieran tentativas de reunir todo este material y disponerlo en un orden lógico coherente.

Muchos autores griegos, cuyas obras no han llegado hasta nosotros, acometieron la tarea de exponer los principios de la geometría. Por lo visto, fueron olvidados luego de la aparición de los famosos «Elementos» de Euclides.

§ 2. Euclides, uno de los grandes geómetras de la antigüedad, vivió en un período que se extiende aproximadamente del año 330 al 275 antes de nuestra era. Sus «Elementos» fueron divididos en 13 libros, de los cuales el quinto, el séptimo, el octavo, el noveno y el décimo están dedicados a la teoría de las proporciones y a la aritmética (expuestas en forma geométrica); los restantes son propiamente geométricos.

El libro primero contiene las condiciones de igualdad de triángulos, las relaciones entre lados y ángulos de triángulos, la teoría de líneas paralelas y criterios de equivalencia de triángulos y polígonos. En el segundo libro se expone la transformación de un polígono en un cuadrado equivalente. El libro tercero está dedicado a la circunferencia. En el cuarto se consideran los polígonos inscritos y circunscritos. El libro sexto analiza la semejanza de polígonos. En los tres últimos libros se exponen los fundamentos de la estereometría.

Así, pues, los «Elementos» contienen el material correspondiente a la geometría elemental propiamente dicha. Mucho de lo que ya se sabía en los tiempos de Euclides (por ejemplo, la teoría de las secciones cónicas) no se halla expuesto en los «Elementos».

Euclides comienza cada libro definiendo los conceptos que tendrá que manejar en él.

El primer libro está precedido de 23 definiciones. Transcribimos las primeras ocho.

Definición I. El punto es aquello que no tiene partes.

Definición II. La línea es longitud sin ancho.

Definición III. Las fronteras de una línea son puntos.

Definición IV. La recta es aquella línea que se halla igualmente dispuesta con respecto a todos sus puntos.

Definición V. La superficie es lo que posee únicamente longitud y ancho.

Definición VI. Las fronteras de una superficie son líneas.

Definición VII. El plano es una superficie que se halla igualmente dispuesta con respecto a todas las rectas que se encuentran en ella.

Definición VIII. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran, y que están situadas en un mismo plano.

Inmediatamente después de las definiciones, Euclides expone los postulados y los axiomas, es decir, afirmaciones que se aceptan sin demostración*).

Postulados

I. Se exige que de cada punto a cualquier otro se pueda trazar una línea recta.

II. Y que cada recta pueda ser continuada indefinidamente.

III. Y que de cualquier centro se pueda trazar una circunferencia de radio arbitrario.

IV. Y que todos los ángulos rectos sean iguales.

V. Y que cada vez que una recta, al intersecar otras dos, forme a un mismo lado ángulos internos cuya suma sea menor que dos rectos, y que dichas dos rectas se intersequen en aquel lado en el cual esta suma sea menor que dos rectos.

Axiomas

I. Dos cosas iguales separadamente a una tercera son iguales entre sí.

II. Y si a iguales agregamos iguales, obtenemos iguales.

III. Y si de iguales quitamos iguales, obtenemos iguales.

IV. Y si a desiguales agregamos iguales, obtenemos desiguales.

V. Y si duplicamos iguales, obtenemos iguales.

VI. Y las mitades de iguales son iguales entre sí.

VII. Y cosas que se pueden superponer son iguales.

VIII. Y el todo es mayor que una parte.

IX. Y dos rectas no pueden encerrar espacio.

Se duda que algunos de los axiomas referidos (los IV, V, VI y IX) pertenezcan realmente a Euclides. En otras ediciones de los «Elementos» los postulados IV y V se incluyen entre los axiomas; a esto se debe que el quinto postulado a veces se mencione como el axioma XI. En cuanto al principio por el cual las premisas básicas se

*) En distintas ediciones de los «Elementos» las listas de postulados y axiomas no coinciden. Aquí reproducimos una de las listas más difundidas.

ponían entre los postulados o entre los axiomas, éste ha quedado en esencia sin aclarar.

A continuación de los axiomas, Euclides expone los teoremas de la geometría, disponiéndolos en orden lógico, de forma que cada proposición pueda demostrarse a base de las proposiciones, los postulados y los axiomas precedentes.

§ 3. La enumeración de definiciones y axiomas, suficientes para la demostración lógica rigurosa de todos los teoremas subsiguientes se denomina fundamentación (axiomática) de la geometría.

El problema de fundamentar la geometría fue planteado claramente por Euclides en sus «Elementos» y resuelto con el grado de precisión que se podía alcanzar en la antigüedad. Es más, posteriormente, durante muchos siglos, el rigor de las demostraciones euclidianas se reconoció invariablemente como un modelo a imitar.

Sin embargo, si consideramos la exposición de los «Elementos» desde el punto de vista de las matemáticas modernas, habrá que reconocer que es insatisfactoria en varios aspectos.

Analicemos ante todo las definiciones de Euclides; algunas han sido expuestas más arriba.

Los enunciados de estas definiciones operan con conceptos que, a su vez, deberían ser también definidos, tales como «frontera», «longitud», etc. Ninguna de las definiciones I — VIII es utilizada en la demostración de teorema alguno; por ende, al no estar relacionadas con el resto del libro son, en esencia, inútiles, y pueden ser omitidas sin dañar lo más mínimo los razonamientos ulteriores. Estas definiciones son tan sólo descripciones de las figuras geométricas, expuestas, por lo demás, en forma extremadamente ingenua.

Por el contrario, los postulados y axiomas son, en general, esenciales; al demostrar muchas proposiciones geométricas hay que tomar en consideración, por ejemplo, que la recta se determina por dos de sus puntos, que existe una circunferencia de radio arbitrario, etc. Pero aquí hay que destacar otro problema: inclusive un análisis superficial pone al descubierto que la lista de proposiciones básicas adoptadas por Euclides sin demostración es demasiado pobre para servir de base a un desarrollo lógico de la geometría. Daremos algunos ejemplos, a fin de aclarar este juicio.

En los razonamientos geométricos hay que operar a cada paso con conceptos que habitualmente expresamos con la frase «el punto dado de la recta se encuentra entre otros dos puntos de ésta», «dos puntos se encuentran a un lado con respecto de una recta» o también «dos puntos se encuentran en lados diferentes con respecto a una recta», «el punto se encuentra dentro del polígono», etc. Los postulados de Euclides no suministran ningún dato para fundamentar estos conceptos. Cuando los utilizamos en la demostración de algún teorema, si disponemos únicamente de los postulados de Euclides, nos vemos obligados a apelar a la intuición geométrica sobre la base de la figura dibujada. Sin embargo, en una construcción lógica rigurosa de la geometría, cada proposición no contenida en los axiomas debe ser demostrada, por más evidente que parezca.

Cabe observar, además, que, según el significado del axioma VII, la igualdad de magnitudes y figuras geométricas se define mediante movimientos. Por otra parte, el propio concepto de movimiento no está definido en los libros de Euclides, y sus

propiedades no se enumeran en ningún axioma. Por último, cada vez que Euclides considera dos circunferencias, una de las cuales pasa por un punto interior y otro exterior con respecto a la otra, él asume sin más la existencia de puntos de intersección de éstas; asimismo, cuando se trata de una recta que pasa por un punto interior de alguna circunferencia, se acepta que la recta y la circunferencia se cortan en dos puntos. A pesar de la evidencia intuitiva de estos hechos, ellos deben ser demostrados. Pero no hay entre los postulados y axiomas de Euclides ninguna proposición que permita fundamentar tales demostraciones.

Resulta ser, entonces, que el rigor de la lógica de Euclides se basa, en muchos casos, en la intuición adquirida por el hábito de nuestras representaciones espaciales. Esto quiere decir que los «Elementos» no contienen una fundamentación lógica rigurosa de la geometría.

§ 4. Algunas de las fallas de los «Elementos» de Euclides fueron observadas ya por los científicos de la antigüedad. En particular, Arquímedes amplió la lista de los postulados geométricos, y completó mucho la exposición de Euclides en la teoría de medición de longitudes, áreas y volúmenes. Mientras Euclides establece únicamente relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes, mostrando, por ejemplo, que las áreas de los círculos son como los cuadrados de los radios, y los volúmenes de esferas como los cubos de los radios, Arquímedes presenta expresiones que permiten calcular prácticamente las magnitudes correspondientes. Este último introdujo los cinco postulados siguientes, a fin de fundamentar la geometría métrica:

I. Entre todas las líneas con extremos comunes la recta es la más corta.

II. Otras dos líneas cualesquiera que tengan extremos comunes y se hallen en un mismo plano no son iguales, si ambas son convexas y una de ellas es encerrada por la otra y por la recta que une los extremos, así como tampoco lo son si las curvas tienen una parte común, y de las partes restantes una encierra a la otra; en este caso, la encerrada es menor que la que encierra.

III. Asimismo, de todas las superficies con una misma periferia plana, el plano es menor que todas las demás.

IV. Cualesquiera otras dos superficies con periferia plana común no son iguales, si ambas son convexas y una de ellas (o una parte de ésta) está encerrada por la otra y por el plano de la periferia; en este caso, la superficie encerrada es menor que la que encierra.

V. Además, de dos líneas desiguales, dos superficies desiguales, o dos cuerpos desiguales, la mayor resultará ser menor que la magnitud que se obtiene si se repite la menor un número adecuado de veces.

Las primeras cuatro proposiciones de Arquímedes no sirven para tomarse como postulados en una fundamentación lógica de la geometría métrica, pues se refieren a la longitud de una línea, el área de una superficie y el volumen de un cuerpo, mientras que estos conceptos deben ser, en rigor, definidos a partir de otras categorías geométricas más simples. Si se enuncian estas definiciones de manera adecuada, las afirmaciones de Arquímedes pueden ser demostradas; es por ello que no tiene sentido considerarlas como postulados.

Por el contrario, la última afirmación, que es llamada comúnmente postulado de Arquímedes, es extremadamente importante. Se la puede expresar brevemente como sigue: para cualesquiera a y b, $a < b$, existe un entero n tal que $na > b$. Este

postulado sirve de base a la medición de magnitudes geométricas, como se mostrará en detalle en el capítulo II, § 20.

Después de Arquímedes también continuaron los intentos de precisar los postulados básicos de la geometría. Sin embargo, durante muchos siglos nadie agregó nada nuevo en principio a lo que ya había sido hecho por Euclides. El rigor de las demostraciones euclidianas se consideraba en general suficiente, hasta el siglo XIX. Sólo a fines de dicho siglo fue cristalizada definitivamente la idea de una construcción lógica exacta de la geometría, e indicado un sistema completo de axiomas de los cuales se deducen todos los teoremas sin apelación alguna a nuestra intuición en las representaciones espaciales.

Muy pocos geómetras sentían la necesidad de completar la lista de los postulados de Euclides. Por el contrario, la mayoría de las obras relacionadas con los «Elementos» de Euclides se proponían disminuir el número de afirmaciones geométricas que se asumían sin demostración. Esto era dictado por un deseo completamente natural de poner en claro bajo qué premisas mínimas puede ser desarrollado de modo lógico todo el material de la geometría.

En esta dirección se obtuvo un resultado sin trabajo alguno: precisamente, se observó que el IV postulado de Euclides es superfluo, pues la igualdad de los ángulos rectos puede ser demostrada con el mismo rigor que muchas otras proposiciones.

La mayoría de las obras dedicadas a los fundamentos de la geometría se reducían a la tentativa de eliminar de la lista de suposiciones básicas el V postulado de Euclides, que parecía ser demasiado complicado para ser referido a los postulados.

Los estudios dedicados al V postulado son tan antiguos como los propios «Elementos» de Euclides. Sólo fueron concluidos hacia fines del siglo XIX, y condujeron a descubrimientos de gran importancia.

Pasamos a referir algunas páginas de la historia del V postulado; esto facilitará al lector la comprensión de los problemas modernos de los fundamentos de la geometría.

2. El quinto postulado

§ 5. Para cualquiera que haya estudiado la geometría elemental le resultará claro el papel fundamental del V postulado; en él se basa la teoría de las paralelas y todas las secciones relacionadas con ésta: la semejanza de figuras, la trigonometría, etc.

Recordemos la sucesión de proposiciones de partida de la planimetría, a fin de observar dónde se utiliza por primera vez el V postulado.

En los manuales escolares se introduce, ante todo, la comparación de figuras geométricas: segmentos, ángulos, triángulos se consideran iguales si pueden ser superpuestos por medio de un movimiento; un segmento (ángulo) es mayor que otro, si el segundo puede ser superpuesto a una parte del primero. El propio concepto de movimiento queda, en esencia, sin definir.

A continuación se muestra una serie de teoremas básicos, entre ellos:

Teoremas de igualdad de triángulos.

Teorema: en un triángulo isósceles los ángulos adyacentes a la base son iguales.

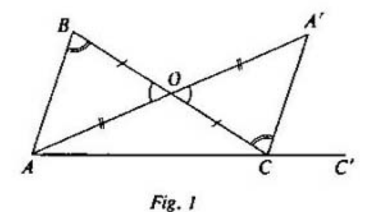


Fig. 1

Teorema: el ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de los internos no adyacentes.

Teorema: en un triángulo, a mayor lado le corresponde mayor ángulo opuesto (y recíprocamente).

Teoremas sobre rectas perpendiculares y oblicuas.

Teorema: cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Es de particular interés para nuestra exposición el teorema sobre los ángulos interno y externo de un triángulo; más adelante nos referiremos con frecuencia a él. Pasamos a demostrarlo. Sea dado el triángulo ABC (fig. 1); hay que mostrar que cada ángulo externo es mayor que cualquier interno no adyacente. Probemos esto para el ángulo externo correspondiente al vértice C y para el interno en el vértice B.

Sea O el punto medio del lado BC; construimos el segmento AO y, sobre su prolongación, determinamos el punto A' de forma que se cumpla $AO = OA'$. Ahora unimos el punto A' con el C, y pasamos a considerar los triángulos AOB y $A'OC$. Estos son iguales, por contener ángulos iguales determinados por lados respectivamente iguales. De la igualdad de dichos triángulos sigue que $\angle ABC = \angle BCA'$. De aquí ya se deduce el teorema, pues $\angle BCA'$ es una parte del ángulo externo en cuestión.

El último paso de la demostración debe considerarse con más cuidado. Precisamente, el hecho de que $\angle BCA'$ sea parte de $\angle BCC'$, o bien que el punto A' se encuentre dentro de $\angle BCC'$ (donde C' es un punto arbitrario sobre la prolongación del segmento AC), se establece, en esencia, a partir de la intuición geométrica, mirando la figura. Como ya hemos indicado, los axiomas de Euclides no permiten fundamentar con todo rigor los conceptos «entre», «dentro de», etc.

Además, hemos utilizado el concepto de igualdad de triángulos, que tampoco está fundamentado, pues Euclides no define movimiento.

En resumen, el razonamiento expuesto se basa fuertemente en la intuición geométrica aplicada al dibujo hecho.

Por supuesto, podríamos hacer observaciones similares en la deducción de casi cualquier teorema geométrico. Pero es, con todo, importante observar que tanto el teorema sobre los ángulos externo e interno de un triángulo como las otras proposiciones enumeradas más arriba no requieren el V postulado para ser demostrados.

Después de establecidas estas proposiciones, se da la definición de paralelas: dos rectas se dicen paralelas si no tienen ningún punto común*).

---

*) Recuérdese que estamos tratando la planimetría.

Para que esta definición tenga sentido, debe demostrarse la existencia de paralelas. La demostración se obtiene fácilmente mediante el conocido teorema: dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí, cosa que sigue de inmediato de la proposición sobre los ángulos externo e interno de un triángulo.

En efecto, supongamos que las rectas a y b forman ángulos rectos con la recta c, en los puntos A y B (fig. 2). Supongamos que a y b no son paralelas, y denotemos por C su punto común. Pero entonces el ángulo externo del triángulo ABC correspondiente al vértice A debe ser mayor que el interno del vértice B, lo que contradice la hipótesis hecha con respecto a estos ángulos. Con esto concluye la prueba de nuestra afirmación, por reducción al absurdo.

De aquí sigue inmediatamente que por cada punto M se puede trazar una paralela a cualquier recta u que no pase por él (fig. 3). Para esto basta trazar por M la perpendicular MN a u, y construir la recta u', perpendicular a MN en el punto M. La recta u' será paralela a u, en virtud de lo que acabamos de ver.

Una vez demostrada la existencia de paralelas y establecido que por cada punto se puede trazar una recta paralela a otra dada, debe resolverse, naturalmente, el siguiente problema: ¿por cada punto del plano pasa una única paralela a una recta dada, o hay un conjunto de ellas?

En la teoría de las paralelas se demuestra que *por cada punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.* Vamos a reproducir esta demostración (fig. 3).

Sea u una recta arbitraria, y M algún punto que no le pertenece; sea MN la perpendicular a u. Denotemos por u' la recta perpendicular a MN en M. Ya sabemos que u' es paralela a u. Tracemos una recta arbitraria u'' que pase por M y no coincida con u'; mostraremos que u'' no puede ser paralela a u. Como u'' no coincide con u', debe formar un ángulo agudo con el segmento MN para alguno de los dos lados. Entonces, las rectas u y u'' forman con MN al intersecarla ángulos internos a un mismo lado de MN, cuya suma es menor que dos rectos; de aquí sigue, en virtud del V postulado, que u y u'' deben intersecarse.

Como vemos, *esta prueba de unicidad de la paralela utiliza de manera esencial el V postulado. Es fácil advertir que, recíprocamente, el V postulado puede ser demostrado, ya como teorema, si se considera que por cada punto exterior a una recta dada pasa una única paralela a ella.*

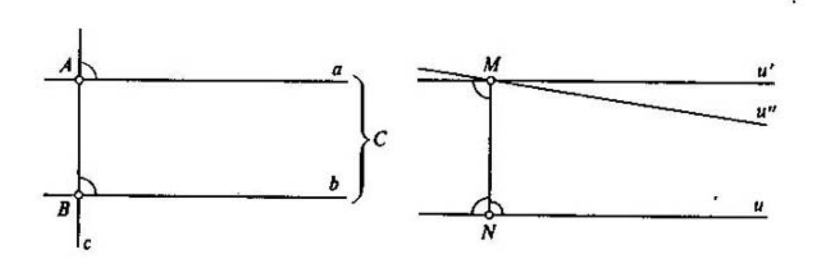


Fig. 2 *Fig. 3*

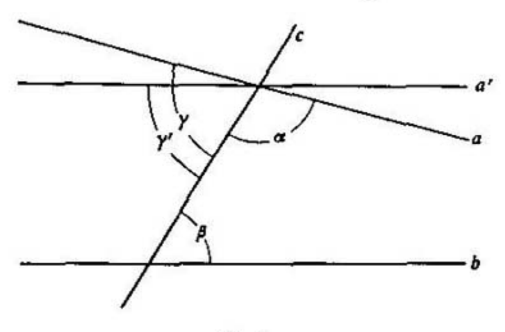


Fig. 4

En efecto, supongamos que las rectas a y b (fig. 4) al ser intersecadas por la tercera c forman a un mismo lado ángulos internos cuya suma sea menor que $2d$*). Debemos probar que a y b tienen un punto común, en este mismo lado de la recta c.

Denotemos con α y β los ángulos que las rectas a y b forman con c y supongamos, de acuerdo con nuestra hipótesis, que

$$\alpha + \beta < 2d. \qquad (*)$$

Sea, además, γ el ángulo adyacente a α. Tracemos una recta a' que pase por el punto de intersección de a y c, de modo que forme con c un ángulo $\gamma' = \beta$.

Entonces las rectas a' y b son paralelas, pues si suponemos que se cortan, llegaremos a una contradicción con el teorema sobre los ángulos externo e interno de un triángulo. Pero, al tomar como postulado la unicidad de la paralela, debemos concluir que la recta a (por ser diferente de a') no es paralela a b. Sólo queda probar que a y b se cortan del lado en que se hallan los ángulos α y β. Con este fin, observemos que $\alpha + \gamma = 2d$; de aquí y de la desigualdad (*) sigue que $\gamma > \beta$. En consecuencia, a y b no pueden cortarse del lado en que está γ, pues en este caso γ será un ángulo interno del triángulo obtenido, y β, externo, resultando imposible la desigualdad $\gamma > \beta$.

Así, pues, el V postulado es equivalente a afirmar que existe una única recta paralela a una dada, que pase por un punto determinado; a su vez, la última afirmación determina toda la construcción de la geometría de Euclides. De aquí sigue, en particular, que dos paralelas, al cortarse con una tercera recta, forman ángulos correspondientes iguales, que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, y muchos otros teoremas. De este modo, el V postulado o, como también se lo llama, el postulado sobre las paralelas, constituye la base de la mayoría de las proposiciones importantes de la geometría elemental.

§ 6. Es posible que incluso el propio Euclides tratase de demostrar el postulado sobre las paralelas. Un argumento a favor de esto es que las primeras 28 proposi-

---

*) El autor denota por d la magnitud del ángulo recto. (*N. del Tr.*).

ciones de los «Elementos» no se basan en el V postulado. Parecería ser que Euclides trató de aplazar la aplicación de este postulado hasta que fuese imprescindible utilizarlo.

Desde Euclides hasta fines del siglo XIX el problema del V postulado era uno de los más populares de la geometría. Durante todo ese período se propusieron muchas demostraciones diferentes del V postulado. Todas eran, sin embargo, equívocas. Por lo común, sus autores utilizaban alguna afirmación geométrica que resultaba tan evidente en el dibujo, que se deslizaba en los razonamientos sin que el propio autor se diese cuenta. Pero al tratar de dar una prueba lógica de esta afirmación, no basada en el V postulado, se fracasaba invariablemente.

Tales análisis no alcanzaron entonces la meta propuesta, ya que el problema consistía en liberar la teoría euclidiana de las paralelas de ese postulado *especial*; no se trataba, entonces, de sustituir el V postulado por otra afirmación, por evidente que ésta fuera, sino más bien de demostrarlo, partiendo de los restantes postulados de la geometría*).

Con todo, cabe destacar que las numerosas tentativas de demostrar el V postulado, a pesar de su fracaso, condujeron a varios resultados positivos.

Gracias a ellas, precisamente, se puso en claro la interdependencia lógica entre diversas proposiciones geométricas; en particular, se estableció toda una serie de proposiciones equivalentes al postulado euclidiano sobre las paralelas (es decir, afirmaciones que, habiéndose adoptado sin demostración, junto con otras premisas básicas de la geometría euclidiana permiten demostrar el V postulado).

Podemos exponer los siguientes ejemplos de afirmaciones equivalentes al V postulado:

1. Por cada punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella.

2. Dos rectas paralelas al intersecarse con una tercera forman ángulos correspondientes iguales.

3. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.

4. Los puntos situados a un mismo lado de una recta dada, a una misma distancia de ésta, forman una recta.

5. Dadas dos rectas paralelas, las distancias de los puntos de una de ellas a la segunda están acotadas.

6. Existen triángulos con área arbitrariamente grande.

7. Existen triángulos semejantes.

Cada una de estas proposiciones puede ponerse como base de la teoría sobre las paralelas; en otras palabras, si se acepta cualquiera de ellas como verdadera por evidencia, se puede demostrar rigurosamente el V postulado y luego, siguiendo a Euclides, demostrar todos los teoremas ulteriores. La equivalencia del V postulado con las proposiciones enumeradas, así como también con algunas otras, se mostrará en la exposición que sigue.

§ 7. De los múltiples trabajos dedicados al V postulado, cabe destacar los de Saccheri y Lambert, que dejaron una huella significativa en el camino de la fundamentación de la teoría de las paralelas.

---

*) Más adelante plantearemos con toda precisión este problema.

Los estudios de Saccheri fueron publicados en 1733, bajo el título «Euclides depurado de toda mácula, o la experiencia que establece los principios primordiales de la geometría universal». En esta obra Saccheri hace un intento de demostrar el V postulado *por reducción al absurdo.*

Saccheri parte del cuadrilátero $AA'B'B$ (fig. 5) con dos ángulos rectos en la base AB y dos lados iguales, AA' y BB'. De la simetría de la figura con respecto a la perpendicular HH' a la mitad de la base AB, sigue que los ángulos en los vértices A' y B' son iguales entre sí. Si se acepta el V postulado y, en consecuencia, la teoría euclidiana de las paralelas, se puede establecer inmediatamente que los ángulos A' y B' son rectos, y $AA'B'B$ es un rectángulo. Recíprocamente, como muestra Saccheri, si al menos en un cuadrilátero del tipo indicado los ángulos de la base superior resultan ser rectos, tendrá lugar el postulado euclidiano de las paralelas. Con el objeto de demostrar este postulado, Saccheri considera tres casos posibles: o bien los ángulos A' y B' son rectos, o bien obtusos, o bien agudos. Estas tres hipótesis las llama, respectivamente, hipótesis del ángulo recto, del obtuso y del agudo. Como la hipótesis del ángulo recto equivale al V postulado, a fin de demostrar este último hay que descartar las otras dos hipótesis. Con razonamientos totalmente rigurosos Saccheri llega, ante todo, a una contradicción con la hipótesis del ángulo obtuso. A continuación, adoptando la hipótesis del ángulo agudo, deduce consecuencias extremadamente elaboradas de tal premisa, a fin de obtener también aquí dos afirmaciones contradictorias. Al desarrollar estas consecuencias, Saccheri construye un sistema geométrico complejo, algunas de cuyas proposiciones son tan contradictorias con nuestras ideas habituales sobre la disposición de las rectas en el plano, que podrían ser consideradas absurdas. Por ejemplo, en el sistema geométrico correspondiente a la hipótesis del ángulo agudo, dos paralelas tienen o bien una única perpendicular común, a ambos lados de la cual éstas se alejan indefinidamente una de la otra, o bien no poseen ninguna, en cuyo caso convergen asintóticamente en un sentido y divergen indefinidamente en el otro.

Saccheri, con justeza, no considera que la sola contradicción con las ideas intuitivas de las representaciones habituales en el espacio sea un argumento para la invalidación lógica de estas premisas. Pero, al cabo de una serie de razonamientos precisos, Saccheri concluye la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo, basándose en que dos rectas que convergen asintóticamente deben tener una perpendicular común en el punto del infinito, cosa que «contradice la naturaleza de la recta». Aceptando que, de este modo, las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo conducen a contradicciones, Saccheri concluye que la única verdadera es la hipótesis del ángulo recto, con lo que queda demostrado el V postulado. Evidentemente, el propio Saccheri siente aquí que no pudo reducir la hipótesis del ángulo agudo a una contradicción lógica, y él regresa a ella, a fin de demostrar que «contradice a sí misma». Con este fin, calcula de dos maneras diferentes la longitud de cierta línea, y obtiene dos valores distintos para ella. Esto sería, en efecto, una contradicción, pero Saccheri llegó a ella habiendo cometido un error de cálculo.

Las ideas de Lambert, desarrolladas en la obra «Teoría de las líneas paralelas» (1766) se aproximan a los razonamientos de Saccheri.

Lambert considera el cuadrilátero $ABCD$ con los tres ángulos A, B y C rectos (fig. 6); con respecto al cuarto también se pueden efectuar tres supuestos: o bien es

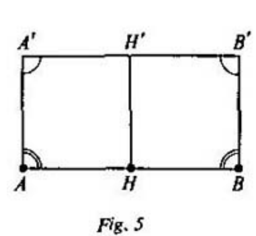


Fig. 5

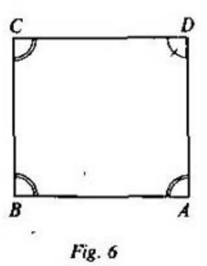


Fig. 6

agudo, o bien recto, o bien obtuso. De este modo, aquí nuevamente surgen tres hipótesis. Una vez establecida la equivalencia de la hipótesis del ángulo recto con el V postulado, y habiendo reducido a una contradicción la hipótesis del ángulo obtuso, Lambert, como Saccheri, se ve obligado a analizar más la hipótesis del ángulo agudo. Y nuevamente esta hipótesis conduce a Lambert a un sistema geométrico complicado. Sin embargo, a pesar de que este sistema fue profundamente desarrollado por Lambert, no le fue posible hallar en él contradicción lógica alguna. También en el trabajo de Lambert se encuentran las particularidades, paradójicas a primera vista, de la disposición de las rectas en el sistema basado en la hipótesis del ángulo agudo, que expusimos más arriba, al describir las ideas de Saccheri. Lambert, al igual que Saccheri, no dedujo la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo basándose únicamente en que estas particularidades contradicen nuestras ideas intuitivas sobre las propiedades de las rectas. Pero, a diferencia de Saccheri, él no cometió error alguno, que le diera pie para considerar descartada la hipótesis del ángulo agudo y, por ende, demostrado el V postulado. Lambert no afirma, en ninguna parte de su obra, haber demostrado el V postulado, y llega a la firme conclusión de que las restantes tentativas en esta dirección no llevaron a la meta deseada.

«Las demostraciones del postulado euclidiano —escribe Lambert— pueden ser llevadas tan lejos que, a primera vista, sólo queda un detalle insignificante. Pero al hacer un análisis escrupuloso, resulta que en esta insignificancia aparente reside, precisamente, la esencia del problema; comúnmente ésta contiene o bien la proposición a demostrar, o bien un postulado equivalente a ella».

Es más, al desarrollar el sistema de corolarios de la hipótesis del ángulo agudo, Lambert descubre una analogía de este sistema con la geometría esférica, y ve en esto una posibilidad de su existencia.

«Inclusive yo me inclino a pensar que la tercera hipótesis es válida en alguna esfera imaginaria. Al fin de cuentas, debe existir una causa por la cual en el plano se resiste altamente a ser refutada, cosa que puede hacerse fácilmente con la segunda hipótesis».

Más adelante veremos que Lambert predijo genialmente la verdadera solución del problema del V postulado. En todo caso, él siguió el camino correcto mucho más lejos que cualquiera de los que lo precedieron.

§ 8. Ahora nos detendremos a analizar las investigaciones de Legendre (1752—1833), que es bien conocido por sus trabajos en análisis y en mecánica y dejó, asimismo, una herencia importante en geometría.

Legendre intentó, durante mucho tiempo, demostrar el V postulado, y llegó a publicar algunas variantes de su «demostración». Aunque ninguna resultó correcta, de todos modos los razonamientos de Legendre tienen interés, pues ponen en claro la relación existente entre el V postulado y la proposición relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo.

En la geometría de Euclides es bien conocida la demostración, basada en el V postulado, de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.

Legendre muestra, primeramente, que, recíprocamente, si se admite sin demostración que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, el V postulado puede ser demostrado como un teorema.

Luego, con el fin de obtener una demostración del V postulado sin introducir otros nuevos, Legendre considera tres hipótesis excluyentes:

I. La suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos.

II. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

III. La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.

La primera es reducida a una contradicción por Legendre, mediante razonamientos exactos. Si pudiese hacer lo mismo con la tercera, sin usar el V postulado, habría demostrado que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, con lo cual habría demostrado el V postulado. Sin embargo, al efectuar la reducción de la tercera hipótesis a una contradicción, Legendre utilizó, sin darse cuenta, una de las proposiciones equivalentes al V postulado.

El saldo positivo del trabajo de Legendre se encuentra en las proposiciones siguientes.

PROPOSICIÓN I. *Si la suma de los ángulos de cada triángulo es igual a dos rectos, tiene lugar el V postulado.*

Para probarlo, tomemos una recta arbitraria a y algún punto A que no le pertenece (fig. 7).

Sea AB la perpendicular a la recta a que pasa por A. Sabemos que la recta a', que pasa por A y es perpendicular al segmento AB, no interseca a a. Debemos mostrar que cualquier otra recta que pase por A corta a a. En la demostración que sigue utilizaremos la hipótesis adoptada de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos.

Sea b alguna recta que pase por A, y β, el ángulo agudo que esta recta forma con el segmento AB. Probemos que b corta a a del lado del ángulo agudo. Con este fin, determinemos sobre la recta a, del lado del ángulo agudo, un punto B_1 de forma que el segmento BB_1 sea igual al AB. Del mismo lado a partir de B_1 determinemos el punto B_2 de manera que B_1B_2 sea igual a AB_1, etc. Determinemos, por fin, el punto B_n de modo que $B_{n-1}B_n$ sea igual al segmento AB_{n-1}.

Consideremos los triángulos $ABB_1, AB_1B_2, \dots, AB_{n-1}B_n$. Como admitimos que la suma de los ángulos de cada triángulo es igual a dos rectos, tendremos que en el triángulo isósceles ABB_1 los ángulos internos en los vértices A y B_1 son iguales a $\frac{\pi}{4}$.

Luego, el ángulo interno correspondiente a B_1 en el triángulo ABB_1 es externo con respecto al triángulo AB_1B_2, y como este último es asimismo isósceles, sus ángulos internos no adyacentes al B_1 serán iguales entre sí. Pero de la hipótesis hecha acerca de la suma de los ángulos de un triángulo se desprende que un ángulo externo

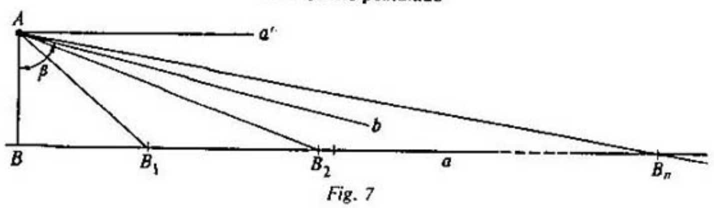


Fig. 7

de un triángulo es igual a la suma de los dos internos no adyacentes a él; por esto, los ángulos internos del triángulo AB_1B_2 en los vértices A y B_2 son iguales a $\frac{\pi}{8}$ cada uno. Continuando este proceso, hallamos que el ángulo interno correspondiente a B_n en el triángulo $AB_{n-1}B_n$ es igual a

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

De aquí sigue que

$$\angle BAB_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Como β es un ángulo agudo, podemos poner

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$. Escojamos n tan grande como para que se cumpla

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2} < \varepsilon.$$

Entonces tendremos que $\beta < \angle BAB_n$.

En este caso, la recta b pasa entre los lados AB y AB_n del triángulo BAB_n y, en consecuencia, tendrá un punto común con la recta a, situado entre los puntos B y B_n *). Esto prueba nuestra afirmación.

Pasemos ahora a discutir el problema sobre los valores posibles de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Para mayor comodidad, designaremos por $S(\Delta)$ la suma de los ángulos internos de un triángulo Δ, y por $D(\Delta)$, la diferencia entre dos rectos y dicha suma, de forma que

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta);$$

esta diferencia suele llamarse *defecto del triángulo*.

PROPOSICIÓN II. *En cada triángulo*

$$S(\Delta) \leqslant \pi.$$

La demostración se basa en los dos lemas siguientes:

I. *En cada triángulo la suma de dos ángulos internos es menor que dos rectos.*

II. *Para cada triángulo es posible construir uno nuevo que tenga la misma suma de ángulos internos que el dado y con uno de sus ángulos al menos dos veces menor que algún ángulo prefijado del triángulo dado.*

Demostremos estos lemas.

---

*) La demostración rigurosa de la última afirmación puede efectuarse utilizando el axioma de Pasch (véase el § 13).

El primero sigue directamente de la proposición que se refiere a los ángulos interno y externo de un triángulo. En efecto, sean α y β ángulos internos de cierto triángulo, y α', el ángulo externo de este triángulo que es adyacente al α. Entonces

$$\alpha + \alpha' = \pi.$$

Pero el ángulo externo de un triángulo es mayor que el interno no adyacente. (Esta proposición, como recordará el lector, se demuestra sin recurrir al V postulado.) Así, pues,

$$\alpha' > \beta$$

y, por consiguiente,

$$\alpha + \beta < \pi.$$

Para demostrar el segundo lema, consideremos algún triángulo ABC y mostremos que es posible construir uno nuevo que tenga la misma suma de ángulos que el dado, y que posea un ángulo al menos dos veces menor que, digamos, el ángulo del vértice A del triángulo dado (fig. 8).

Designamos con O el punto medio de BC, unimos A con O y prolongamos el segmento AO hasta el punto A', de forma que sea $AO = OA'$. Entonces el triángulo $AA'C$ tendrá la propiedad requerida. En efecto, con las notaciones de la fig. 8, tenemos:

$$S(ABC) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1,$$
$$S(AA'C) = \alpha_1 + \alpha' + \gamma_1 + \gamma_2.$$

De la igualdad de los triángulos ABO y COA', que se considera de inmediato, sigue que

$$\alpha' = \alpha_2, \quad \gamma_2 = \beta.$$

De aquí se desprende, ante todo, que los triángulos ABC y $AA'C$ tienen igual suma de ángulos.

Además, los ángulos internos del segundo triángulo correspondientes a los vértices A y A' forman, sumados, el ángulo al vértice A del primero. Por esto alguno de ellos es al menos dos veces menor que el ángulo prefijado A del triángulo ABC, que es lo que se deseaba mostrar.

Vamos ahora a demostrar la proposición básica. Haremos la demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que algún triángulo Δ tiene suma de ángulos internos mayor que dos rectos, de forma que $S(\Delta) = \pi + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$.

Denotemos alguno de los ángulos internos de Δ con α. Según el lema II, podemos construir un nuevo triángulo Δ_1, tal que uno de sus ángulos internos α_1 sea al menos dos veces menor que α, y que $S(\Delta_1) = S(\Delta)$. Construyamos ahora un triángulo Δ_2 de manera que uno de sus ángulos internos α_2 sea al menos dos veces menor que α_1 y que $S(\Delta_2) = S(\Delta_1)$. Continuando este proceso, construimos un triángulo Δ_n, tal que uno de sus ángulos internos α_n será al menos dos veces menor que α_{n-1}, y que $S(\Delta_n) = S(\Delta_{n-1})$. De este modo,

$$S(\Delta_n) = \pi + \varepsilon \quad \text{y} \quad \alpha_n \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$

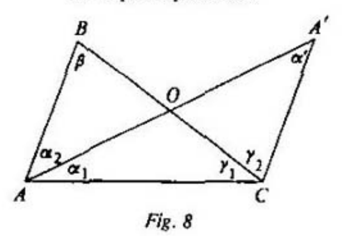


Fig. 8

Escogemos n tan grande como para que sea $\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$ y, consecuentemente, $\alpha_n < \varepsilon$. Pero entonces la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo Δ_n será mayor que π, lo cual contradice el lema I.

Queda así probada la proposición II.

Podemos, pues, afirmar, sin basarnos en el V postulado, que la suma de los ángulos internos de un triángulo no supera dos rectos.

Esto resulta ser de extremada importancia para lo que sigue.

Siguiendo a Legendre, ahora mostraremos, sin recurrir al V postulado, que si suponemos que al menos para un triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a dos rectos, entonces para todo otro triángulo la suma de sus ángulos también será igual a dos rectos.

Establezcamos algunos lemas previos.

LEMA I. *Si el triángulo ABC se divide en dos por la transversal BP, el defecto de ABC será igual a la suma de los defectos de los triángulos ABP y BPC.*

La demostración se ve en seguida. En efecto, en las notaciones de la fig. 9,

$$D(ABP) = \pi - (\alpha + \beta_1 + \delta_1),$$
$$D(BPC) = \pi - (\beta_2 + \delta_2 + \gamma).$$

De aquí sigue que

$$D(ABP) + D(BPC) = 2\pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2 + \gamma) = \\ = \pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma) = D(ABC).$$

LEMA II. *Sean dados dos triángulos ABC y AB_1C_1 con vértice común A y tales que los vértices B_1 y C_1 del segundo se encuentren respectivamente en los lados AB y AC del primero. Entonces el defecto del segundo triángulo no supera el del primero* (fig. 10).

La demostración se obtiene inmediatamente utilizando la proposición II y el lema precedente.

En efecto, unamos los puntos B y C_1; entonces, según el lema anterior,

$$D(ABC) = D(AB_1C_1) + D(B_1BC_1) + D(BC_1C).$$

Pero de la proposición II sigue que el defecto de cada triángulo es o bien un número positivo, o bien cero. De aquí y de la igualdad que acabamos de escribir se tiene que

$$D(AB_1C_1) \leqslant D(ABC).$$

LEMA III. *Sean dados dos triángulos rectángulos ABC y A'B'C', tales que los catetos AC y BC del triángulo ABC son mayores que los catetos A'C' y B'C' res-*

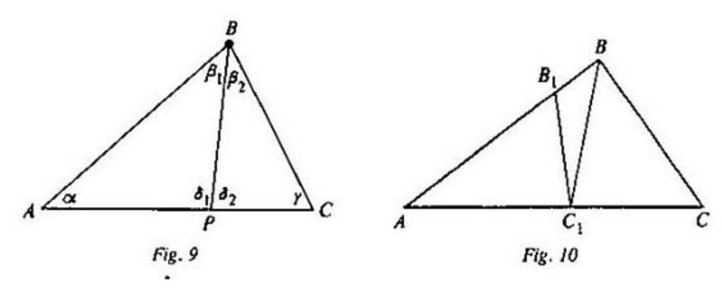


Fig. 9 Fig. 10

pectivamente. Entonces, si la suma de los ángulos internos del triángulo ABC es igual a dos rectos, también lo será la suma de los ángulos internos de $A'B'C'$.

Para probar esto, traslademos $A'B'C'$ hasta que su vértice C' coincida con C, el cateto $A'C'$ esté sobre el AC, y el $B'C'$, sobre el cateto BC del triángulo ABC. Entonces, en virtud del lema precedente,

$$D(A'B'C') \leqslant D(ABC).$$

Pero como hemos adoptado $D(ABC) = 0$ y, por la proposición II, $D(A'B'C') \geqslant 0$, de la desigualdad de arriba se deduce que $D(A'B'C') = 0$, lo cual deseábamos demostrar.

LEMA IV. *Si la suma de los ángulos internos de cierto triángulo rectángulo es igual a dos rectos, también lo será la de cualquier otro triángulo rectángulo.*

Consideremos dos triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$. Supongamos que la suma de los ángulos del triángulo ABC es igual a dos rectos. Demostremos que también lo será la suma de los ángulos de $A'B'C'$. Si los catetos AC y BC del primer triángulo son respectivamente mayores que los catetos $A'C'$ y $B'C'$ del segundo, la afirmación es confirmada por el lema III. Si al menos uno de los catetos de ABC es más corto que un cateto de $A'B'C'$, para probar el lema mostremos que se puede construir un nuevo triángulo rectángulo cuya suma de los ángulos sea, como la de ABC, igual a dos rectos, y cuyos catetos sean arbitrariamente grandes. Con este fin, sobrepongamos al triángulo ABC otro igual a él, de forma que su hipotenusa coincida con la de ABC y que en el cuadrilátero así obtenido los lados iguales resulten opuestos. Denotemos por D el vértice del ángulo recto del nuevo triángulo (fig. 11). Como la suma de los ángulos internos de cada uno de los triángulos rectángulos ABC y ABD es igual a dos rectos, resulta evidente que todos los ángulos internos del cuadrilátero $ACBD$ serán rectos.

Desplazando $ABCD$, podemos «pavimentar» el plano con rectángulos iguales, tal como se muestra en la fig. 11.

Es fácil ver que la parte del plano indicada en esta figura representa un rectángulo. Dividiéndolo por medio de una diagonal, obtenemos dos triángulos rectángulos iguales, cuya suma de ángulos internos es igual a dos rectos. Los catetos de estos triángulos, evidentemente, pueden hacerse tan largos como se desee *).

Resulta así posible construir un triángulo rectángulo cuya suma de ángulos sea de dos rectos, y cuyos catetos sean mayores que los del triángulo rectángulo

*) Aquí se utiliza el axioma de Arquímedes (véase el § 4).

$A'B'C'$. De aquí y del lema III sigue que la suma de los ángulos del triángulo rectángulo (arbitrario) $A'B'C'$ es igual a dos rectos.

Ahora, utilizando el último lema, estamos en condiciones de probar la proposición enunciada más arriba.

PROPOSICIÓN III. *Si la suma de los ángulos de al menos un triángulo es igual a dos rectos, también lo será la de cualquier otro triángulo.*

Sean dados los triángulos ABC, $A'B'C'$, y se sabe que la suma de los ángulos de ABC es igual a dos rectos. Mostremos que la suma de los ángulos de $A'B'C'$ también será de dos rectos.

Tracemos las alturas de los dos triángulos dados. Cada uno de ellos tendrá al menos un vértice tal que la altura trazada por el mismo caerá dentro del lado opuesto. Sin restricción de la generalidad, podemos suponer que tal vértice es A para el triángulo ABC y A' para el $A'B'C'$ (esto siempre puede conseguirse escogiendo adecuadamente la notación).

Sea P el pie de la altura del triángulo ABC correspondiente al vértice A, y P', el de la altura de $A'B'C'$ que corresponde a A'. Según el lema II,

$$D(ABP) \leqslant D(ABC);$$

por hipótesis, $D(ABC) = 0$, y como, en virtud de la proposición II, $D(ABP) \geqslant 0$, concluimos que $D(ABP) = 0$.

Así, pues, la suma de los ángulos del triángulo rectángulo ABP es igual a dos rectos. Entonces, por el lema IV, cada triángulo rectángulo tendrá suma de ángulos igual a dos rectos. Pero, según el lema I,

$$D(A'B'C') = D(A'B'P') + D(B'P'C');$$

como los triángulos $A'B'P'$ y $B'P'C'$ son rectángulos, de lo que acabamos de demostrar se desprende que $D(A'B'P') = 0$ y $D(B'P'C') = 0$.

Por ende, $D(A'B'C') = 0$ y, en consecuencia, la suma de los ángulos internos de $A'B'C'$ es igual a dos rectos. La proposición queda así demostrada.

Una vez establecidas las proposiciones I — III, se puede intentar probar que existe al menos un triángulo cuya suma de ángulos internos es igual a dos rectos. Si pudiese hacerse esto, entonces, en virtud de la proposición III, cada triángulo tendría la suma de sus ángulos internos igual a dos rectos y, por la proposición I, se verificaría el V postulado.

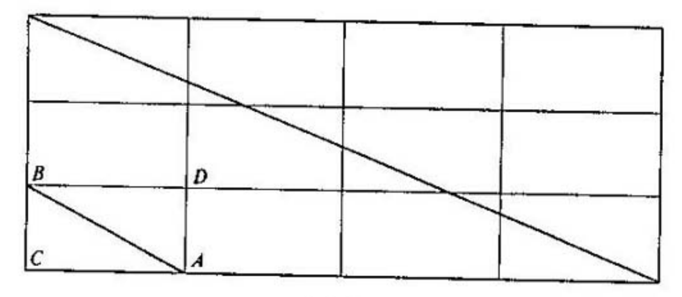


Fig. 11

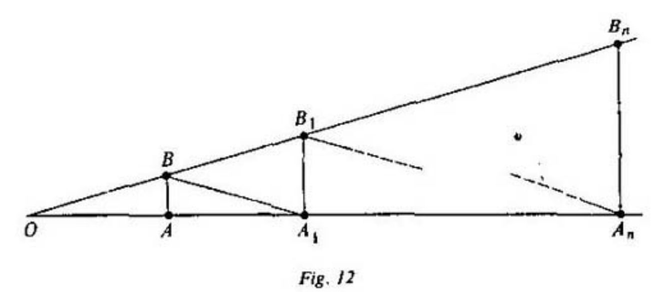


Fig. 12

He aquí un ejemplo de una pseudo-demostración.

Sea dado un ángulo agudo arbitrario con vértice en el punto O (fig. 12). Tomemos en uno de sus lados un punto B, y tracemos por él la perpendicular BA al otro lado. Según la proposición II, la suma de los ángulos del triángulo OAB no supera dos rectos, es decir, $D(OAB) \geqslant 0$.

Para conseguir nuestro objetivo basta mostrar que no puede ser $D(OAB) > 0$.

Admitiendo lo contrario, pongamos $D(OAB) = \varepsilon > 0$. Determinemos sobre el lado OA de nuestro ángulo el punto A_1 de forma que sea $OA = AA_1$. Unamos el punto B con el punto A_1 y levantemos por A_1 la perpendicular a la recta OA. Denotemos por B_1 el punto de intersección de esta perpendicular con la recta OB. En virtud del lema I,

$$D(OA_1B_1) = D(OAB) + D(BAA_1) + D(BA_1B_1).$$

Pero es fácil ver que el triángulo OAB es igual al BAA_1 y, en consecuencia,

$$D(OAB) = D(BAA_1) = \varepsilon.$$

De aquí y de la igualdad precedente sigue que

$$D(OA_1B_1) \geqslant 2\varepsilon.$$

Fijemos ahora sobre el lado OA el punto A_2, de forma que sea $OA_1 = A_1A_2$. Levantemos por A_2 la perpendicular a OA y denotemos por B_2 el punto de intersección de ésta con OB. Por razonamientos análogos a los precedentes se concluye que

$$D(OA_2B_2) \geqslant 4\varepsilon.$$

Continuando este proceso, obtendremos un triángulo OA_nB_n, cuyo defecto satisfará la desigualdad $D(OA_nB_n) \geqslant 2^n\varepsilon$. Escogiendo n suficientemente grande, podremos satisfacer la desigualdad $2^n\varepsilon > \pi$. Sin embargo, el significado mismo de la definición de defecto de un triángulo nos dice que éste no puede ser mayor que π.

Así, pues, al admitir que $\varepsilon > 0$, hemos llegado a una contradicción. Queda entonces establecido que el defecto del triángulo OAB es igual a 0, es decir, que la suma de los ángulos de este triángulo es igual a dos rectos. Con esto hemos probado, asimismo, el V postulado.

No es difícil percibir el punto débil de este razonamiento. Precisamente, el razonamiento sería totalmente riguroso, si se probase que las perpendiculares a la recta OA levantadas en todos los puntos A_1, A_2, etc. deben encontrar a la recta OB. No-

sotros, en cambio, hemos utilizado los puntos B_1, B_2, etc. sin establecer su existencia, confiados en la evidencia.

Un análisis detalladó revela que no se puede hacer la demostración de la existencia de los puntos B_1, B_2, etc. sin recurrir al V postulado (esto lo discutiremos en detalle más tarde).

De este modo, el razonamiento efectuado sólo descubre un nuevo equivalente del V postulado. Por cuanto este resultado será esencial en lo sucesivo, lo enunciaremos como una proposición particular.

PROPOSICIÓN IV. *Si existe un ángulo agudo tal que la perpendicular levantada en cualquier punto de uno de sus lados corta al otro lado, entonces tiene lugar el V postulado.*

Es fácil percibir una relación estrecha entre los razonamientos de Legendre y los de Saccheri y Lambert.

En efecto, las tres hipótesis de Legendre sobre los posibles valores de la suma de los ángulos de un triángulo corresponden a las hipótesis del ángulo obtuso, del recto y del agudo de Saccheri.

Si se acepta la hipótesis del ángulo obtuso, para algún cuadrilátero de Saccheri, entonces, dividiéndolo por medio de una diagonal, obtendremos dos triángulos, de los cuales al menos uno tendrá la suma de sus ángulos mayor que dos rectos. Y, recíprocamente, si asumimos que la suma de los ángulos de algún triángulo es mayor que dos rectos, habrá que aceptar la hipótesis de Saccheri del ángulo obtuso.

La proposición II viene a expresar así EL CARÁCTER CONTRADICTORIO DE LA HIPÓTESIS DEL ÁNGULO OBTUSO.

Si suponemos que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos, resulta evidente que para cada cuadrilátero de Saccheri habrá que aceptar la hipótesis del ángulo agudo. Y recíprocamente si aceptamos la hipótesis del ángulo agudo al menos para algún cuadrilátero de Saccheri, entonces, dividiéndolo por una diagonal en dos triángulos, nos encontraremos con que al menos uno de ellos tiene la suma de sus ángulos menor que dos rectos. Pero entonces, como se ve de los razonamientos precedentes, cada triángulo tendrá la suma de sus ángulos menor que dos rectos y, consecuentemente, los ángulos de la base superior de cada cuadrilátero de Saccheri serán agudos.

Podemos, pues, afirmar que vale la

PROPOSICIÓN V. *Si se acepta la hipótesis del ángulo agudo para un cuadrilátero de Saccheri, será necesario aceptarla para todo otro cuadrilátero de Saccheri.*

Por último, se establece directamente que *la hipótesis del ángulo recto de Saccheri y la suposición de Legendre sobre la existencia de un triángulo cuya suma de ángulos sea igual a dos rectos, son en igual grado equivalentes al V postulado.*

A pesar de sus múltiples intentos, Legendre no logró demostrar que no existe ningún triángulo cuya suma de sus ángulos sea menor que dos rectos, así como Saccheri tampoco consiguió llevar a una contradicción la hipótesis del ángulo agudo. Con todo, en la construcción de un sistema de corolarios de las hipótesis que rechazan el V postulado, Saccheri y Lambert fueron mucho más lejos que Legendre.

Cabe observar que las proposiciones I — III eran conocidas ya antes de Legendre. En todo caso, tanto Saccheri como Lambert conocían bien la dependencia

existente entre el V postulado y la afirmación de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

Las proposiciones I — III están relacionadas con el nombre de Legendre por pura tradición, pues fue él quien las enunció de manera particularmente clara, y éstas se hicieron conocidas gracias precisamente a sus trabajos.

3. N. I. Lobachevski y su geometría

§ 9. Hasta principios del siglo XIX, ningún intento de demostrar el V postulado fue coronado por el éxito. A pesar de los esfuerzos dedicados por los geómetras durante más de veinte siglos, el problema de fundamentación de la teoría de las paralelas se hallaba, en esencia, en el mismo nivel que en los tiempos de Euclides.

Pero ya las primeras décadas del siglo XIX trajeron, al fin, la solución del problema del V postulado; sólo que esta solución resultó ser tal que el mundo matemático de la época ni la esperaba ni estaba preparado para ella.

Los laureles de la resolución de este famoso problema pertenecen al profesor de la Universidad de Kazán, Nikolai Ivánovich Lobachevski (1793—1856). En su informe a la Facultad de Física y Matemáticas de la Universidad de Kazán (del 11 de febrero de 1826, según el calendario juliano vigente entonces en Rusia) y en las obras*) publicadas a partir de 1829, por primera vez fue formulada de manera precisa y confirmada la idea de que *el V postulado no puede ser deducido de los restantes postulados de la geometría*. A fin de probar esto, Lobachevski, conservando las premisas básicas de Euclides, a excepción del postulado del paralelismo, admite que dicho postulado no tiene lugar, y construye un sistema lógico cuyas proposiciones son consecuencias de las premisas aceptadas.

Muchas de las proposiciones obtenidas por Lobachevski se encontraban en los trabajos de Saccheri y Lambert que desarrollaban la hipótesis del ángulo agudo. Esto es comprensible, pues la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri y las premisas básicas de Lobachevski son equivalentes. Pero mientras Saccheri se propuso mostrar que la hipótesis del ángulo agudo conduce a una contradicción y debe ser descartada por inadmisible desde el punto de vista lógico, Lobachevski, al desarrollar el sistema de sus teoremas, establece que éste representa una nueva geometría (la llamó «Imaginaria»), la cual, como la euclidiana, no contiene contradicciones lógicas.

Lobachevski desarrolló la geometría imaginaria hasta llevarla al mismo nivel en que se encontraba la de Euclides. En todo esto Lobachevski no encontró contradicción lógica alguna. Sin embargo, él comprendía perfectamente que esto todavía no demuestra que la geometría imaginaria es efectivamente no contradictoria pues si existen contradicciones, es imposible prever de antemano en qué nivel del desarrollo del sistema éstas pueden aparecer. A fin de demostrar la consistencia de su geometría, Lobachevski realizó un análisis algebraico profundo de sus ecuaciones básicas y dio así una solución de este problema, satisfactoria en la medida en que era posible en aquel tiempo.

---

*) Véanse N. I. Lobachevski, Obras Completas (Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений, Гостехиздат, М. — Л., 1951). El lector puede encontrar detalles sobre la vida y obra de N. I. Lobachevski en el libro de V. F. Kagan «Lobachevski», Editorial «Mir», 1985.

La demostración de la consistencia de la geometría de Lobachevski a un nivel moderno de rigor fue hecha en el siglo XIX, después de establecidos los principios generales de la fundamentación lógica de la geometría.

Los resultados de las investigaciones de Lobachevski pueden resumirse como sigue:

1. *El postulado de las paralelas no es consecuencia necesaria de los restantes postulados de la geometría (como decimos, no depende lógicamente de ellos).*

2. *El V postulado no se desprende de los demás, precisamente porque conjuntamente con la geometría de Euclides, en la cual dicho postulado se acepta como verdadero, es posible otra geometría, «imaginaria», en la cual el V postulado no tiene lugar.*

Lobachevski era un científico materialista; en sus obras expresaba sus puntos de vista materialistas en forma explícita y perseverante. Él rechazaba de plano la posibilidad de conocimientos a priori y, en particular, la tesis kantiana de que nuestras representaciones espaciales son innatas y no tienen un origen empírico. «Los conceptos primarios, a partir de los cuales se desarrolla una ciencia —escribe Lobachevski— deben ser claros y reducidos a la mínima cantidad. Sólo entonces éstos pueden proporcionar una base sólida y suficiente para la teoría. Tales conceptos se adquieren por medio de los sentidos; los conceptos innatos son inaceptables» («Acerca de los principios de la geometría», 1829).

Lobachevski comprendía de manera profunda y fina la relación entre la geometría de Euclides y su geometría no euclidiana: ambas son lógicamente no contradictorias y por esto están destinadas al fracaso todas las tentativas de demostrar desde un punto de vista lógico que sólo la primera es la única verdadera; ahora bien, el problema de cuál de estas geometrías corresponde mejor a las propiedades del espacio real, es algo que debe decidirse experimentalmente.

«En mi obra sobre los principios de la geometría —escribe Lobachevski— demostré, basándome en algunas observaciones astronómicas, que en un triángulo cuyos lados son del orden de la distancia de la Tierra al Sol, la suma de los ángulos puede diferir de dos rectos en no más de 0″,0003, en segundos sexagesimales de grado. La suposición de la Geometría usual debe, por consiguiente, considerarse como demostrada rigurosamente y, al mismo tiempo, debe llegarse a la convicción de que, sin recurrir a la experiencia, sería estéril buscar demostraciones de una verdad que todavía no se encuentra dentro de nuestra concepción de los cuerpos» («*Geometría imaginaria*», 1835).

Lobachevski llamaba «usual» a la geometría de Euclides, e «imaginaria» a la suya. Esto, sin embargo, no significa que considerase a su geometría como un sistema cerrado, puramente lógico. Por el contrario, veía en ella un instumento útil para el análisis matemático, y fue en este plano quien escribió el extenso trabajo «*Aplicación de la geometría imaginaria a algunas integrales*» (1836). Es interesante destacar que en las tablas de integrales definidas de Bierens de Haan (cuya impresión comenzó aún en vida de Lobachevski, en 1853, y culminó en 1858) hay más de 200 integrales que fueron calculadas y publicadas por Lobachevski *). En la actualidad se cono-

*) Para más detalles, véanse las Obras Completas de Lobachevski, t. 3, pág. 413. (Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, Гостехиздат, М. — Л., 1951).

cen relaciones profundas entre la geometría de Lobachevski y diversas ramas de la matemática y de la física teórica.

Las ideas de Lobachevski parecían paradójicas a los geómetras de su época, y siempre fueron recibidas con ironía. Muy pocos estaban en condiciones de comprender y apreciar sus trabajos; entre éstos, deben ser destacados C. F. Gauss y J. Bolyai, que trabajaban en la teoría de las paralelas en forma independiente entre sí y con respecto a Lobachevski. Gauss tenía clara la idea de una nueva geometría; sin embargo, no la desarrolló suficientemente, dejando sólo esbozos de algunos teoremas más elementales. Ni siquiera llegó a publicar sus puntos de vista sobre los fundamentos de la geometría, por temor a ser incomprendido. J. Bolyai editó su trabajo tres años después de la primera publicación de Lobachevski (ignorando su existencia). En él, J. Bolyai expuso la misma teoría que Lobachevski, pero en forma menos desarrollada. Al igual que Lobachevski, Bolyai no obtuvo reconocimiento, careciendo él mismo de apoyo.

El mundo científico supo apreciar el significado de las investigaciones de Lobachevski sólo después de su muerte; este significado es, en verdad, excepcional.

Antes de Lobachevski, la geometría euclidiana se consideraba la única teoría imaginable del espacio. El descubrimiento de la geometría imaginaria —o, como se la llama comúnmente, no euclidiana— destruyó este punto de vista. Esto marcó el comienzo de profundas generalizaciones de los enfoques de la geometría y su finalidad, que condujeron al concepto moderno de espacio abstracto con sus múltiples aplicaciones en la propia matemática y en disciplinas afines.

La geometría no euclidiana de Lobachevski fue el primero y decisivo eslabón en esta cadena de generalizaciones.

4. Formación del concepto de espacio geométrico

§ 10. Sabemos cuán fructífero para las matemáticas fue el período helenístico. Los grandes científicos de la Grecia Antigua enriquecieron la ciencia matemática con muchos importantes resultados y crearon métodos para su sistematización lógica. Después de los griegos, un gran aporte al desarrollo de las matemáticas fue realizado por los pueblos de la India, de los países del califato árabe y particularmente (del siglo IX al XV) por los pueblos del Asia Media y los transcaucasianos, que desarrollaron los elementos del álgebra y la trigonometría plana. Después, el siglo XVI trajo consigo un método esencialmente nuevo de resolución de problemas matemáticos utilizando letras como símbolos. La creación del álgebra simbólica fue en verdad un suceso de importancia primordial, sin el cual habrían sido imposibles los progresos ulteriores. Los dos siglos siguientes —el XVII y particularmente el XVIII— se distinguieron por un trabajo muy intenso del pensamiento matemático y por la formulación de teorías matemáticas nuevas. En esta época fueron creados los cálculos diferencial e integral, la invención de la geometría analítica abrió el camino a la aplicación del álgebra y el análisis a la resolución de problemas geométricos, así como también de numerosos problemas de la mecánica y la astronomía.

Sin embargo, los enfoques del espacio geométrico y de los conceptos que forman la base de la geometría, se encontraban esencialmente iguales que en la época de Euclides. Sólo como resultado de los notables progresos del siglo XIX se alcanzó la

claridad y, con ella, la amplitud de la concepción de la geometría y de los objetos geométricos, que caracterizan a la matemática moderna y la diferencian radicalmente de la matemática de los tiempos antiguos.

En el siglo XIX se desarrollaron activamente muchas disciplinas geométricas. Destacaremos las tres más importantes: los fundamentos de la geometría, la geometría diferencial y la geometría proyectiva. Los caminos por que se desarrollaron estaban inicialmente muy alejados entre sí, pero a fines del siglo estas disciplinas se aproximaron en grado sumo, uniéndose en algunas partes, hasta que su síntesis iluminó de manera clara y completa toda una serie de viejos problemas de la geometría, y descubrió toda una problemática nueva, que se sigue desarrollando aún hoy.

Los fundamentos de la geometría tienen dos objetivos principales: 1) la construcción lógica de la geometría a base de algunas pocas premisas, llamadas axiomas; 2) el estudio de la interdependencia lógica entre distintas proposiciones geométricas. Como ya sabemos, estos problemas parten de Euclides, cuya famosa obra es la primera que conocemos dedicada a los fundamentos de la geometría.

Las investigaciones dedicadas a la demostración del V postulado también deben ser referidas a los fundamentos de la geometría, pues tenían por finalidad establecer la dependencia del V postulado con respecto a otros postulados geométricos. Lobachevski, al establecer la independencia del V postulado, proporcionó el primer resultado fundamental en este campo. Es más, al construir un sistema geométrico diferente del euclidiano, Lobachevski amplió la comprensión del propio significado de la geometría y, por ende, de los problemas de su fundamentación.

Un importante resultado en esta dirección fue obtenido luego por B. Riemann, quien en su trabajo «Sobre las hipótesis que se hallan en la base de la geometría» (de 1854) [*], al desarrollar los principios analíticos de la geometría obtuvo, en particular, un sistema geométrico que difería tanto del euclidiano como del de Lobachevski. En la geometría de Riemann, una recta se determina por dos puntos; un plano, por tres; dos planos se intersecan según una recta,etc., pero por un punto dado no se puede trazar ninguna paralela a una recta dada. En particular, en esta geometría vale el teorema: la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos. Ya sabemos que si se conservan todas las premisas de Euclides, excepción hecha del postulado sobre las paralelas, las dos últimas afirmaciones deben rechazarse por contradictorias (véanse los § § 5 — 8). En consecuencia, Riemann, al desarrollar su sistema, debió alterar la axiomática euclidiana aún más que Lobachevski.

Vemos, así, que à mediados del siglo XIX los fundamentos de la geometría recibieron un impulso muy significativo. Sin embargo, tampoco en esta época fue resuelto el problema de una construcción lógica rigurosa de la geometría.

A fines de los años 60, cuando las ideas de Lobachevski fueron reconocidas, el problema de dar una construcción lógica de la geometría fue puesto sobre el tapete. Su resolución era, en particular, necesaria para que quedaran totalmente claros los

---

[*] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Abh. der Königlichen Ges. der Wiss. zu Götingen, 13, 1866. Hay traducción al español en el apéndice del libro «Estado actual, métodos y problemas de la geometría diferencial», Edit. Vidal Abascal, Madrid, 1958.

resultados de Lobachevski. En efecto, su resultado básico acerca de la independencia del V postulado de los demás postulados de la geometría, no sólo no podía ser demostrado con todo rigor, sino que tampoco podía darse por formulado en forma precisa, mientras no se conocieran todos los postulados geométricos.

A fines del siglo XIX se publicaron varios trabajos sobre este problema, pertenecientes a matemáticos de primera línea. La más famosa fue la obra de D. Hilbert «Fundamentos de la geometría», publicada en 1899, y que obtuvo en 1903 el premio internacional N. I. Lobachevski.

En su libro, Hilbert enuncia un sistema completo de axiomas de la geometría euclidiana, es decir, una lista de premisas básicas de las cuales se pueden obtener todos los demás resultados de esta geometría, por medio de deducciones lógicas *). Hilbert establece, asimismo, la independencia de los axiomas más importantes de su sistema, con respecto a los restantes, contenidos en éste.

En los próximos capítulos de nuestro libro se expone la lista de los axiomas de Hilbert y se discuten sus relaciones mutuas. Ahora nos detendremos en analizar el punto de vista particular con que se consideran hoy en día los conceptos geométricos básicos y los axiomas de la geometría.

A diferencia de los «Elementos» de Euclides, en las listas modernas de axiomas de la geometría euclidiana no hay descripciones de los objetos geométricos. Se supone únicamente que existen tres grupos de objetos, llamados «puntos», «rectas» y «planos», con respecto a los cuales se verifican ciertas condiciones muy precisas.

Tales condiciones son:

1. Entre los objetos denominados puntos, rectas y planos, así como también entre algunos conjuntos de estos objetos (segmentos, ángulos) deben existir determinadas relaciones, que se denotan por los términos «pertenece a», «entre», «congruentes».

2. Las relaciones indicadas deben satisfacer las condiciones enumeradas en los axiomas que siguen a continuación.

Es claro que los axiomas se componen tomando en estricta consideración el material empírico acumulado por la geometría, y de modo que este material pueda ser deducido de ellos por medio de razonamientos lógicos. Pero los objetos a que se refieren los axiomas no deben, forzosamente, ser de alguna naturaleza especial ni, digamos, poseer algún aspecto exterior determinado. Las relaciones entre estos objetos tampoco están obligadas a tener algún carácter especial. Tanto unos como otras pueden ser escogidas de manera arbitraria, siempre que se verifiquen las condiciones impuestas por los axiomas. Tal enfoque de la geometría y sus objetos obedece a dos circunstancias:

1. La geometría opera con conceptos que surgen de la experiencia, como resultado de una determinada abstracción de objetos del mundo real, en la cual se toman en consideración sólo algunas propiedades de estos objetos reales; en los razonamientos rigurosamente lógicos efectuados al demostrar los teoremas, hay que tratar únicamente con estas propiedades de los objetos las cuales son precisamente

*) Otros autores anteriores a Hilbert también confeccionaron listas completas de axiomas de la geometría euclidiana, por ejemplo, M. Pasch (en 1882); pero la lista de Hilbert resultó considerablemente más sencilla que las precedentes.

aquellas que deben ser destacadas en los axiomas y definiciones; las demás propiedades que estamos acostumbrados a imaginar cuando oímos las palabras «punto», «recta», «plano», no desempeñan ningún papel en la construcción lógica de la geometría y no deben ser mencionadas en las premisas básicas de esta ciencia.

2. Además de la geometría euclidiana, cuyos teoremas corresponden a nuestra idea intuitiva de las propiedades de las imágenes geométricas, existen otros sistemas geométricos (el de Lobachevski, el de Riemann), que contradicen la intuición espacial directa. Por esto, en un planteo suficientemente general del problema de fundamentación de la geometría, el propio concepto de objetos geométricos debe ser tan general que pueda ser aplicado a todos los casos necesarios.

De acuerdo con lo que acabamos de exponer, se puede decir que el espacio geométrico determinado por un sistema dado de axiomas, es el conjunto de objetos, llamados elementos geométricos, cuyas relaciones mutuas satisfacen las condiciones enunciadas en los axiomas del sistema dado.

Así, podemos hablar del espacio de Euclides, entendiendo por esto una colección de elementos sujetos a las condiciones indicadas en los axiomas de la geometría de Euclides, o bien pensar en el espacio de Lobachevski como una colección de elementos sometidos a los axiomas de la geometría de Lobachevski.

Pero el propio espacio de Euclides, por ejemplo, puede tener infinitas formas diferentes, según cuáles sean los objetos concretos que se consideran como sus elementos. Por ejemplo, además de nuestras ideas habituales de puntos, rectas y planos, podemos convenir en llamar «punto» a cualquier esfera de diámetro fijo d, «recta», a cualquier cilindro circular infinito del mismo diámetro d, «plano», a cada porción de espacio comprendida entre dos planos paralelos habituales que distan d uno del otro. Las relaciones básicas entre estos objetos pueden definirse como sigue. Convendremos en decir que el «punto», representado como la esfera A, PERTENECE a la «recta» representada por el cilindro circular a, si la esfera A está inscrita en el cilindro a; diremos que el «punto», pensado como la esfera A, pertenece al «plano» representado por la faja espacial α, si la esfera A es tangente a los dos planos paralelos habituales que delimitan dicha faja. Diremos que el «punto» B se encuentra en la «recta» a entre los «puntos» A y C, si el centro de la esfera que representa al punto B se encuentra entre los centros de las esferas que representan a A y a C. Por último, convendremos en decir que la figura M ES IGUAL A, O CONGRUENTE CON, la figura N, si M puede ser superpuesto a N por medio de algún movimiento (las figuras M y N se suponen formadas por «puntos», «rectas» y «planos» en el sentido que les estamos confiriendo ahora). Las relaciones indicadas entre los objetos considerados satisfacen todos los axiomas de la geometría euclidiana. Por esto, cada teorema que se pueda deducir de manera lógica de éstos, expresa cierto hecho que corresponde a los «puntos», «rectas» y «planos» que acabamos de describir. El conjunto de tales «puntos», «rectas» y «planos» con las relaciones mutuas que hemos indicado, representa así una de las formas concretas posibles del espacio de Euclides.

Si elegimos como puntos, rectas y planos otros objetos y definimos sus relaciones mutuas de modo que se cumplan los axiomas de la geometría euclidiana, obtendremos otras formas concretas del espacio de Euclides. A cada forma concreta del espacio euclidiano le corresponde una interpretación concreta de los teoremas euclidianos. Naturalmente, también la geometría de Lobachevski admite diversas

interpretaciones concretas, así como cualquier otro sistema basado en axiomas (véanse los §§ 49 — 61, 67, 168 — 171).

Entonces, al eliminar de la geometría toda referencia a la clara evidencia y al dejar sólo su esqueleto lógico, obtenemos la oportunidad de rellenarlo con distintos materiales concretos. Por lo tanto, en una construcción lógica abstracta de la geometría, no sólo no se pierde la base real, sino que se amplía la posibilidad de las aplicaciones geométricas.

Ahora es sumamente importante destacar lo siguiente: el amplio enfoque de los elementos y axiomas geométricos que acabamos de exponer, abre la posibilidad de escoger el propio sistema de axiomas con alto grado de arbitrariedad, adaptando esta elección a uno u otro tópico concreto que se desea someter a estudio. Por esta vía, el método axiomático se traslada de la geometría a otras ramas de las matemáticas, a la mecánica y a la física, y conduce a los espacios abstractos modernos, cuyos elementos son conjuntos, funciones, transformaciones, etc. Como ejemplo de las aplicaciones de las ideas geométricas generales, se puede citar el espacio de Minkowski, que desempeña un papel importante en la teoría especial de la relatividad.

La idea de espacio abstracto fue preparada por la evolución de toda la matemática del siglo XIX. Dentro de la problemática de los fundamentos de la geometría, esta idea tuvo por fuente directa el descubrimiento de Lobachevski. Pero este descubrimiento tuvo influencia decisiva en el desarrollo de los conceptos geométricos también a través de otras disciplinas.

La consolidación de las ideas modernas del espacio geométrico fue determinada en gran medida por el desarrollo de la geometría diferencial. En la memoria de Gauss «Investigaciones generales sobre las superficies curvas» (1827) se destacan algunas propiedades particulares de una superficie, que constituyen su geometría interna. Se trata de aquellas propiedades que pueden ser establecidas por medio de mediciones que se efectúan dentro de la propia superficie (la fuente práctica de las ideas de la geometría interna fue la geodesia).

En 1868 apareció la obra de Beltrami «Experiencia de la interpretación de la geometría no euclidiana», en la cual el autor mostró que la planimetría de Lobachevski puede considerarse, bajo ciertas restricciones, como la geometría interna de una cierta superficie. Con esto, la planimetría no euclidiana, conjuntamente con la de Euclides, quedaron incluidas en un dominio totalmente concreto de la teoría de superficies.

La intersección de las investigaciones axiomáticas de Lobachevski con los métodos geométrico-diferenciales de Gauss, aún en el marco bidimensional, contribuyó en alto grado a la generalización de los conceptos geométricos. Por cierto, ya en el nivel en que se hallaba entonces la matemática, la aplicación de los métodos geométrico-diferenciales al estudio de la geometría no euclidiana no podía limitarse al caso bidimensional. Ya en 1854, en la obra citada de Riemann «Sobre las hipótesis que se hallan en la base de la geometría» se definieron espacios que generalizan tanto el euclídeo como el de Lobachevski, así como también el espacio correspondiente a la geometría de Riemann que hemos mencionado al comienzo de esta reseña. Estos espacios generales de Riemann se diferencian del euclidiano en el mismo grado que una superficie curva arbitraria se diferencia del plano.

El método puramente analítico que utilizó Riemann para enfocar los problemas geométricos, le permitió generalizar el concepto de curvatura de una vez al caso

multidimensional. Los espacios generales de Riemann resultaron de utilidad para la física teórica, y son objeto de estudios intensos aún hoy.

Aproximadamente en la misma época en que Lobachevski comenzó sus estudios sobre las paralelas y en que nació la teoría de Gauss de las superficies, surgió una nueva disciplina matemática: la geometría proyectiva. Teniendo por campo de operaciones un material bien palpable, la geometría proyectiva parecía al principio muy alejada de los complejos problemas de la axiomática. Pero en la década del 70, F. Klein propuso una interpretación general de los sistemas geométricos de Euclides, Lobachevski y Riemann, basada en la geometría proyectiva. (Aquí utilizó Klein resultados obtenidos anteriormente por el matemático Cayley). Esta investigación de Klein se halla en estrecha conexión con su concepción de la geometría como la teoría de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones. Este enfoque de teoría de grupos de la esencia de la geometría, enunciado por Klein en su disertación «Reseña comparativa de las más recientes investigaciones geométricas», que figura en la historia de la ciencia bajo el nombre de «Programa de Erlangen» (1872), permitió establecer una determinada clasificación de los sistemas geométricos más importantes y las variedades que estos estudian.

El material del presente libro está dispuesto de acuerdo con las tres direcciones indicadas, en que se desarrolló en el siglo XIX el concepto de espacio geométrico.

Los capítulos II, III y IV están consagrados a problemas de carácter puramente axiomático.

En los capítulos V y VI se expone la geometría proyectiva y la clasificación de los sistemas geométricos desde el punto de vista de la teoría de grupos.

El capítulo VII se relaciona en parte con los dos anteriores; aquí se estudia el espacio de Minkowski.

En los capítulos VIII y IX se expone el estudio de sistemas geométricos mediante métodos de la geometría diferencial.

Capítulo II

AXIOMAS

DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL

1. Elementos geométricos

En este capítulo se exponen lox axiomas de Hilbert *). Conjuntamente con ellos, se citan los teoremas principales, de forma que queden suficientemente en claro los principios generales que guían el desarrollo lógico de la geometría.

§ 11. En adelante consideraremos tres conjuntos diferentes de objetos; los objetos del PRIMER conjunto se denominan *puntos*, los del SEGUNDO, *rectas* y los del TERCERO, *planos*. El conjunto de todos los puntos, rectas y planos se denomina *espacio*.

Los puntos, las rectas y los planos pueden estar relacionados unos con otros de una manera determinada, que se indica por las palabras «pertenece a», «entre», «congruentes». Estas relaciones deben satisfacer las condiciones contenidas en *los axiomas* que se enumeran a continuación; por lo demás, la naturaleza de los objetos y de las relaciones entre ellos puede ser arbitraria.

Todos los axiomas se dividen en cinco grupos **).

El grupo I contiene ocho axiomas de incidencia.

El II contiene cuatro axiomas de orden.

El III, cinco axiomas de congruencia.

El IV, dos axiomas de continuidad.

El V, un axioma de paralelismo.

2. Grupo I. Axiomas de incidencia

§ 12. Suponemos que las rectas y los planos pueden encontrarse en determinadas relaciones con los puntos. Si la recta a y el punto A se corresponden, diremos también que «a pasa por A»; «A se encuentra en a»; «A es un punto de la recta a»; «A pertenece a la recta a»; «la recta a pertenece al punto A». Si al punto A le corresponden varias rectas, diremos también que estas «rectas se cortan en el punto A», o

*) Los axiomas de Hilbert fueron tomados de la séptima edición de su libro: D. Hilbert, *Grundlugen der Geometrie*, Siebente Auflage, Lpz. — Berl., 1930.

**) En la numeración de los grupos nos hemos apartado un tanto de la exposición de Hilbert, en la cual el axioma de paralelismo constituye el cuarto grupo, y los de continuidad, el quinto.

bien que «las rectas tienen el punto común A». Si a la recta a se la han puesto en correspondencia dos puntos A, B, diremos que «la recta a une los puntos A, B», o bien que «a pasa por A y B», etc. Las condiciones que debe satisfacer esta relación se expresan en los axiomas I, 1 — I,8.

I,1. *Cualesquiera que sean los puntos A, B, existe una recta a que pasa por cada uno de los puntos A, B.*

I,2. *Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A, B, existe a lo sumo una recta que pasa por cada uno de los puntos A, B.*

Estos dos axiomas pueden resumirse como sigue: dos puntos diferentes determinan una y sólo una recta que pasa por ellos.

I,3. *En cada recta hay al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.*

Con respecto al punto A y al plano α que se hallen en correspondencia, utilizaremos también las expresiones: «A pertenece a α»; «A es un punto del plano α»; «α pasa por A», etc.

I,4. *Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, existe un plano α que pasa por cada uno de los tres puntos A, B, C. En cada plano hay al menos un punto.*

I,5. *Sean cuales fueren tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, existe a lo sumo un plano que pasa por cada uno de los tres puntos A, B, C.*

I,6. *Si dos puntos diferentes A, B de la recta a pertenecen al plano α, cada punto de la recta a pertenece al plano α.*

En este caso decimos que «la recta a pertenece al plano α»; «el plano α pasa por la recta a», etc.

I,7. *Si dos planos α, β tienen un punto común A, tienen al menos otro punto común B.*

I,8. *Existen al menos cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano.*

En los axiomas de incidencia se hace referencia a relaciones determinadas entre elementos geométricos, que se expresan por los términos «el punto pertenece a la recta», «el plano pasa por el punto», etc. Aquí no se hace ninguna descripción gráfica de las ideas expresadas por estos términos. En los axiomas I,1 — I,8 se describen únicamente propiedades determinadas que serán necesarias al deducir los teoremas ulteriores.

Las exigencias expresadas en los axiomas I,1 y I,2 fueron enunciadas ya por Euclides en su primer postulado y en su IX axioma. En cuanto a la necesidad del axioma I,3 y de la mayoría de los de este grupo, es poco probable que Euclides pudiera observarla.

Claramente, un geómetra que deja en sus razonamientos algún resquicio para la intuición geométrica, no se dedicará a postular que en una recta hay al menos dos puntos, o que existen tres puntos que no pertenecen a una misma recta, etc. Su clara evidencia más bien le dictaría que en una recta existen infinitos puntos. Esto, sin embargo, no debe figurar en los axiomas, pues se demuestra más adelante. Aquí se deja sentir el deseo de reducir los axiomas al mínimo.

Con los axiomas I,1 — I,8 ya se pueden demostrar algunos teoremas, por ejemplo, los siguientes:

TEOREMA 1. *Dos rectas diferentes tienen a lo sumo un punto común; dos planos o bien no tienen puntos comunes, o bien poseen toda una recta común, en la cual se*

encuentran todos los puntos comunes de ambos; un plano y una recta que no le pertenece tienen a lo sumo un punto común.

La demostración de la primera afirmación se obtiene como consecuencia del axioma I,2.

DEMOSTRACIÓN DE LA SEGUNDA AFIRMACIÓN. Supongamos que dos planos α y β tienen un punto común A. Según el axioma I,7, estos planos α y β tienen otro punto común B. La recta a que une A y B está formada, según el axioma I,6, por puntos comunes de los planos α y β, o sea, todo punto perteneciente a a es un punto común de α y β. Pero, además, la recta a contiene todos los puntos comunes de ambos planos. En efecto, supongamos que α y β poseen además un punto común C, que no pertenece a la recta a. Del axioma I,5 sigue entonces que los planos α y β no pueden ser diferentes, pues contienen tres puntos comunes que no están sobre una misma recta.

La demostración de la tercera afirmación se desprende del axioma I,6.

TEOREMA 2. *Por una recta y un punto que no le pertenece, así como también por dos rectas con un punto común, pasa un plano y sólo uno.*

DEMOSTRACIÓN. Sean dados la recta a y el punto A, fuera de ella. Según el axioma I,3, sobre la recta a existen dos puntos B y C. De la hipótesis y del axioma I,2 sigue que los puntos A, B, C no están sobre una misma recta. En virtud del axioma I,4, existe un plano α que pasa por A, B, C. Por el axioma I,6, el plano α pasa por la recta a. No puede haber ningún otro plano que pase por a y A; en efecto, si existiese otro plano α' que pasase por a y A, tendríamos dos planos distintos α y α' que pasarían por A, B, C, lo cual contradice el axioma I,5.

TEOREMA 3. *Cada plano contiene al menos tres puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado un plano α. En virtud del axioma I,4, el plano α contiene algún punto A. Por el axioma I,8, existe un punto B que no pertenece a α. Según el axioma I,3, hay otro punto C que no pertenece a la recta AB. El plano ABC y el plano α tienen el punto común A; del axioma I,7 sigue que estos planos tienen otro punto común D más. De este modo, en el plano α, además del punto A, necesariamente hay segundo punto D. De acuerdo con el axioma I,8, existe un punto E, no perteneciente al plano ABD. Por el axioma I,4, el plano ABE existe, y es diferente de ABD. Recurriendo nuevamente al axioma I,7, concluimos que los planos ABE y α tienen algún punto común F (que además, según el axioma I,6, no está sobre la recta AB). Como D y F no pertenecen a la recta AB, concluimos, en virtud de la segunda afirmación del teorema 1, que estos puntos no pueden ser comunes a los planos ABD y ABF; de aquí sigue que D y F son diferentes. Por ende, en el plano α existen tres puntos: A, D y F.

Hemos hecho estas demostraciones con todo detalle a fin de que el lector pueda formarse una idea de cómo se efectúa el desarrollo lógico de la geometría elemental a base de los axiomas adoptados. En los razonamientos quedan totalmente excluidas las referencias a un dibujo y a la clara evidencia; cada afirmación se fundamenta refiriéndonos bien a los axiomas, bien a los teoremas demostrados con anterioridad.

Los axiomas I,1 — I,8 permiten demostrar sólo algunos resultados geométricos. En particular, éstos todavía no implican que el conjunto de elementos geométricos es infinito (para más detalles, véase el § 70).

3. Grupo II. Axiomas de orden

§ 13. Suponemos que un punto sobre una recta puede encontrarse en determinada relación con otros dos puntos de la misma recta; esta relación se denotará por el término «se encuentra entre».

Esta relación debe verificar los siguientes axiomas.

II,1. *Si el punto B se encuentra entre el punto A y el C, entonces A, B y C son puntos diferentes de una misma recta, y B se encuentra, asimismo, entre C y A.*

II,2. *Cualesquiera que sean los puntos A y C, existe al menos un punto B sobre la recta AC tal que C está entre A y B.*

II,3. *Entre tres puntos cualesquiera de una recta, a lo sumo uno de ellos puede encontrarse entre los otros dos.*

Los axiomas II,1 — II,3 se denominan axiomas de orden lineal.

DEFINICIÓN 1. Un par no ordenado de puntos A y B se llamará *segmento* y se denotará AB, o bien BA. Los puntos que se encuentran entre A y B se llamarán *puntos interiores*, o simplemente *puntos del segmento AB*; los puntos A y B, *extremos del segmento*. Los demás puntos de la recta AB se denominarán *puntos exteriores del segmento AB*.

OBSERVACIÓN. En los axiomas II,1 — II,3 no se afirma que entre dos puntos A y B existan otros puntos; por ende, de estos axiomas no queda claro a primera vista que cada segmento tenga puntos interiores; con todo, del axioma II,2 sí sigue que cada segmento tiene puntos exteriores.

Además de los axiomas de orden lineal II,1 — II,3, el grupo II contiene el siguiente, que se refiere a la disposición de elementos geométricos en el plano.

II,4 (AXIOMA DE PASCH). *Sean A, B, C tres puntos que no pertenecen a una misma recta, y a, una recta en el plano ABC, que no contiene ninguno de los puntos A, B, C. Entonces, si la recta a pasa por algún punto del segmento AB, también pasará o bien por algún punto del segmento AC, o bien por alguno del segmento BC.*

4. Consecuencias de los axiomas de incidencia y de orden

§ 14. Los axiomas de incidencia y de orden permiten ya demostrar muchos hechos importantes de la geometría.

Ante todo, expondremos dos teoremas que complementan de manera natural las afirmaciones de los axiomas II,1 — II,3.

TEOREMA 4. *Cualesquiera que sean los diferentes puntos A y C, existe al menos un punto D en la recta AC, que se encuentra entre A y C.*

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma I,3, existe un punto E fuera de la recta AC; en virtud del axioma II,2, sobre la recta AE habrá algún punto F tal que E sea un punto del segmento AF (fig. 13). Por el mismo axioma II,2, en la recta FC habrá un punto G tal que C esté entre F y G. Del axioma II,3 sigue entonces que G no está entre F y C, es decir, no pertenece al segmento FC. En virtud del axioma de Pasch II,4, la recta EG debe intersecar al segmento AC o al FC. Pero EG no puede intersecar al segmento FC, pues en tal caso de los axiomas de incidencia I,1 y I,2 seguiría de inmediato que todos los puntos considerados están sobre una misma recta, mientras que sabemos que ya A, C y E no están sobre una recta. Por consiguiente, la recta EG

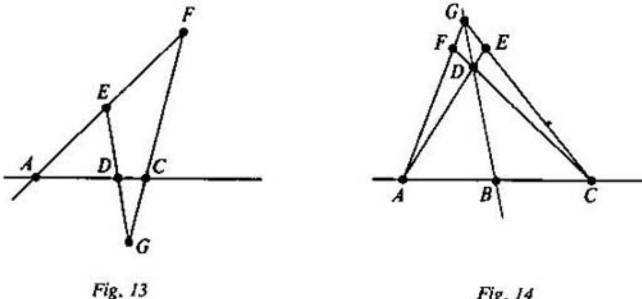


Fig. 13 *Fig. 14*

corta al segmento AC en algún punto D. Queda así demostrada la existencia de algún punto D entre los puntos A y C.

TEOREMA 5. *Entre tres diferentes puntos A, B, C de una misma recta, siempre existe uno que se encuentra entre los otros dos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A no está entre B y C, ni C entre A y B. Por el axioma I,3, existe algún punto D que no está sobre la recta AC. Unamos este punto con el punto B por medio de una recta (fig. 14); en virtud del axioma II,2, sobre la recta BD existe un punto G tal que D está entre B y G. Aplicando el axioma II,4 (de Pasch) al triángulo BCG y a la recta AD, hallamos que esta recta interseca a la CG en algún punto E, situado entre C y G. De la misma manera se establece que las rectas CD y AG se intersecan en algún punto F entre A y G. Aplicando nuevamente el axioma de Pasch II,4 al triángulo AEG y la recta CF, hallamos que D está entre A y E, y del mismo axioma, ahora aplicado al triángulo AEC y la recta BG obtenemos, por último, que B está entre A y C (por cuanto G no está entre E y C).

El axioma II,2, unido al teorema 4, y el II,3, conjuntamente con el teorema 5, permiten enunciar los dos teoremas que siguen:

A) *Cualesquiera que sean dos diferentes puntos A y C, existen puntos interiores del segmento AC y puntos de la recta AC que están fuera de este segmento.*

B) *Dados tres puntos (diferentes) sobre una recta, hay siempre uno de ellos, y sólo uno, que está entre los otros dos.*

Ahora estamos en condiciones de presentar un complemento importante del axioma de Pasch, que enunciaremos como el siguiente

TEOREMA 5A. *Si los puntos A, B, C no están sobre una misma recta, y si alguna recta a interseca dos cualesquiera de los tres segmentos AB, BC, AC, entonces ésta no corta al tercer segmento* *).

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que la recta a corta cada segmento AB, BC, AC en los puntos P, Q, R respectivamente, y mostremos que esta suposición lleva a un absurdo. Ante todo, es claro que el punto B no está sobre la recta PQ (de otro modo todos los puntos A, B, C estarían en la recta PQ).

---

*) Cuando decimos que la recta corta al segmento, sobreentendemos que ésta contiene algún punto interior del segmento.

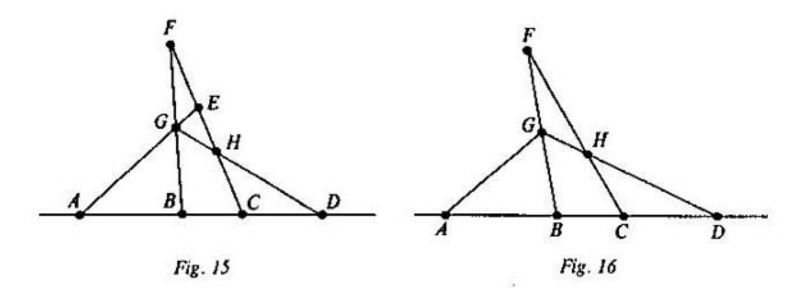


Fig. 15 *Fig. 16*

A continuación, concluimos que el punto R está fuera del segmento PQ, pues en caso contrario la recta AC, al cortar el lado PQ del triángulo PQB, tendría que cortar también el lado BQ, por el axioma de Pasch, es decir, el punto C estaría entre B y Q, contra lo supuesto (según la hipótesis Q está entre B y C, y como de tres puntos dados sólo uno de ellos está entre los otros dos, esto elimina la posibilidad de que C esté entre B y Q). En forma totalmente análoga se muestra que P está fuera del segmento QR, y que Q está fuera de PR. Nos queda una contradicción con el teorema B, con lo cual hemos demostrado el teorema.

Para lo que sigue necesitaremos dos lemas.

LEMA 1. *Si B está en el segmento AC y C en el BD, entonces B y C están en el segmento AD.*

DEMOSTRACIÓN. Partiendo de los axiomas I,3 y II,2, escojamos un punto E que no esté sobre la recta AB, y en la recta EC, un punto F tal que E se encuentre entre C y F (fig. 15). Como B está en el segmento AC, aplicando al triángulo AEC y la recta FB el axioma II,4, concluimos que la recta FB tendrá que intersecar o bien al segmento AE, o bien al EC. Como el punto E está entre F y C, por el axioma II,3 el punto F no puede estar entre E y C. En consecuencia, la recta FB tiene que intersecar al segmento AE. Aplicando el axioma II,4 al triángulo FBC y la recta AE, y utilizando nuevamente el axioma II,3, vemos que el punto de intersección del segmento AE y la recta FB está entre los puntos F y B. Sea G este punto de intersección. En forma análoga se demuestra (aplicando el axioma II,4 al triángulo GBD y la recta CF y utilizando después el axioma II,3) que la recta CF corta al segmento GD en algún punto H. Como H debe estar en el segmento GD, y E, por el axioma II,3, no pertenece al segmento AG, entonces, en virtud del axioma II,4, la recta EH tendrá un punto común con el segmento AD, es decir, C está en el segmento AD. En forma totalmente análoga se puede demostrar que también B pertenece a este segmento.

LEMA 2. *Si C está en el segmento AD y B en el AC, entonces B se encuentra asimismo en el segmento AD, y C, en el BD.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un punto G fuera de la recta AB y escojamos luego un punto F de modo que G se encuentre en el segmento BF (fig. 16). Como consecuencia de los axiomas I,2 y II,3, la recta CF no tiene puntos comunes ni con el segmento AB, ni con el BG; pero entonces, en virtud del axioma II,4, tampoco tendrá puntos comunes con el segmento AG. Pero como C está en el segmento AD, entonces, aplicando el axioma II,4 al triángulo AGD vemos que la recta CF debe intersecar al segmento GD en algún punto H. De aquí y nuevamente del axioma II,4 aplicado al

triángulo BGD sigue que la recta FH interseca al segmento BD. Vemos, así, que C está en el segmento BD.

La primera afirmación del lema 2 sigue entonces del lema 1.

Ahora resulta fácil demostrar el siguiente teorema importante:

TEOREMA 6. *Entre dos diferentes puntos cualesquiera de una recta existe un conjunto infinito de puntos de ésta.*

DEMOSTRACIÓN. Sean A, B dos puntos de la recta a. En virtud del teorema 4, entre A y B existe algún punto C; por el mismo teorema, entre A y C existe algún punto D. Por el lema 2, el punto D está asimismo entre A y B y, consecuentemente, A, B, C, D son puntos diferentes de la recta a. Análogamente se puede afirmar que entre A y D hay un punto E, y que éste se encuentra asimismo entre A y C y entre A y B, de forma que los puntos A, B, C, D, E son distintos.

Continuando el mismo razonamiento, obtenemos que entre A y B hay conjunto infinito de puntos $C, D, E, \dots$, probando así el teorema.

Obsérvese que de los lemas 1 y 2 se desprende la siguiente proposición:

Supongamos que cada uno de los puntos C y D está entre los puntos A y B. Entonces, si el punto M está entre C y D, también estará entre A y B.

En efecto, de acuerdo con el teorema B (pág. 40), de los tres puntos A, C, D uno y sólo uno está entre los otros dos. Pero A no puede estar entre C y D, pues esto contradiría el lema 1. Supongamos, por ejemplo, que C está entre A y D (en caso contrario cambiamos la notación de los puntos C y D). Entonces la disposición de los puntos D, M, C, A satisface las mismas condiciones que la de los puntos A, B, C, D en el enunciado del lema 2. Por esto, en virtud de este lema el punto M está entre A y D. Ahora podemos afirmar que también la disposición de los puntos A, M, D, B satisface las mismas condiciones que la de los puntos A, B, C, D del mismo lema. En virtud del último, M estará entre A y B, cosa que se quería establecer.

Queda, así, demostrado el siguiente

TEOREMA 7. *Si los puntos C y D están entre los puntos A y B, todos los puntos del segmento CD pertenecen al segmento AB.*

DEFINICIÓN 2. En este caso se dice que el segmento CD está dentro del AB.

Del lema 2 sigue de inmediato el

TEOREMA 8. *Si el punto C está entre los puntos A y B, todos los puntos del segmento AC pertenecen al AB.*

De igual modo es fácil deducir (por reducción al absurdo), del lema 2 (tomando en consideración el axioma II,3), el

TEOREMA 8a. *Si el punto C está entre los puntos A y B, ningún punto del segmento AC puede ser punto del segmento CB.*

Resulta un tanto más difícil la demostración del

TEOREMA 8b. *Si C está entre A y B, cada punto del segmento AB, diferente de C, pertenece o bien al segmento AC, o bien al CB.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el punto M pertenece al segmento AB y no coincide con C. Supongamos, asimismo, que M no pertenece ni al segmento AC, ni al CB. Entonces o bien C está entre A y M, o bien A entre C y M. Si C está entre A y M, por cuanto M está entre A y B concluimos, basándonos en la segunda afirmación del lema 2, que M está entre C y B, contra lo supuesto. Si A está entre C y M, entonces, como C está entre A y B concluimos, por el lema 1, que A está entre M y B; consecuentemente, M no puede estar entre A y B. Nuevamente llegamos a una

contradicción con lo asumido; hemos demotrado, así, el teorema, por reducción al absurdo.

Los teoremas 8, 8a, 8b nos permiten afirmar que el conjunto de puntos interiores del segmento AB, sin contar al punto C, es la unión del conjunto de puntos interiores del segmento AC y del de puntos interiores del segmento CB, y que estos dos últimos conjuntos no tienen puntos comunes.

DEFINICIÓN 3. Sea O un punto de la recta a, y A y B, otros dos puntos diferentes de la misma. Si O no está entre A y B, diremos que los puntos A y B están sobre a a un mismo lado del punto O. Si O está entre A y B, diremos que los puntos A y B están sobre la recta a en lados diferentes con respecto al punto O.

TEOREMA 9. *El punto O de la recta a divide todos los demás puntos de ésta en dos clases no vacías, de modo que dos puntos cualesquiera de a pertenecientes a la misma clase están a un mismo lado de O, mientras que dos puntos pertenecientes a distintas clases se encuentran en lados diferentes con respecto a O.*

Para probar esta afirmación, debemos fijar sobre la recta a un punto arbitrario A, diferente de O, y poner en una clase todos los puntos que se encuentran con A a un mismo lado del punto O, y en la otra, todos los puntos que se encuentran con A en distintos lados con respecto a O. Luego de esto, debe demostrarse que 1) cada clase es no vacía; 2) cada punto de la recta, a excepción de O, cae en una clase y sólo en una; 3) si M y N son puntos de una misma clase, O no pertenece al segmento MN; 4) si M y N son puntos de clases diferentes, O pertenece al segmento MN.

Las demostraciones se obtienen sin dificultad utilizando los teoremas 8, 8a, 8b.

DEFINICIÓN 4. Decimos que un punto O de una recta a, conjuntamente con algún otro punto A de la misma, determina *la semirrecta* o *el rayo OA*; los puntos que están del mismo lado que A con respecto a O se llaman *puntos de la semirrecta OA*; el punto O, *origen de la semirrecta OA*.

Si A' es un punto de la semirrecta OA, las semirrectas OA y OA' son idénticas, en el sentido que cada punto de la semirrecta OA' es un punto de la semirrecta OA, y recíprocamente.

Del teorema 9 sigue que cualquiera que sea el punto O de la recta a, éste determina exactamente dos semirrectas sobre a, con origen común O.

Todo lo expuesto permite considerar el conjunto de puntos de cada recta como un conjunto ordenado de determinada manera.

Como se sabe, un conjunto se llama ordenado si en él se han definido los conceptos «preceder a» y «seguir a», de forma que dados dos elementos diferentes cualesquiera x, y, un determinado precede al otro; en tal caso se dice que el segundo sigue al primero. Además, debe verificarse la condición de transitividad: si x, y, z son tres elementos y x precede a y e y precede a z, entonces x precede a z.

El conjunto de los números reales, por ejemplo, puede ser ordenado «según la magnitud», diciendo que a precede a b si, y sólo si, $a < b$.

Sea a una recta arbitraria, y O, un punto sobre a. Consideremos una de las dos semirrectas que tienen origen común en O. Diremos que el punto A de esta semirrecta precede al B, si A pertenece al segmento OB.

Del lema 2 sigue inmediatamente que si A precede a B y B precede a C, entonces A precede a C. Con esto quedan ordenados de manera bien definida los puntos de cada semirrecta.

Convendremos ahora en llamar *primera* a una de las dos semirrectas con origen

común O y definiremos el orden de los puntos en TODA LA RECTA a por las siguientes condiciones:

1) Sean A y B dos puntos de la primera semirrecta. Entonces A precede a B en la recta a, si B precede a A en la primera semirrecta.

2) Todos los puntos de la primera semirrecta preceden, en la recta a, al punto O.

3) Todos los puntos de la primera semirrecta preceden, en la recta a, a los de la segunda.

4) El punto O precede en la recta a a los puntos de la segunda semirrecta.

5) Sean A y B dos puntos de la segunda semirrecta. Entonces A precede a B en la recta a, si A precede a B en la segunda semirrecta.

Cualesquiera que sean dos puntos de la recta a, las condiciones 1 — 5 determinan uno de ellos como precedente del otro.

La condición de transitividad será verificada en nuestro caso.

En efecto, sean A, B, C tres puntos de la recta a, de manera que, en el sentido de las condiciones 1 — 5, A precede a B y B precede a C. Mostremos que estas mismas condiciones definen a A como precedente de C.

Si los tres puntos están sobre una de las dos semirrectas con origen común O, esto sigue del lema 2, como ya observamos arriba.

Si A está en la primera semirrecta y B en la segunda (o bien coincide con el punto O), entonces C será indispensablemente un punto de la segunda (de otra forma habría una contradicción con la condición 3, o bien con la 2). En tal caso, A precede a C, de acuerdo con la condición 3.

Si A y B están en la primera semirrecta, y C en la segunda, o bien coincide con O, entonces A precede a C en virtud de la condición 3, o bien de la 2.

Toda otra hipótesis sobre la disposición de los puntos A, B, C contradirá las condiciones 1 — 5.

Con esto queda demostrada la propiedad de transitividad.

Si intercambiamos la primera semirrecta con la segunda e imponemos nuevamente las condiciones 1 — 5, obtenemos un nuevo orden de puntos sobre la recta a, que viene a ser opuesto al inicial, en el sentido que si el punto A precede al B en el primer orden, entonces B precede a A en el segundo.

Sea O' un punto de la recta a, diferente del punto O. Escogiendo una de las dos semirrectas con origen común O' como primera, podemos, recurriendo nuevamente a las condiciones 1 — 5, definir un cierto orden de puntos de la recta a. *Este orden coincidirá con uno de los dos obtenidos antes, partiendo de la elección del punto O* (omitimos la demostración). Así, independientemente de la elección del punto O, las condiciones 1 — 5 definen completamente dos órdenes posibles de disposición de los puntos de la recta a, siendo uno el opuesto del otro.

Diremos que, al escoger uno de estos órdenes, definimos *un sentido* sobre la recta.

Partiendo de la definición de orden de puntos sobre una recta es fácil observar lo siguiente: *si el punto B está entre A y C, entonces o bien A precede a B y B a C, o bien C precede a B y B a A; recíprocamente, si A precede a B y B a C, o bien si C precede a B y B a A, entonces B se encuentra entre A y C.*

Dicho de otro modo, el orden de puntos sobre una recta se define de manera tal que la posición de B entre A y C en el sentido de este orden equivale a la ubicación de B entre A y C en el sentido original, establecido en el § 13.

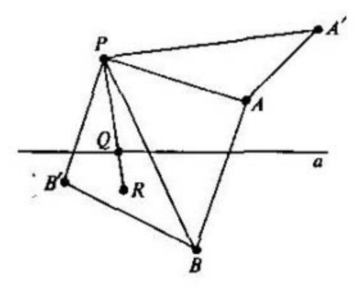


Fig. 17

§ 15. Las proposiciones precedentes tenían que ver con la disposición de puntos sobre una recta. Ahora indicaremos una serie de proposiciones que caracterizan las particularidades en la disposición de puntos en el plano y en el espacio.

TEOREMA 10. *Cada recta a, situada en un plano α, divide los puntos de este plano que no le pertenecen, en dos clases no vacías, de manera tal que dos puntos cualesquiera A y B de clases diferentes determinan un segmento AB que contiene algún punto de la recta a, mientras que dos puntos arbitrarios A y A' de una misma clase determinan un segmento AA', dentro del cual no hay ningún punto de a.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos en el plano α un punto arbitrario P que no esté sobre la recta a, y pongamos en la primera clase cada punto A del plano que no pertenezca a a y sea tal que el segmento PA no contenga puntos de la recta a; pongamos, además, al propio punto P en la primera clase (fig. 17). En la segunda clase pondremos cada punto B que no esté sobre a y sea tal que el segmento PB contenga algún punto de la recta a. Entonces

1) Cada clase es no vacía. En efecto, si Q es algún punto de la recta a, en virtud del axioma II,2 sobre la recta PQ habrá algún punto R tal que Q esté entre P y R; consecuentemente, R estará en la segunda clase. Por otra parte, la primera clase contiene, por ejemplo, el punto P.

2) Cada punto del plano α (a excepción de los puntos de la recta a) caerá en una clase, y sólo en una. En efecto, dentro de cualquier segmento o bien hay algún punto de a, o bien no hay ninguno.

3) Dos puntos arbitrarios A y A' de la primera clase determinan un segmento AA' que no contiene en su interior ningún punto de la recta a.

Efectivamente, si el segmento AA' contiene algún punto de la recta a, entonces, si suponemos que P, A, A' no están sobre una recta, por el axioma de Pasch II,4 uno de los dos segmentos PA, PA' tendrá que contener un punto de la recta a, en contradicción a la hipótesis; si, en cambio, P, A, A' están sobre la recta, llegaremos a una conclusión análoga basándonos en los teoremas B y 8, cuando P no pertenece al segmento AA', o bien basándonos en el teorema 8b, cuando P pertenece al segmento AA'.

4) Dos puntos cualesquiera B y B' de la segunda clase determinan un segmento BB' en cuyo interior no habrá ningún punto de la recta a.

La demostración se hace utilizando el teorema 5a, en el caso que P, B, B' no estén sobre una misma recta, y el teorema B junto con el 8a, cuando P, B, B' estén sobre una misma recta.

5) Dos puntos cualesquiera A y B de clases diferentes determinan un segmento AB en cuyo interior habrá algún punto de la recta a.

En efecto, según la hipótesis, el segmento PB contiene un punto de la recta a. Si P, A, B no están sobre una misma recta, en virtud del axioma de Pasch, o bien PA, o bien AB contendrá algún punto de la recta a; pero el segmento PA no puede ser, por hipótesis. En consecuencia, el segmento AB contendrá algún punto de la recta a.

Si, en cambio, P, A, B están sobre una sola recta, se llega a la misma conclusión utilizando el teorema B y los teoremas 8 y 8b.

OBSERVACIÓN. Es fácil mostrar que 1) cada clase contiene un número infinito de puntos (para demostrarlo se puede recurrir al teorema 6); 2) si P' es un punto cualquiera de la primera clase y si todos los puntos del plano están nuevamente dispuestos en dos clases de manera análoga a como lo hicimos arriba, cambiando P por P', se obtendrán las mismas clases que antes; 3) si se sustituye el punto P por algún punto de la segunda clase, esto conducirá sólo a un cambio en la numeración de las clases.

DEFINICIÓN 5. Utilizando las notaciones del enunciado del teorema 10, diremos que los puntos A y A' están en el plano α *a un mismo lado de la recta* a, mientras que los puntos A y B están en el plano α *en lados diferentes con respecto a la recta* a.

TEOREMA 11. *Cada plano* α *divide los puntos del espacio que no le pertenecen en dos clases no vacías, de manera tal que dos puntos cualesquiera* A *y* B *de clases diferentes determinan un segmento* AB *dentro del cual hay algún punto del plano* α, *mientras que dos puntos arbitrarios* A *y* A' *de una misma clase determinan un segmento* AA' *libre de puntos de* α.

DEFINICIÓN 6. Diremos que los puntos A y A' están en el espacio *a un mismo lado del plano* α, mientras que A y B están *en lados opuestos con respecto al plano* α.

No haremos la demostración del teorema 11; nos limitaremos a observar que, aunque se refiere a la geometría del espacio, para su demostración no se necesitan nuevos axiomas de orden, aparte de los ya introducidos, II,1 — II,4, que se refieren a puntos sobre una recta y sobre un plano.

Los axiomas del segundo grupo fundamentan los importantes conceptos de orden de puntos sobre una recta, de la ubicación «a un mismo lado», o «en lados diferentes», etc. De todos ellos, el concepto básico es el expresado por el término «se encuentra entre»; todos los demás derivan de él.

Utilizando los axiomas II,1 — II,4 se definen de manera natural una quebrada, un triángulo, un polígono, en general; se demuestra que un polígono simple divide el plano en dos regiones; sin embargo, de estos axiomas aún no sigue, por ejemplo, que el conjunto de los elementos de la geometría es innumerable (a este respecto, véase el cap. IV, § 72).

5. Grupo III. Axiomas de congruencia

§ 16. Suponemos que un segmento se puede encontrar en una relación determinada con otro (o consigo mismo), que denotaremos con el término «congruente», o bien «igual». La relación de congruencia debe satisfacer los siguientes axiomas.

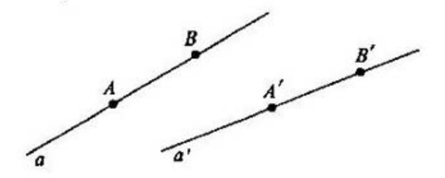


Fig. 18

III,1. *Si A, B son dos puntos sobre la recta a, y A' es un punto de la misma recta, o bien de otra recta a', siempre se puede encontrar, a un lado prefijado de A' sobre la recta a', un punto B', y sólo uno, tal que el segmento AB es congruente al $A'B'$.*

Tal relación entre los segmentos AB y $A'B'$ se denota así:

$$AB \equiv A'B'.$$

Para cada segmento AB se exige la congruencia

$$AB \equiv BA.$$

La primera parte de este axioma se expresa más concisamente así: *cada segmento puede ser aplicado de manera unívoca sobre cada recta a un lado prefijado cualquiera de cualquier punto dado de ésta* (fig. 18).

III,2. *Si los segmentos $A'B'$ y $A'B''$ son congruentes al mismo segmento AB, entonces $A'B'$ es congruente al segmento $A''B''$; es decir, si*

$$A'B' \equiv AB \quad \text{y} \quad A''B'' \equiv AB,$$

entonces también

$$A'B' \equiv A''B''.$$

De los axiomas III,1 y III,2 sigue que *si $AB \equiv A'B'$, entonces $AB \equiv B'A'$*. En efecto, de las dos relaciones

$$AB \equiv A'B', \qquad B'A' \equiv A'B'$$

(la segunda de las cuales está asegurada por el axioma III,1) concluimos, basándonos en el axioma III,2, que $AB \equiv B'A'$.

De aquí y del axioma III,1 deducimos el

COROLARIO. *Cada segmento es congruente consigo mismo*, es decir,

$$AB \equiv AB, \qquad AB \equiv BA.$$

En efecto, la relación $AB \equiv BA$ se exige en el axioma III,1, y a base de lo expuesto, de $AB \equiv BA$ sigue que $AB \equiv AB$.

Seguidamente, podemos establecer la proposición: *si $AB \equiv A'B'$, entonces $A'B' \equiv AB$*, es decir, *la relación de congruencia de segmentos es simétrica*.

En efecto, tenemos que $A'B' \equiv A'B'$; si, además, se da que $AB \equiv A'B'$, de ambas relaciones y el axioma III,2 se desprende la congruencia $A'B' \equiv AB$.

Demostremos, por último, que *si*

$$AB \equiv A'B' \quad \text{y} \quad A'B' \equiv A''B'',$$

entonces asimismo

$$AB \equiv A''B'',$$

es decir, *la relación de congruencia entre segmentos tiene propiedad de transitividad*.

Para demostrarlo, basta observar que, a base de la discusión precedente, de las dos relaciones $AB \equiv A'B'$, $A'B' \equiv A''B''$ siguen las relaciones

$$AB \equiv A'B', \qquad A''B'' \equiv A'B',$$

después de lo cual la congruencia $AB \equiv A''B''$ queda ya asegurada por el axioma III,2.

Así, pues, los axiomas III,1 y III,2 permiten establecer que: 1) cada segmento es congruente consigo mismo, 2) en las relaciones de congruencia de segmentos el orden de los puntos que los definen es indiferente*), 3) la relación de congruencia de segmentos es simétrica y transitiva.

Para obtener deducciones más jugosas son necesarios nuevos axiomas.

III,3. *Sean AB y BC dos segmentos sobre la recta a, sin puntos interiores comunes y sean, además, $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos sobre la misma recta, o bien sobre otra a', que tampoco poseen puntos interiores comunes. Si*

$$AB \equiv A'B' \quad y \quad BC \equiv B'C',$$

entonces

$$AC \equiv A'C'$$

(fig. 19).

DEFINICIÓN 7. Un par de semirrectas h, k que tienen el mismo origen O y no pertenecen a una misma recta se llama *ángulo*. Para denotar este ángulo se utilizan los símbolos $\angle(h, k)$ y $\angle(k, h)$.

Si A y B son puntos de las semirrectas h y k respectivamente, utilizaremos también la siguiente notación para este ángulo: $\angle AOB$.

Las semirrectas h y k se llaman *lados* del ángulo; el punto O, su *vértice*.

Sean h' la semirrecta que complementa h hasta la recta, y k' que complementa k hasta la recta. Los puntos del plano que se encuentran del mismo lado de la recta h, h', que los puntos de la semirrecta k, y a un mismo lado de la recta k, k' que los puntos de la semirrecta h, se denominan *puntos interiores de* $\angle(h, k)$, y la totalidad de todos estos puntos se llama *región interior del ángulo*. Los demás puntos del plano que contiene el ángulo, a excepción del punto O y los puntos de las semirrectas h y k, se llaman *puntos exteriores* del ángulo; la colección de todos estos puntos lleva el nombre de *región exterior del ángulo* (en la fig. 20 la región interior de $\angle(h, k)$ se muestra con rayado doble).

Veamos el siguiente

TEOREMA 11a. *Si A y B son puntos situados sobre distintos lados del ángulo, cada semirrecta que pasa dentro del ángulo por su vértice intersecará al segmento AB y,*

---

*) Esto significa que de la relación $AB \equiv A'B'$ siguen las relaciones $AB \equiv B'A'$, $BA \equiv A'B'$ y $BA \equiv B'A'$. La primera fue demostrada arriba; las dos últimas se deducen fácilmente utilizando la simetría y la transitividad de la relación de congruencia entre segmentos.

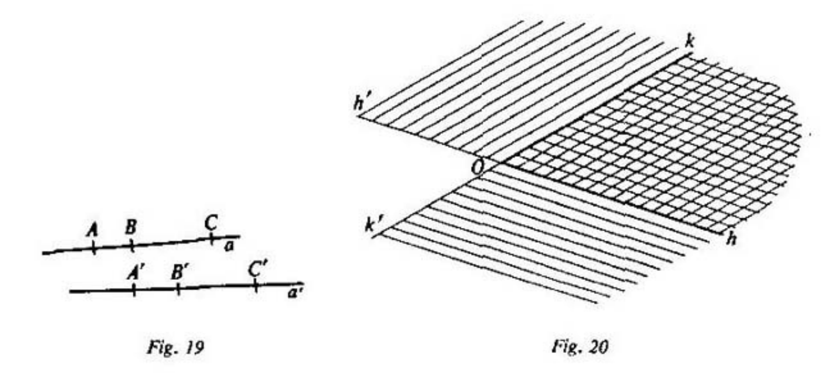


Fig. 19 *Fig. 20*

recíprocamente, cada semirrecta que une el vértice con uno de los puntos del segmento AB estará dentro del ángulo.

DEMOSTRACIÓN DE LA PRIMERA PARTE DEL TEOREMA. Sea $\angle(h, k)$ el ángulo dado (estando el punto A sobre el lado h), y l, una semirrecta que parte del vértice y pasa por la región interior. Fijemos sobre la semirrecta h', complementaria de h, un punto arbitrario C, y consideremos el triángulo ABC. Sea l' el complemento de la semirrecta l, y l^*, la recta formada por las semirrectas l y l'. Por el axioma II,4, la recta l^* debe cortar bien a CB, bien a AB. Pero l^* no contiene puntos dentro de $\angle(h', k)$; por lo tanto, debe intersecar precisamente a AB.

Ahora bien, la semirrecta l' no tiene puntos dentro de $\angle(h, k)$; por lo tanto, es la semirrecta l que interseca al segmento AB. Esto demuestra la primera parte del teorema.

La segunda parte se demuestra a base de los razonamientos triviales.

Ahora introduciremos el último concepto básico: la congruencia de ángulos. Suponemos que un ángulo puede hallarse en una relación determinada con otro (o consigo mismo), y denotaremos esta relación por la palabra «congruente», o bien «igual».

III,4. *Sean dados $\angle(h, k)$ en el plano α, una recta a' en este mismo plano, o bien en otro, α', y supongamos fijado un lado determinado del plano α' con respecto a la recta a'.*

Sea h' una semirrecta de la recta a', con origen en el punto O'. Entonces en el plano α' existe una semirrecta k', y sólo una, tal que $\angle(h, k)$ es congruente con $\angle(h', k')$ y, además, todos los puntos interiores de $\angle(h', k')$ se encuentran en el lado prefijado con respecto a a'. Para denotar la congruencia de ángulos se utiliza la notación

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

Si $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$, entonces $\angle(k, h) \equiv \angle(k', h')$. Cada ángulo es congruente consigo mismo, es decir,

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k) \quad \text{y} \quad \angle(h, k) \equiv \angle(k, h).$$

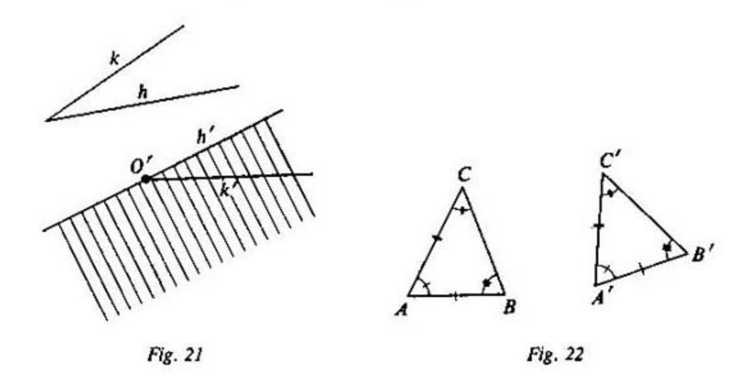


Fig. 21 *Fig. 22*

La primera parte de este axioma se resume así: *cada ángulo puede ser aplicado de manera única en un plano dado, a un lado prefijado de una semirrecta dada* (fig. 21).

III,5. *Sean, A, B, C tres puntos no pertenecientes a una misma recta y A', B', C' otros tres, tampoco pertenecientes a una misma recta. Si*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{y} \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

entonces

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \quad \text{y} \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

(fig. 22).

Comparando los axiomas del III grupo, vemos que los axiomas III,1 — III,3 tienen que ver sólo con segmentos, el III,4 se refiere a la congruencia de ángulos, mientras que el III,5 relaciona la congruencia de segmentos con la de ángulos.

6. Consecuencias de los axiomas I — III

§ 17. Hemos visto que la congruencia de segmentos es una propiedad mutua: si el segmento AB es congruente al $A'B'$, también $A'B'$ será congruente a AB. Por esto AB y $A'B'$ se llaman *mutuamente congruentes* (o, simplemente, *congruentes*).

Supongamos que sobre la recta a se ha fijado un sistema de puntos $A, B, C, \dots, K, L$, y sobre a', el sistema $A', B', C' \dots, K', L'$. Si los segmentos AB y $A'B'$, AC y $A'C'$, BC y $B'C'$, ..., KL y $K'L'$ son congruentes, ambos sistemas se llaman congruentes.

Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 12. *Si en dos sistemas congruentes $A, B, C, \dots, K, L$ y $A', B', C', \dots, K', L'$ los puntos del primero están dispuestos de manera que B esté entre A por un lado y $C, D, \dots, K, L$ por el otro, C entre A y B por un lado y $D, \dots, K, L$ por el otro, etc., entonces los puntos $A', B', C', \dots, K', L'$ tendrán análoga disposición, es decir, B' estará entre A' por un lado y $C', D', \dots, K', L'$ por el otro, etc.*

Se puede resumir así: *al hacer una traslación congruente de un sistema de puntos de una recta a otra, el orden de disposición de los puntos se conserva.*

Sin detenernos a demostrar el teorema 12, pasaremos al siguiente, que será esencial más adelante.

TEOREMA 13. *Sean dados tres puntos A, B, C sobre una recta a, y otros tres, A', B', C', sobre una recta a'. Supongamos, además, que $AB \equiv A'B'$ y $AC \equiv A'C'$. Si B está entre A y C, y B' se encuentra, sobre la recta a', del mismo lado que C' con respecto a A', entonces B' está entre A' y C'.*

A diferencia del teorema 12, aquí no se presupone la congruencia $BC \equiv B'C'$.

La demostración se puede obtener directamente de los axiomas III,1 y III,3. En efecto, según el axioma III,1, en la recta a' hay un punto C tal que B' está entre A' y C^* y, además, $B'C^* \equiv BC$. Por el axioma III,3 debe ser, entonces, $AC \equiv A'C^*$. De este modo $AC \equiv A'C'$ y $AC \equiv A'C^*$. Pero como los puntos C' y C^* están a un mismo lado de A', en virtud del axioma III,1 los puntos C' y C^* coincidirán. En consecuencia, B' está entre A' y C'.

DEFINICIÓN 8. El triángulo ABC se llama *congruente* al $A'B'C'$ si

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad BC \equiv B'C'$$

$$\angle A \equiv \angle A', \qquad \angle B \equiv \angle B', \qquad \angle C \equiv \angle C'$$

(escritura simbólica: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$).

TEOREMA 14 (PRIMER TEOREMA DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS). *Si para dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lugar las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C' \quad y \quad \angle A \equiv \angle A',$$

entonces el triángulo ABC es congruente al $A'B'C'$.

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma III,5 tenemos que $\angle B \equiv \angle B'$, $\angle C \equiv \angle C'$; nos basta demostrar, pues, que $BC \equiv B'C'$.

Supongamos que el lado BC no es congruente al $B'C'$. A base del axioma III,1, podemos hallar sobre la semirrecta $B'C'$ un punto D' tal que $BC \equiv B'D'$. Bajo nuestra hipótesis, las semirrectas $A'C'$ y $A'D'$ son diferentes. Aplicando a los triángulos ABC y $A'B'D'$ el axioma III,5, concluimos que $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$. Pero, según la hipótesis, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. Las dos últimas relaciones contradicen la condición de unicidad del axioma III,4. En consecuencia, la hipótesis $BC \equiv B'C'$ es inadmisible.

TEOREMA 15 (SEGUNDO TEOREMA DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS). *Si para los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lugar las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \qquad \angle A \equiv \angle A', \qquad \angle B \equiv \angle B',$$

entonces el triángulo ABC es congruente con $A'B'C'$.

La demostración es análoga a la precedente (por el método de reducción al absurdo, utilizando los axiomas III,1, III,5 y III,4).

El teorema siguiente afirma para los ángulos en esencia lo mismo que el axioma III,3 para los segmentos.

TEOREMA 16. *Sean h, k, l y h', k', l' semirrectas que parten de los puntos O y O' respectivamente, de modo que cada una de estas ternas de semirrectas se encuentra en un mismo plano. Supongamos, además, que alguna de las semirrectas h, k, l está dentro del ángulo formado por las otras dos, y la semirrecta correspondiente en la terna h', k', l'* (es decir, la denotada por la misma letra) *tiene la misma disposición*

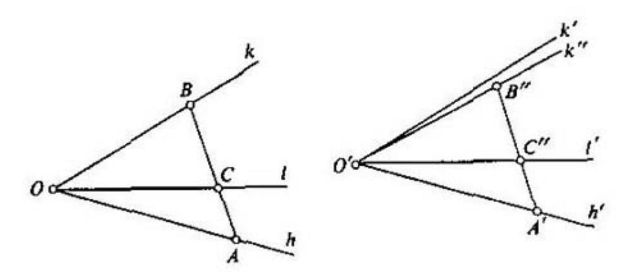


Fig. 23

con respecto a las otras dos de la terna. Entonces, de

$$\angle(h, l) \equiv \angle(h', l') \quad y \quad \angle(l, k) \equiv \angle(l', k')$$

sigue que

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

Haremos la demostración primero para el caso en que la semirrecta l esté dentro del ángulo (h, k) (fig. 23). Supongamos que $\angle(h, k)$ no es congruente con $\angle(h', k')$. Basándonos en el axioma III,4, construyamos $\angle(h', k'')$ de forma que se verifique $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k'')$ y que $\angle(h', k'')$ tenga puntos interiores comunes con $\angle(h', k')$. Tomemos sobre las semirrectas h y k puntos A y B respectivamente y determinemos sobre las semirrectas h' y k'' puntos A' y B'' a las condiciones: $OA \equiv O'A'$ y $OB \equiv O'B''$. Entonces, por el teorema 14, $AB \equiv A'B''$. Como la semirrecta l está en el interior de $\angle(h, k)$, en virtud del teorema 11a esta semirrecta intersecará el segmento AB en algún punto C. Determinemos sobre la semirrecta $A'B''$ un punto C'' se modo que tenga lugar la congruencia $AC \equiv A'C''$. Como consecuencia de las congruencias $AC \equiv A'C''$ y $AB \equiv A'B''$ y a base del teorema 13, el punto C'' estará entre A' y B''; además, tiene lugar la congruencia $BC \equiv B''C''$ (cosa que se puede demostrar por reducción al absurdo, recurriendo al axioma III,3). Ahora bien, por las congruencias $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k'')$ y por el axioma III,5, tenemos que $\angle OAC \equiv \angle O'A'C''$ y $\angle OBC \equiv \angle O'B''C''$. En virtud del mismo axioma y de las congruencias $OA \equiv O'A'$, $AC \equiv A'C''$ y $\angle OAC \equiv \angle O'A'C''$, concluimos que $\angle AOC \equiv$ $\equiv \angle A'O'C''$; análogamente, tomando en consideración las congruencias $OB \equiv O'B''$, $BC \equiv B''C''$, $\angle OBC \equiv \angle O'B''C''$, concluimos que $\angle COB \equiv$ $\equiv \angle C''O'B''$.

Como consecuencia de la primera de nuestras dos conclusiones y del axioma III,4, el punto C'' tendrá que estar sobre la semirrecta l'. En tal caso, la congruencia $\angle COB \equiv \angle C''O'B''$ equivale a la congruencia $\angle(l, k) \equiv \angle(l', k'')$. Pero por la condición del teorema, $\angle(l, k) \equiv \angle(l', k')$. Como, por nuestra hipótesis, las semirrectas k' y k'' son diferentes, las últimas dos relaciones contradicen el axioma III,4. Esta contradicción concluye la demostración.

Supongamos, ahora, que la semirrecta k está dentro de $\angle(h, l)$, y k', dentro de $\angle(h', l')$. Tomemos sobre las semirrectas h y l puntos A y C respectivamente, y de-

terminemos sobre h' y l' puntos A' y C' a las condiciones: $OA \equiv O'A'$, $OC \equiv O'C'$. Sea B el punto de intersección de la semirrecta k con el segmento AC, y B' el punto de intersección de k' y $A'C'$ (la existencia de estos puntos está ahora asegurada por la disposición de nuestras semirrectas). De las condiciones del teorema, teniendo en cuenta el axioma III,5 y el teorema 15 hallamos que $CB \equiv C'B'$; de aquí, tomando en consideración la congruencia $CA \equiv C'A'$, obtenemos que $BA \equiv B'A'$. De esta forma, $OA \equiv O'A'$, $BA \equiv B'A'$; además, $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ (por el axioma III,5). Por ende, $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$, que constituye lo que queríamos demostrar.

El teorema que sigue cumple para los ángulos la misma función que el teorema 13 para los segmentos.

TEOREMA 16a. *Supongamos que en cierto plano se han dado las semirrectas h, k, l y h', k', l', con origen en los puntos O y O' respectivamente. Supongamos que las semirrectas k y l están a un mismo lado de la recta que contiene a h, y que las semirrectas k' y l' tienen disposición análoga con respecto a h'. Entonces, si $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$, $\angle(h, l) \equiv \angle(h', l')$ y si la semirrecta k está en el interior del ángulo $\angle(h, l)$, la semirrecta k' estará, asimismo, dentro del ángulo $\angle(h', l')$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos en las semirrectas h y l puntos A y C respectivamente y determinemos sobre h' y l' puntos A' y C' de modo que $OA \equiv O'A'$, $OC \equiv O'C'$. Como la semirrecta k pasa dentro del ángulo $\angle(h, l)$, intersecará al segmento AC en algún punto B. Utilizando el teorema 14, el axioma III,1 y el teorema 13, es fácil mostrar que en el segmento $A'C'$ habrá un punto B' tal que $AB \equiv A'B'$. Ahora, del axioma III,5 concluimos que $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$. De aquí y del axioma III,4 se desprende que k' pasa por el punto B'. En consecuencia, la semirrecta k', está dentro de $\angle(h', l')$.

TEOREMA 17. *Si en el triángulo ABC se tiene $AC \equiv CB$, entonces $\angle CAB \equiv \angle CBA$ y $\angle CBA \equiv \angle CAB$.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema sigue del axioma III,5 aplicado a los triángulos CAB y CBA.

TEOREMA 18 (TERCER TEOREMA DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS). *Si para los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lugar las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad BC \equiv B'C',$$

entonces el triángulo ABC es congruente con $A'B'C'$.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 14, nos basta demostrar que $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$. Supongamos lo contrario. Por el axioma III,4, existirá una semirrecta $A'P_1'$, que está situada del mismo lado que el punto B' con respecto a la recta $A'C'$, y que satisfaga la condición $\angle CAB \equiv \angle C'A'P_1'$. Por hipótesis, la semirrecta $A'P_1'$ no coincide con la $A'B'$ (fig. 24).

En virtud del axioma III,1, sobre la semirrecta $A'P_1'$ habrá un punto B_1' tal que $AB \equiv A'B_1'$. Como $AB \equiv A'B_1'$, $AC \equiv A'C'$ y $\angle CAB \equiv \angle C'A'B_1'$, por el teorema 14 tendremos que $\Delta ABC \equiv \Delta A'B_1'C'$. De aquí sigue la congruencia $BC \equiv B_1'C'$. Por la simetría y la transitividad de la congruencia de SEGMENTOS, concluimos a base de lo anterior que los lados del triángulo $A'B_1'C'$ son congruentes a los lados correspondientes de $A'B'C'$. En forma análoga, construimos ahora el triángulo $A'B_2'C'$ al otro lado de la recta $A'C'$ y que tenga iguales propiedades. Consideremos los triángulos $A'B_2'B'$ y $C'B_2'B'$. Por la congruencia

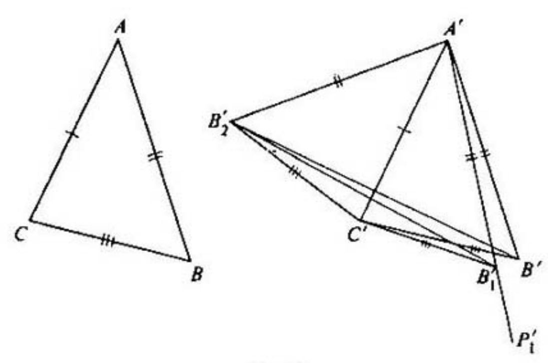


Fig. 24

$A'B_2' \equiv A'B'$, el teorema 17 implica que $\angle A'B_2'B' \equiv \angle A'B'B_2'$; análogamente, $\angle B'B_2'C' \equiv \angle B_2'B'C'$. Usando las dos últimas relaciones y basándonos en el teorema 16, concluimos que $\angle A'B_2'C' \equiv \angle A'B'C'$; de aquí y del teorema 14 sigue que $\Delta A'B_2'C' \equiv \Delta A'B'C'$ y, por ende, que $\angle C'A'B_2' \equiv \angle C'A'B'$. En forma idéntica se puede demostrar que $\angle C'A'B_2' \equiv \angle C'A'B_1'$. Las dos últimas relaciones contradicen el axioma III,4; esta contradicción demuestra el teorema.

Ahora puede demostrarse fácilmente el

TEOREMA 19. *Si* $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ *y* $\angle(h, k) \equiv \angle(h'', k'')$, *entonces* $\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'')$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos los vértices de $\angle(h, k)$, $\angle(h', k')$ y $\angle(h'', k'')$ por O, O' y O'', respectivamente. Fijemos sobre las semirrectas h, k dos puntos A, B (A sobre h, B sobre k) y determinemos sobre las semirrectas h', k', h'', k'' puntos A', B', A'', B'' de modo que $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $OA \equiv O''A''$, $OB \equiv O''B''$. Por el teorema 14, tendremos que $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A''B''$. Como la propiedad de congruencia de LOS SEGMENTOS es simétrica y transitiva, las relaciones precedentes implican las congruencias $O'A' \equiv O''A''$, $O'B' \equiv O''B''$, $A'B' \equiv A''B''$. Por el teorema 18, de aquí sigue que $\Delta O'A'B' \equiv \Delta O''A''B''$ y, por ende, $\angle A'O'B' \equiv \angle A''O''B''$. El teorema queda demostrado.

Supongamos ahora que algún $\angle(h, k)$ es congruente con $\angle(h', k')$. Como, por el axioma III,4, $\angle(h, k)$ es congruente consigo mismo: $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$, del teorema 19 sigue que $\angle(h', k')$ es congruente con $\angle(h, k)$. Resumiendo, de

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

sigue que

$$\angle(h', k') \equiv \angle(h, k).$$

Queda así demostrado que la relación de congruencia de ángulos es simétrica (recíproca). En virtud del teorema 19, es también transitiva. Conjuntamente con esto, resulta ser simétrica y transitiva también la relación de congruencia de triángulos.

Las restantes proposiciones básicas de la geometría pueden desarrollarse, por ejemplo, en el orden siguiente.

DEFINICIÓN 9. Dos ángulos que tengan vértice común, un lado común y cuyos lados restantes forman una línea recta, se denominan *adyacentes*. Dos ángulos con vértice común cuyos lados forman líneas rectas dos a dos, se llaman *opuestos por el vértice*.

TEOREMA 20. *Si dos ángulos son (mutuamente) congruentes, los ángulos adyacentes a ellos también serán congruentes.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ (fig. 25). Sean h_1 la semirrecta que complementa h, hasta la recta, y h_1', la semirrecta que complementa h' hasta la recta; denotemos por O y O' los vértices de $\angle(h,k)$ y (h',k'). Fijemos sobre las semirrectas h, k y h_1 puntos A, B y C respectivamente. Por el axioma III,1, en las semirrectas h', k', y h_1' existirán puntos A', B' y C' tales que $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$ y $OC \equiv O'C'$. De aquí, por el axioma III,3, sigue que $AC \equiv A'C'$; por el axioma III,5, será $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ (o bien $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$), por el teorema 14, $AB \equiv A'B'$. Como $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ y $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, aplicando nuevamente el teorema 14 hallamos que $BC \equiv B'C'$. Como $OB \equiv O'B'$, $OC \equiv O'C'$ y $BC \equiv B'C'$, por el teorema 18 será $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$, es decir, $\angle(k,h_1) \equiv \angle(k',h_1')$, que es lo que se pedía.

TEOREMA 21. *Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes entre sí.*

La demostración sigue fácilmente del teorema 20, pues dos ángulos opuestos por el vértice tienen un ángulo adyacente común.

Un ángulo congruente con su adyacente se llama *recto*.

A fin de demostrar la existencia de ángulos rectos, tomemos un $\angle(h,k)$ arbitrario y construyamos $\angle(h',k)$ congruente con $\angle(h,k)$, pero situado al otro lado de k (la posibilidad de hacer esto se asegura por el axioma III,4). Construyamos sobre h y h', a partir del vértice común, segmentos iguales, y unamos sus extremos con una recta. Si esta recta pasa por el vértice de $\angle(h,k)$, el propio ángulo $\angle(h,k)$ será recto. En caso contrario, ésta cortará bien a la semirrecta k, bien a su complemento. Pero entonces, del axioma III,5 —o bien del teorema 20 y del axioma III,5, respectivamente— sigue que esta recta forma ángulos rectos ya sea con la semirrecta k, ya sea con su complemento.

TEOREMA 22. *Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\angle(h,k)$ y $\angle(h',k')$ rectos (fig. 26); sean $\angle(k,h_1)$ y $\angle(k,h_1')$ los adyacentes con ellos; sean O y O' los vértices de estos ángulos. Supongamos que $\angle(h,k) \not\equiv \angle(h',k')$. Por el axioma III,4, habrá una semirrecta k'' con origen O', del mismo lado de la recta $\angle(h_1',h')$ que k' y tal que $\angle(h,$

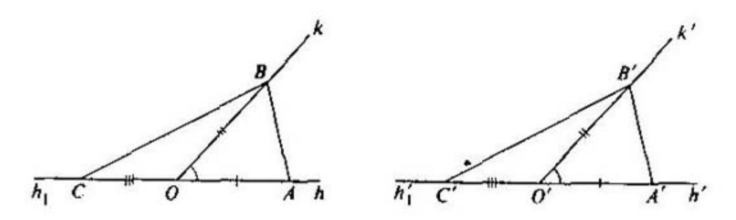


Fig. 25

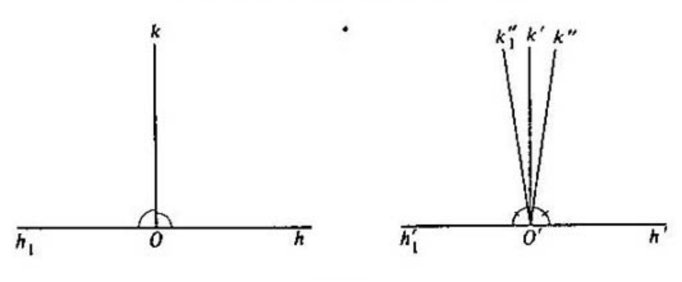


Fig. 26

$k) \equiv \angle(h', k'')$. Bajo nuestra hipótesis, la semirrecta k'' no puede coincidir con k'. Entonces debe estar o bien dentro de $\angle(h', k')$, o bien en el interior de $\angle(h_1', k')$. (Esto sigue del teorema 11a y del axioma de Pasch II,4). Supongamos, por ejemplo, que k'' está dentro de $\angle(h', k')$. En virtud del axioma III,4, existe una semirrecta k_1'', con origen O' y del mismo lado de la recta (h_1', h') que k', tal que $\angle(h', k'') \equiv \angle(h_1', k_1'')$. Como $\angle(h', k') \equiv \angle(h_1', k')$, por el teorema 16a la semirrecta k_1'' estará dentro de $\angle(h_1', k')$; por esto, dicha semirrecta no puede coincidir con k''. De aquí y de III,4 tenemos que $\angle(h_1', k'') \not\equiv \angle(h_1', k_1'')$. Pero, por otra parte, $\angle(h_1', k'') \equiv \angle(h_1, k)$ (por el teorema 20) $\equiv \angle(h, k) = \angle(h', k'') \equiv \angle(h_1', k_1'')$, lo cual contradice el resultado precedente. De modo análogo se obtiene una contradicción en el caso en que k'' pase dentro de $\angle(h_1', k)$. Con esto, queda demostrado el teorema por reducción al absurdo.

DEFINICIÓN. Sean A y B puntos diferentes. Diremos que el punto O es *el punto medio del segmento* AB, si está sobre la recta AB y satisface la condición $AO \equiv OB$.

TEOREMA 23. *Para cada segmento existe un único punto medio; el punto medio de un segmento es punto interior de éste.*

En otras palabras: *cada segmento se puede dividir por la mitad, y además de modo único.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado el segmento AB (fig. 27). Construyamos los ángulos congruentes $\angle MAB$ y $\angle NBA$ de forma que las semirrectas AM y BN estén en lados diferentes con respecto a la recta AB; esto puede hacerse en virtud del axioma III,4. Construyamos sobre las semirrectas AM y BN segmentos congruentes AC y BD. Como los puntos C y D están en lados diferentes con respecto a la recta AB, el segmento CD intersecará a la recta AB en algún punto; lo denotaremos por O.

La elección de los segmentos congruentes AC y BD se efectúa observando la siguiente precaución: si las rectas AM y BN se cortan, elegimos el punto C entre A y dicho punto de intersección; luego construimos $BD \equiv AC$ (en realidad este caso hipotético es imposible, pero no lo demostraremos ahora). Ahora resulta claro que el punto O no puede coincidir ni con A, ni con B. Es fácil demostrar, asimismo, que O no puede estar fuera del segmento AB. Precisamente, si suponemos, por ejemplo, que A está entre O y B, llegamos a una contradicción con el axioma de Pasch, con respecto al triángulo OBD (pues la recta AM interseca al segmento OB en el punto A, pero no puede intersecar ni a OD, ni a BD). Así, pues, O está entre A y B. De-

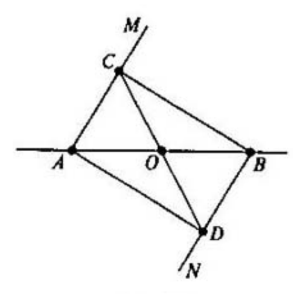


Fig. 27

mostremos que O es el punto medio del segmento AB. En efecto, por el teorema 14, los triángulos ABC y ABD son congruentes; por lo tanto, $CB \equiv AD$. De aquí y del teorema 18 se desprende la congruencia de los triángulos ACD y BCD, lo cual nos da la congruencia de $\angle ACD$ con $\angle CDB$. Utilizando esto último y recurriendo al teorema 15, concluimos que los triángulos ACO y BDO son congruentes; por consiguiente, $AO \equiv OB$.

Ahora mostraremos que el segmento tiene sólo un punto medio. Supongamos lo contrario, es decir, que AB tiene dos puntos medios. Por el axioma III,1, uno de ellos está entre el otro y el punto A *); por esto, podemos denotarlos con las letras O_1 y O_2, de modo que O_1 está entre A y O_2. Entonces, en virtud del lema 2, el punto O_2 está entre O_1 y B. Pero con las relaciones $AO_1 \equiv BO_1$, $AO_2 \equiv BO_2$ y la condición de que O_1 está entre A y O_2, del teorema 13 sigue que el punto O_1 está entre B y O_2. Así, por una parte O_2 está entre B y O_1, y por la otra, O_1 está entre B y O_2. Esto contradice el axioma II,3.

Citemos, además, los teoremas siguientes:

TEOREMA 17 bis. *En un triángulo isósceles la mediana de la base es a la vez altura y bisectriz del ángulo al vértice.* •

TEOREMA 24. *Cada ángulo se puede dividir por la mitad, y además de manera única.*

TEOREMA 25. *De cada punto se puede trazar a una recta dada una perpendicular y sólo una.*

TEOREMA 26. *De cada punto sobre una recta se puede levantar una única perpendicular a ella.*

§ 18. Utilizando los axiomas I — III pueden definirse las relaciones «mayor» y «menor» para segmentos y ángulos.

DEFINICIÓN 10. Dados los segmentos AB y $A'B'$, si en el interior de AB existe un punto C tal que

$$AC \equiv A'B',$$

se dice que *el segmento AB es mayor que el $A'B'$*, o bien que *$A'B'$ es menor que AB*; se escribe $AB > A'B'$, o bien $A'B' < AB$, respectivamente.

---

*) En virtud del axioma III,1, el punto medio está dentro del segmento; de aquí sigue que si el segmento AB posee dos puntos medios, uno de ellos está entre el otro y el punto A.

DEFINICIÓN 11. Dados $\angle(h, k)$ y $\angle(h', k')$, si entre las semirrectas con origen en el vértice de $\angle(h, k)$ y que pasan por su interior, existe una semirrecta l tal que

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

se dice que $\angle(h, k)$ *es mayor que* $\angle(h', k')$, o bien que $\angle(h', k')$ *es menor que* $\angle(h, k)$.

TEOREMA 27. *Dados dos segmentos arbitrarios AB y CD, siempre se cumple alguna de las tres relaciones*

$$AB \equiv CD, \qquad AB > CD, \qquad AB < CD,$$

y cada una de ellas excluye a las otras dos.

Efectivamente, por el axioma III,1, sobre la recta AB existe un punto M, situado al mismo lado de A que B, que satisface la condición $AM \equiv CD$. Si el punto M está entre A y B, entonces $AB > CD$; si M coincide con B, entonces $AB \equiv CD$; si B está entre A y M, será $AB < CD$. Queda así establecida la existencia de alguna de las relaciones indicadas.

Mostremos ahora que cualquiera de ellas excluye las demás. Sea, por ejemplo, $AB > CD$. En tal caso, en el segmento AB existe un punto M, para el cual $AM \equiv CD$. Si los segmentos AB y CD, además de la relación $AB > CD$, satisficieran también la relación $AB \equiv CD$, por el axioma III,2 tendría lugar la congruencia $AM \equiv AB$, lo cual contradiría el axioma III,1. Análogamente, si $AB > CD$, no puede tener lugar la relación $AB < CD$. En efecto, si $AB > CD$ y $AB < CD$, entre A y B existe un punto M tal que $AM \equiv CD$, y entre C y D existe un punto N tal que $CN \equiv AB$. Llegamos a una contradicción con el teorema 13.

TEOREMA 28. *Si $AB < A'B'$ y $A'B' < A''B''$, entonces $AB < A''B''$.*

La demostración puede obtenerse mediante razonamientos evidentes utilizando el teorema 13 y el 8 (o bien el lema 2).

Como corolario del teorema 28, presentemos el teorema siguiente.

TEOREMA 29. *Si el segmento CD es parte del segmento AB, entonces $CD < AB$.*

El lector puede enunciar fácilmente los teoremas correspondientes a los 27, 28, 29, para ángulos en lugar de segmentos.

Después de haber introducido para segmentos y ángulos los conceptos de «mayor» y «menor», se pueden enunciar y demostrar los siguientes teoremas.

TEOREMA 30. *El ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los interiores no adyacentes.*

Aunque el teorema 30 es de suma importancia en nuestra exposición, no lo demostraremos aquí, pues la demostración que se expone comúnmente en los textos se basa rigurosamente en los axiomas I — III.

En nuestra reseña histórica, este teorema fue referido en el § 5, donde también se dio una demostración.

TEOREMA 31. *En cada triángulo al menos dos ángulos son agudos.*

TEOREMA 32. *En un triángulo a mayor lado le corresponde mayor ángulo opuesto, y recíprocamente, a mayor ángulo le corresponde mayor lado opuesto.*

TEOREMA 33. *La perpendicular es más corta que cualquier oblicua.*

TEOREMA 34. *Cada lado de un triángulo es menor que la suma y mayor que la diferencia de los otros dos.*

Del teorema 34 sigue que *un segmento de recta es más corto que cualquier quebrada que une sus extremos.*

Hemos referido una serie de teoremas que pueden ser demostrados basándonos en los axiomas I — III. Sin embargo, estos axiomas no permiten deducir muchos resultados importantes de la geometría. Por ejemplo, éstos no implican que una recta que pasa por algún punto interior de un círculo debe intersecar la circunferencia. Con los axiomas I — III, al igual que con los I — II, aún no puede demostrarse que el conjunto de los elementos de la geometría es innumerable (para más detalles, véase el § 72).

§ 19. Los axiomas del tercer grupo permiten definir los movimientos.

Como ya observamos en su oportunidad, para Euclides los movimientos constituyen un concepto evidentemente claro, que no es fundamentado por axioma alguno. Figuras que se pueden superponer se consideran iguales. En consecuencia, en el sistema de Euclides los movimientos constituyen un concepto básico (pero que queda sin fundamentar), mientras que la congruencia es un concepto derivado. Hilbert introduce la congruencia como concepto básico, después de lo cual se puede definir el movimiento como derivado. Ahora expondremos esta definición.

Sean dados dos conjuntos de puntos Ω y Ω', finitos o infinitos, es indiferente. Supongamos que entre los puntos de estos conjuntos se ha establecido una correspondencia biyectiva. Cada par de puntos M y N del conjunto Ω determina un segmento MN. Sean M' y N' los puntos de Ω' que corresponden a los puntos M y N. Convendremos en llamar a $M'N'$ el segmento correspondiente a MN.

Si la correspondencia entre Ω y Ω' es tal que los segmentos correspondientes resultan siempre ser congruentes, los conjuntos Ω y Ω' se llamarán, asimismo, congruentes. En tal caso se dice, también, que cada conjunto Ω y Ω' se obtiene mediante UN MOVIMIENTO *del otro, o bien que uno (cualquiera) de estos conjuntos puede* SER SUPERPUESTO *al otro.* Los puntos correspondientes de los conjuntos Ω y Ω' se llaman *coincidentes bajo la superposición.*

(No introduciremos ahora diferencias entre los conjuntos propiamente coincidentes y mutuamente especulares.)

Tienen lugar los teoremas siguientes.

TEOREMA I. *Puntos que se encuentran sobre una recta son llevados por todo movimiento a puntos que también están sobre la recta.*

Este resultado se desprende directamente del teorema 34. Efectivamente, supongamos que sobre alguna recta a se considera algún conjunto de puntos; debemos demostrar que los puntos del conjunto congruente están situados sobre una misma recta a'. Escojamos en el conjunto dado sobre la recta a tres puntos A, B, C y supongamos, para la precisión, que B está entre A y C. Entonces, el segmento AC está formado por los segmentos AB y BC. Si los puntos A', B', C', obtenidos con un traslado congruente de los puntos A, B, C no están sobre una misma recta, forman un triángulo y, por el teorema 34, el segmento $A'C'$ debe ser menor que el segmento formado uniendo $A'B'$ y $B'C'$. Y como $A'B' \equiv AB$, $B'C' \equiv BC$, debe tener lugar la desigualdad $A'C' < AC$, que contradice la condición de congruencia de conjuntos.

Los teoremas que siguen se dan sin demostración.

TEOREMA II. *Puntos que están sobre un plano pasan mediante un movimiento en puntos que también se encuentran sobre cierto plano.*

TEOREMA III. *El ángulo entre dos segmentos que unen algún punto de un conjunto con otros dos, es congruente al ángulo entre los segmentos correspondientes del conjunto congruente.*

TEOREMA A. *Sean M, N, P, Q cuatro puntos de alguna figura* Ω (es decir, de algún conjunto de puntos), *que no están sobre un mismo plano; sean M' un punto arbitrario del espacio; a, alguna recta que pasa por M', y α, algún plano que contiene a la recta a. Entonces la figura Ω puede ser desplazada con un movimiento, de manera que el punto M coincida con M', el punto N esté sobre la recta a a un lado prefijado cualquiera del punto M', el punto P esté en el plano α a un lado arbitrario prefijado de la recta a, y el punto Q ocupe una posición a un lado prefijado cualquiera del plano α.*

TEOREMA B. *Si tres puntos M, N, P de la figura Ω que no están en una misma recta coinciden con sus puntos correspondientes M', N', P' de la figura congruente Ω', son posibles dos casos:* 1) *cada punto de Ω coincide con el punto correspondiente de la figura Ω';* 2) *cada punto de la figura Ω que se encuentra en el plano MNP coincide con el punto correspondiente de Ω', mientras que los restantes puntos correspondientes de estas figuras se encuentran en lados diferentes con respecto al plano MNP y cada punto de la figura Ω' queda determinado de manera unívoca por la posición del punto correspondiente de la figura* Ω (en este último caso las figuras se llaman *simétricas*, o bien *mutuamente especulares*, con respecto al plano MNP).

En la planimetría a los teoremas A y B les corresponden los dos que siguen.

TEOREMA C. *Sean M, N, P tres puntos de alguna figura Ω que no están en una recta, M', un punto arbitrario del plano, a, alguna recta que pasa por M'. Entonces Ω se puede desplazar mediante un movimiento de manera que el punto M se superponga a M', el punto N quede sobre la recta a a un lado prefijado cualquiera del punto M', y el punto P ocupe alguna posición a un lado arbitrario prefijado de la recta a.*

TEOREMA D. *Si dos puntos diferentes M* y *N de una figura Ω coinciden con los puntos correspondientes M' y N' de la figura congruente Ω', son posibles dos casos:* 1) *cada punto de Ω coincide con el punto correspondiente de la figura Ω';* 2) *cada punto de la figura Ω que esté sobre la recta MN coincide con el punto correspondiente de Ω', mientras que los demás puntos correspondientes de estas figuras están en lados diferentes con respecto a la recta MN, y cada punto de Ω' queda determinado unívocamente por la posición del punto correspondiente de la figura* Ω (en el último caso las figuras se llaman *simétricas* con respecto a la recta MN).

Los teoremas A y C caracterizan el grado de libertad de los movimientos de figuras. Los teoremas B y D establecen condiciones que determinan la posición de una figura; precisamente, tres puntos de una figura determinan su posición en el espacio salvo la reflexión especular y en la planimetría dos puntos determinan la posición de una figura salvo una simetría con respecto a una recta.

Al definir el movimiento de una figura Ω podemos, en particular, suponer que el conjunto de sus puntos ocupa todo el espacio y, en la planimetría, todo el plano, es decir, se puede suponer que para cada punto del espacio —o del plano, para la planimetría— hay un punto correspondiente, de manera que si a M y N les corresponden los puntos M' y N', entonces $MN \equiv M'N'$. En tal caso diremos que se efectúa un movimiento de todo el espacio, o bien de todo el plano, en el caso de la planimetría.

El movimiento de una figura, así como el de todo el espacio, se llama *giro con respecto al punto O*, si O coincide con el punto correspondiente O', es decir, si O permanece en su lugar (es un punto fijo). El movimiento se llama *giro con respecto a*

una recta a, si cada punto de a coincide con su punto correspondiente, es decir, si cada punto de la recta a queda fijo. La recta a se denomina *eje de giro**).

Un movimiento se llama *traslación* (también traslado o desplazamiento) *a lo largo de la recta u*, si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

1) cada punto de la recta u se desplaza, quedando sobre la misma recta u;

2) cada punto de algún plano α que contiene la recta u permanece en dicho plano, al mismo lado de la recta u:

3) cada punto que no pertenece a α permanece al mismo lado de este plano.

El movimiento en que todos los puntos permanecen fijos se incluye entre las traslaciones a lo largo de cualquier recta.

El giro alrededor de un punto y la traslación a lo largo de una recta representan casos particulares de movimientos. Sin embargo, cualquier movimiento puede ser reducido a la aplicación sucesiva de una traslación y un giro.

A fin de iluminar el sentido exacto de esta última afirmación, destacaremos ahora un resultado que juega un papel fundamental en el estudio de los movimientos.

Supongamos que dos movimientos del espacio se efectúan de manera sucesiva, uno tras otro. El primero lleva un punto M arbitrario en el punto M'; el segundo lleva M' a la posición M''. Como resultado se tiene una nueva transformación de todos los puntos del espacio, en la cual el punto arbitrario M pasa al punto M''; llamaremos *producto de los movimientos* a la transformación así obtenida. A fin de que el producto de dos movimientos quede bien determinado, no basta dar los movimientos componentes, es necesario además indicar en qué orden se efectúan éstos.

TEOREMA. *El producto de dos movimientos es un movimiento.*

La demostración de este importante teorema es totalmente evidente. En efecto, supongamos que dos puntos arbitrarios M y N del espacio se trasladan en los puntos M' y N' por el primero de los movimientos dados, y que estos puntos, a su vez, van en M'' y N'' como resultado del segundo. Hay que demostrar que el segmento MN es congruente con el $M''N''$. Pero por la hipótesis del teorema, $MN \equiv M'N'$ y $M'N' \equiv M''N''$; de aquí, en virtud del axioma III,2 y las proposiciones que le siguen, tenemos que $MN \equiv M''N''$.

La propiedad de los movimientos expresada por el teorema demostrado se llama *propiedad de grupo* (más detalladamente sobre los grupos véase el § 156). Al existir esta propiedad, puede plantearse el problema de representar un movimiento arbitrario como producto de algunos movimientos sencillos especiales. En particular (cosa que observamos arriba), cada movimiento es el producto de una traslación y un giro.

Para demostrar esto, consideremos alguna figura Ω (cuyos puntos pueden, en particular, llenar todo el espacio) y supongamos que algún movimiento la transforma en la figura congruente Ω'. Sea M un punto arbitrario de la figura Ω, y M' su nueva posicion.

Denotemos con Ω'' la figura que se obtiene de Ω por la traslación que lleva M en M'. La existencia de tal traslación sigue del teorema A. Evidentemente, Ω' y Ω'' son

*) Estas definiciones no coinciden con las habituales, pues no excluimos transformaciones especulares de las figuras.

congruentes; además, el punto de la figura Ω'' que corresponde a M' en la figura Ω', coincide con M'. Por esto, el movimiento que hace coincidir Ω'' con Ω' es un giro alrededor del punto M'. Así, pues, el movimiento arbitrario de la figura de su posición Ω a la posición Ω' se representa como el producto de la traslación de ésta de la posición Ω a la Ω'', y el giro que hace coincidir a Ω'' con Ω'.

7. Grupo IV. Axiomas de continuidad

§ 20. Utilizando los axiomas I — III hemos establecido la comparación de segmentos, de modo que dados dos cualesquiera, uno de ellos es o bien mayor que el otro, o bien menor que él, o bien igual a éste (teorema 27 del § 18).

Los axiomas I — III, con todo, no son suficientes para poder efectuar el proceso de medición, como resultado del cual la razón entre un segmento arbitrario y la unidad lineal se expresa por un número determinado.

La fundamentación para la medición de segmentos se da por el axioma IV,1 de abajo, comúnmente llamado axioma de Arquímedes. Este permite, eligiendo una unidad lineal, definir para cada segmento de manera única un número positivo, llamado longitud de este segmento. A fin de poder establecer, recíprocamente, la existencia de un segmento cuya longitud sea igual a cualquier número positivo prefijado, es necesario introducir un axioma más.

Apartándonos de la exposición de Hilbert, llamamos IV,2 a este axioma, que no es otra cosa que el conocido principio de Cantor de los intervalos encajados. En el sistema de Hilbert, la proposición IV,2 corresponde al axioma de completitud, que será confrontado en el capítulo IV con el axioma de Cantor.

IV,1 (AXIOMA DE ARQUÍMEDES). *Sean AB y CD segmentos arbitrarios. Entonces sobre la recta AB existe un número finito de puntos $A_1, A_2, \dots A_n$, situados de manera que A_1 está entre A y A_2, A_2 está entre A_1 y A_3, etc., tales que los segmentos $AA_1, A_1A_2, \dots A_{n-1}A_n$ son congruentes al segmento CD y B está entre A y A_n* (fig. 28).

IV,2 (AXIOMA DE CANTOR). *Supongamos que en una recta arbitraria a se da una sucesión infinita de segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \dots$, de los cuales cada uno está en el interior del precedente*; *supongamos, además, cualquiera que sea un segmento prefijado, existe un índice n para el cual A_nB_n es menor que este segmento. Entonces existe sobre la recta a un punto X, que está en el interior de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc.* (fig. 29).

De las condiciones del axioma sigue de inmediato que *existe sólo un punto X que está dentro de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc.*

En efecto, si sobre la recta a existe otro punto Y interior a todos los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \dots$, para todo n el segmento A_nB_n será mayor que el XY, cosa excluida por la condición.

DEFINICIÓN 12. Supongamos que a cada segmento le corresponde un número positivo determinado, de manera que:

1) a segmentos iguales correspondan números iguales;

2) si B es un punto del segmento AC y a los segmentos AB y BC les corresponden los números a y b respectivamente, entonces al segmento AC le corresponde el número $a + b$;

3) a algún segmento OO' le corresponde el número 1.

Fig. 28 *Fig. 29*

Entonces el número que corresponde a cada segmento de la forma indicada se llama *longitud* de este segmento; el segmento OO' se denomina *unidad lineal*, o bien *unidad de medida de longitudes.*

Demostremos que las condiciones 1,2 y 3 determinan de manera única la longitud de cada segmento. Primeramente supongamos que a cada segmento se le ha puesto en correspondencia un número positivo de modo que se satisfagan las condiciones 1, 2, y 3 y mostremos que no puede haber otra correspondencia entre números y segmentos que observe estas tres condiciones. Hecho esto, nos convenceremos de la posibilidad de efectuar tal correspondencia. (En otras palabras, primero probaremos la unicidad, y después la existencia de la longitud.)

Ante todo, observemos que si un segmento AB es mayor que otro $A'B'$, la longitud a de AB tendrá que ser mayor que la longitud a' de $A'B'$. En efecto, según la definición de «mayor» (véase el § 18), el segmento AB contiene un punto P que determina, conjuntamente con el punto A, un segmento AP igual al $A'B'$. Supongamos que las longitudes de los segmentos AP y PB sean x e $y (x > 0, y > 0)$. En virtud de la condición 2, tenemos que $a = x + y$; por la condición 1, $x = a'$, de donde $a = a' + y$, por lo cual $a > a'$.

Ahora bien, de acuerdo al teorema 23, la unidad lineal OO' puede dividirse en la mitad. Sea O_1 el punto medio del segmento OO'. Como las longitudes de los segmentos congruentes OO_1 y O_1O' son iguales y su suma es igual a la unidad, cada uno de ellos tendrá longitud igual a $\frac{1}{2}$. Dividiendo el segmento OO_1 por la mitad mediante el punto O_2, hallaremos que la longitud del segmento OO_2 es igual a $\frac{1}{2^2}$, etc. Llamaremos a los segmentos OO_1, OO_2, ... , la mitad de la longitud lineal, la cuarta parte de ésta, etc.

Consideremos ahora un segmento arbitrario AB, cuya longitud sea igual al número a. Construyamos sobre la recta AB, a partir de A y en el sentido del punto B, segmentos AA_1, A_1A_2, etc., congruentes a OO'. Si alguno de los puntos A_n coincide con B, por la condición 2 será necesariamente $a = n$. Si ninguno de los puntos $A_1, A_2, \ldots$ coincide con B, en virtud del axioma de Arquímedes existirán dos puntos A_n y A_{n+1} tales que B esté entre ellos. En este caso, el número a tendrá que satisfacer las desigualdades.

$$n < a < n + 1,$$

pues el segmento AB es mayor que el AA_n y menor que el AA_{n+1}, siendo las longitudes de estos últimos iguales a n y $n + 1$, respectivamente. Queda así determinado el número a salvo una unidad. Ahora mostraremos que a se puede determinar con cualquier grado de exactitud. El proceso expuesto a continuación, que permite hallar el valor de a, se llama *medida* (o *medición*).

Dividamos el segmento A_nA_{n+1} en dos mitades, por medio del punto P_1. Entonces el punto B o bien está entre A_n y P_1, o bien entre P_1 y A_{n+1}, o bien coincide con

P_1. En otras palabras, el segmento A_nB o bien es menor que la mitad de la unidad lineal, o bien es mayor, o bien es igual a ella. En correspondencia con esto, tendremos: o bien

$$n < a < n + \frac{1}{2},$$

o bien

$$n + \frac{1}{2} < a < n + 1,$$

o bien

$$a = n + \frac{1}{2}.$$

En el último caso, a queda determinado exactamente, y el proceso de medida concluye; en los dos primeros, a queda determinado salvo $\frac{1}{2}$, y el proceso debe continuar. Dividiendo aquél de los intervalos A_nP_1, P_1A_{n+1} que contiene a B en dos mitades por medio del punto P_2 podemos, según la ubicación del punto B, o bien determinar el valor exacto del número a, si B coincide con P_2, y concluir así el proceso de medida, o bien, si B no coincide con P_2, hallar el valor de a con una exactitud de hasta 1/4 y continuar después el proceso de medida análogamente.

En lugar de encerrar a entre valores cada vez más estrechos, resulta más cómodo representar a en forma de fracción binaria

$$a = n, n_1n_2 \dots ;$$

aquí n es la parte entera, que muestra cuántas unidades lineales contiene el segmento AB; n_1, la primera cifra después de la coma, será 1 ó 0, según contenga o no el segmento AB, además de las n unidades lineales, una mitad de la unidad lineal; n_2 será asimismo 1 ó 0, según el segmento AB contenga o no, además de n unidades lineales y n_1 mitades de la unidad lineal, un cuarto de unidad, etc. La fracción binaria que expresa a puede ser finita, si B coincide con alguno de los puntos P_1, P_2, ... , P_n, ... que construimos en el proceso de medida del segmento AB, o bien infinita, si B no coincide con ninguno de estos puntos. Por ejemplo, si al medir se encuentra que AB contiene exactamente una unidad lineal con un cuarto y un octavo de unidad lineal, entonces $a = 1{,}011$. En este caso, B coincidirá con P_3. Se sobreentiende que una fracción binaria finita puede considerarse formalmente como infinita; por ejemplo, $a = 1{,}011000\dots$ En lo sucesivo, si subrayamos que una fración binaria es infinita, sobreentenderemos que es esencialmente infinita, es decir, no tiene tal orden desde el cual siguen únicamente ceros. Así, habiendo supuesto que a cada segmento se le ha puesto en correspondencia una longitud de manera que se satisfagan las condiciones 1, 2 y 3, hemos sido capaces, basándonos en el axioma de Arquímedes, de hallar para cualquier segmento dado cada cifra de la representación binaria de su longitud. Por lo tanto, las longitudes de los segmentos quedan determinadas de manera unívoca por las condiciones 1, 2 y 3.

Debemos ahora mostrar que a cada segmento se le puede poner en correspondencia un número positivo de manera que se satisfagan las condiciones 1, 2 y 3. Para esto, pongamos en correspondencia a cada segmento, como su longitud, el número obtenido como resultado de su medición por el proceso descrito arriba. Debemos demostrar que se satisfacen las condiciones 1, 2 y 3.

Ante todo, resulta claro que el proceso de medición, aplicado a la unidad lineal, da un número igual a 1. Por consiguiente, la condición 3 se satisface.

Además, para dos segmentos congruentes el proceso de medición da valores iguales de las longitudes. Esto es una consecuencia directa del teorema 13 del § 17, según el cual el sistema de puntos sobre dos rectas, obtenidos en el proceso de medida de segmentos, tiene idéntico orden de disposición de sus puntos; por ende, al medir dos segmentos congruentes, en los desarrollos binarios obtenidos surgen sucesivamente en posiciones iguales cifras iguales. Por lo tanto, la condición 1 también se satisface.

Queda demostrar que se satisface la condición 2.

Demostremos previamente dos proposiciones auxiliares.

1. *Sea dado un segmento arbitrario PQ. Siempre es posible escoger un número n tan grande como para que al dividir la unidad lineal en 2^n partes iguales se obtengan segmentos cada uno de los cuales es menor que PQ* [*]).

Para demostrar esto, supongamos primero que la unidad lineal OO' fue dividida por medio del punto A en dos partes iguales OA, OA' y que cada una de ellas es mayor que el segmento PQ. Entonces dentro del segmento OA habrá algún punto O_1 tal que $OO_1 \equiv PQ$, y dentro de AO' habrá un punto A_1 tal que $AA_1 \equiv PQ$. Determinemos a partir del punto O_1 en la dirección de A un segmento $O_1O_2 \equiv PQ$. Ahora observemos que 1) A está entre O_1 y A_1; 2) tienen lugar las congruencias $O_1O_2 \equiv A_1A$, $O_1A_1 \equiv A_1O_1$. De aquí y del teorema 13 sigue que O_2 está entre O_1 y A_1. Aplicando el lema 2 del § 14, hallamos que O_2 está entre O_1 y O'. En conclusión, si cada mitad de la unidad lineal OO' es mayor que PQ', entonces, construyendo segmentos OO_1 y O_1O_2 congruentes a PQ, no pasamos más allá del punto O'. De aquí sigue que si para todo n, al dividir la unidad lineal en 2^n partes iguales obtenemos segmentos $\geqslant PQ$, repitiendo el segmento PQ como sumando una cantidad arbitraria de veces no podremos superar la unidad lineal. Esto es una contradicción con el axioma de Arquímedes, quedando así demostrada nuestra proposición.

De esta proposición se desprende un corolario importante: el proceso de medición de un segmento no puede conducir a una fracción binaria infinita todas las cifras de la cual son iguales a 1, a partir de cierto orden.

En efecto, supongamos que se mide el segmento AB. Utilizaremos las notaciones usadas arriba al describir el proceso de medición. Si como resultado de la medición se obtiene una fracción binaria infinita con parte entera n, entonces B estará entre A_n y A_{n+1}. Supongamos primeramente que en la fracción obtenida las unidades comienzan en seguida después de la coma. Entonces el punto B está en el interior de cada segmento P_1A_{n+1}, P_2A_{n+1}, ... ; en consecuencia, el segmento BA_{n+1} es menor que cada una de las 2^n partes iguales de la unidad lineal para todo n, cosa que contradice la proposición 1. Supongamos ahora que la fracción obtenida tiene un cero en el k-ésimo orden, y unos en los órdenes siguientes. Entonces el punto B está dentro de cada segmento $P_{k+1}P_k$, $P_{k+2}P_k$, ... y obtenemos nuevamente una contradicción con la proposición 1.

---

[*]) Cada segmento puede ser dividido en 2^n partes iguales, ya que todo segmento puede dividirse en dos partes iguales (véase el teorema 23 del § 17).

El resultado que acabamos de establecer facilita la comparación de fracciones binarias que se obtienen como resultado de medición de segmentos. Precisamente, sean a y b fracciones binarias obtenidas en la medida de dos segmentos; si estas fracciones coinciden hasta cierto orden, y en el orden siguiente la fracción a tiene un cero, y la b, un uno, se puede afirmar con seguridad que el número representado por la fracción a es menor que el representado por b (con respecto a fracciones binarias cualesquiera esto puede ser falso, pues, por ejemplo, las fracciones 1,11000... y 1,10111 ... expresan el mismo número).

2. *Si el segmento A^*B^* es menor que el AB, y los números b^* y b fueron obtenidos al medir estos segmentos, entonces $b^* < b$.*

Como $A^*B^* < AB$, en el segmento AB existe un punto B' tal que $AB' \equiv A^*B^*$. Debemos mostrar que la medición del segmento AB' da un número menor que el obtenido al medir AB.

Construyamos, a partir del punto A en la dirección de B, segmentos AA_1, A_1A_2, ... , iguales a la unidad lineal. Convengamos, con respecto a un segmento arbitrario de la recta AB, en decir que un punto pertenece al segmento si está en su interior, o bien coincide con el extremo izquierdo (considerando que «de izquierda a derecha» es el sentido de A hacia B). Por ejemplo, el punto A_1 pertenecerá al segmento A_1A_2, el A_2, al segmento siguiente A_2A_3. Con esta convención, si B' y B pertenecen a segmentos diferentes del sistema AA_1, A_1A_2, ... , la parte entera del número b^* será menor que la parte entera de b y, en consecuencia, $b^* < b$. Si, en cambio, ambos puntos B y B' pertenecen al mismo segmento A_iA_{i+1}, b^* y b tendrán partes enteras iguales. Dividamos entonces el segmento A_iA_{i+1} en dos partes iguales. Si los puntos B' y B resultan estar en mitades diferentes, la primera cifra después de la coma en el desarrollo del número b^* será un cero, y en el de b, un uno, por lo cual $b^* < b$. Si, en cambio, ambos puntos B' y B pertenecen a una misma mitad del segmento A_iA_{i+1}, b^* y b tendrán partes enteras y primeras cifras después de la coma iguales. En tal caso, dividamos en dos partes iguales la mitad del segmento A_iA_{i+1} que contenga a ambos puntos B' y B, etc.

Continuando este proceso, llegaremos al fin a establecer la desigualdad $b^* < b$, siempre que B' y B no estén siempre en una misma de las dos mitades que se obtienen al dividir el segmento que fue determinado por el paso precedente de la construcción. Sin embargo, tal suposición debe ser descartada, por cuanto significa que el segmento $B'B$ es menor que cada una de las 2^n partes iguales de la unidad lineal para todo n, cosa que contradice la proposición auxiliar 1 ya demostrada.

Ahora podemos acometer directamente la demostración de que la condición 2 se verifica.

Sea AC un segmento arbitrario, B, algún punto interior de éste, a, b, c, los números obtenidos al medir los segmentos AB, BC y AC. Debemos establecer la igualdad

$$a + b = c.$$

Fijemos un entero positivo n y construyamos, a partir del punto B y en la dirección de A, segmentos BA_1, A_1A_2, ... , congruentes a los segmentos que se obtienen al dividir la unidad lineal en 2^n partes iguales. Del axioma de Arquímedes sigue que entre los puntos A_1, A_2, ... habrán dos sucesivos, A_k y A_{k+1}, tales que A_k pertenece al segmento BA o bien coincide con A, y A_{k+1} conjuntamente con el punto B determina un segmento BA_{k+1} que contiene al punto A. Análogamente se determinan

los puntos C_l y C_{l+1}, poniendo en la dirección del punto C los segmentos BC_1, C_1C_2, ... , congruentes con los segmentos A_iA_{i+1}. Evidentemente, tienen lugar las siguientes desigualdades entre segmentos:

$$BA_k \leqslant AB < BA_{k+1}, \qquad BC_l \leqslant BC < BC_{l+1},$$
$$A_kC_l \leqslant AC < A_{k+1}C_{l+1}.$$

De aquí, tomando en consideración la proposición auxiliar 2, se obtienen desigualdades para los números correspondientes:

$$\frac{k}{2^n} \leqslant a < \frac{k+1}{2^n}, \quad \frac{l}{2^n} \leqslant b < \frac{l+1}{2^n}, \quad \frac{k+l}{2^n} \leqslant c < \frac{k+l+2}{2^n}.$$

De estas desigualdades sigue que

$$\frac{k+l}{2^n} \leqslant a + b \leqslant \frac{k+l+2}{2^n}, \qquad \frac{k+l}{2^n} \leqslant c < \frac{k+l+2}{2^n}.$$

En consecuencia,

$$|a + b - c| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pero como n es un entero positivo arbitrario,

$$a + b - c = 0$$

y, por lo tanto, $a + b = c$, cosa que deseábamos establecer.

Así, pues, los axiomas I — III y IV,1 permiten fundamentar la medida de segmentos y poner en correspondencia a cada segmento un número positivo, llamado su longitud. Dicha longitud se determina unívocamente por las condiciones 1, 2 y 3.

De acuerdo con la condición 1, segmentos iguales tienen igual longitud. Del teorema 27, § 18, y de la proposición auxiliar 2 sigue que, recíprocamente, segmentos con igual longitud son iguales entre sí. Podemos, pues, sustituir la comparación de segmentos por la de sus longitudes.

En forma totalmente análoga a la longitud de un segmento se define la magnitud de un ángulo.

DEFINICIÓN 13. Supongamos que a cada ángulo le corresponde un número positivo, de forma que se observan las siguientes condiciones:

1) a ángulos iguales corresponden números iguales;

2) si la semirrecta l está en el interior de $\angle (h, k)$ y tiene origen en su vértice, y si a $\angle (h, l)$ y $\angle (l, k)$ les corresponden los números α y β, entonces a $\angle (h, k)$ le corresponde el número $\alpha + \beta$.

3) a algún $\angle (o, o')$ le corresponde el número 1.

Entonces el número que corresponde a cada ángulo de la manera indicada se llama *magnitud* de este ángulo; $\angle (o, o')$ lleva el nombre de *unidad angular.*

La definición unívoca y la existencia de las magnitudes de ángulos se demuestran igual que la definición unívoca y existencia de longitudes de segmentos. Aquí no es necesario introducir un nuevo axioma para ángulos, que corresponda al de Arquímedes para segmentos: tal proposición ya puede ser demostrada.

§ 21. De acuerdo con la exposición precedente, conjuntamente con el conjunto de todos los segmentos queda completamente determinado el conjunto numérico de sus longitudes; estamos suponiendo aquí, desde luego, que ha sido elegida la unidad lineal. Sin embargo, *de los axiomas* I—III *y* IV,1 *no sigue que las longitudes de los*

segmentos cubren todos los números reales positivos. Basándonos en estos axiomas no puede siquiera establecerse que el conjunto de longitudes es innumerable.

Sólo al ampliar el sistema de axiomas, agregando, por ejemplo, el axioma de Cantor IV,2 enunciado más arriba, obtenemos la posibilidad de demostrar el teorema que sigue.

TEOREMA 35. *Cualquiera que sea el número real $a > 0$, existe algún segmento cuya longitud sea igual a a.*

Para demostrarlo, representemos a en forma de fracción binaria $n, n_1 n_2 \ldots$ Supongamos primero que a no puede ser representado como fracción binaria finita. En tal caso, la fracción $n, n_1 n_2 \ldots$ no puede tener solamente unos, a partir de algún orden (pues la fracción infinita $n, n_1 n_2 \ldots n_k 0111 \ldots$ representa el mismo número que la fracción finita $n, n_1 n_2 \ldots n_k 1$).

Consideremos alguna semirrecta con origen en el punto A y determinemos sobre ella segmentos $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}$, congruentes a la unidad lineal. El último de ellos, es decir, el A_nA_{n+1}, lo dividamos en dos partes iguales por medio del punto P_1. Convendremos en llamar «izquierda» a aquella mitad del segmento A_nA_{n+1} que se encuentra del lado del punto A, y «derecha» a la otra. Extendremos la misma condición a cualquier otro segmento de la semirrecta en el caso de que lo dividamos por la mitad. Denotemos por l_1 el segmento que coincide con la mitad izquierda del segmento A_nA_{n+1}, si $n_1 = 0$, y con la derecha, si $n_1 = 1$. Dividamos, ahora, el segmento l_1 en dos mitades por medio del punto P_2 y denotemos por l_2 su mitad izquierda o derecha, según sea $n_1 = 0$ ó $n_1 = 1$. Continuamos este proceso indefinidamente.

Queda así determinada una sucesión de segmentos $l_1, l_2, \ldots$

Por construcción, los puntos interiores de cada uno de estos segmentos están dentro del precedente, y un extremo coincide con algún extremo del anterior. Sin embargo, no puede ocurrir que a partir de algún índice todos los segmentos l_n tengan extremo común (pues la fracción $n, n_1 n_2 \ldots$ no puede tener, a partir de algún orden, únicamente ceros o únicamente unos). En consecuencia, entre los segmentos $l_1, l_2, \ldots$ habrá algún segmento l_{k_1} que estará estrictamente dentro de l_1; habrá otro, l_{k_2}, que estará estrictamente dentro de l_{k_1}, etc. Además, de la proposición auxiliar 1, que utilizamos en la demostración de existencia de la longitud, sigue que ningún segmento puede ser menor que todos los segmentos $l_1, l_{k_1}, l_{k_2}, \ldots$ Por esto podemos aplicar a la sucesión $l_1, l_{k_1}, l_{k_2}, \ldots$ el axioma de Cantor IV,2 y afirmar en consecuencia que existe un único punto B interior a todos los segmentos $l_1, l_{k_1}, l_{k_2}, \ldots$ Claramente, este punto B será asimismo interior a todos los segmentos $l_1, l_2, l_3, \ldots$ Resulta evidente que el segmento AB tiene la longitud indicada a. En efecto, al medir este segmento obtenemos precisamente el número a.

Así, entonces, si a no puede ser representado por una fracción binaria finita, la afirmación del teorema resulta demostrada. Si, en cambio, a se representa por una fracción finita, el extremo B del segmento buscado será alguno de los puntos A_n, $P_1, P_2, \ldots$ obtenidos más arriba. No tiene sentido reproducir los razonamientos detallados para este caso; nos limitaremos a observar que aquí el axioma de Cantor es innecesario.

Una proposición análoga al teorema 35 tiene lugar también para las magnitudes de los ángulos; precisamente, vale el

TEOREMA 36. *Supongamos que para alguna elección de la unidad de medida, el*

ángulo recto tiene magnitud ω; entonces, a cualquier número α, $0 < \alpha < 2\omega$, le corresponde un ángulo cuya magnitud es igual a α.

Es usual escoger la unidad de medida de ángulos de forma que al ángulo recto le corresponda una magnitud igual a $\pi/2$. En este caso, la unidad de medida se llama *radián*.

Una vez fundamentada la medición de segmentos y de ángulos y establecida —en los teoremas 35 y 36— la posibilidad de construir un segmento dada su longitud y un ángulo dada su magnitud, queda abierto el camino de la aplicación de la aritmética y el álgebra a la geometría.

Por ejemplo, con métodos aritméticos es ahora fácil demostrar el siguiente teorema importante.

TEOREMA 37. *Dentro de cada segmento existen puntos que lo dividen en n partes iguales.*

En efecto, sea dado el segmento AB. Hemos demostrado que cada segmento posee longitud; supongamos que la longitud de AB es igual a a. Utilizando la división de números, determinamos el número a/n. Del teorema 35 y el axioma III,1 sigue que sobre la semirrecta AB existen segmentos AA_1, A_1A_2, ... , $A_{n-2}A_{n-1}$ con la misma longitud a/n. Evidentemente, los puntos A_1, A_2, ... , A_{n-1} son los buscados.

Un teorema análogo tiene lugar para ángulos.

TEOREMA 38. *Dentro de cada ángulo, por su vértice, pasan semirrectas que lo dividen en n partes iguales.*

§ 22. Utilizando los axiomas de los cuatro grupos I—IV puede introducirse un sistema de coordenadas para la recta, el plano y el espacio.

Construyamos primeramente un sistema de coordenadas en la recta. Sea a una recta arbitraria. Fijemos en ella algún punto O, que denominaremos *origen de coordenadas*, y convengamos en llamar una de las dos semirrectas determinadas en la recta a por O, *positiva*, y la otra, *negativa*. Adoptemos, además, algún segmento como *unidad de medida*.

A cada punto M de la recta a le pondremos en correspondencia la coordenada x, haciendo el valor absoluto de x igual a la longitud del segmento OM y determinando el signo de x según la posición de M como sigue: $x > 0$, si M está en la semirrecta positiva, y $x < 0$, si M está sobre la semirrecta negativa. Si M coincide con el punto O, hacemos $x = 0$. Del teorema 35 sigue inmediatamente la proposición:

Cualquiera que sea el número x, existe sobre la recta exactamente un punto cuya coordenada sea igual a x.

Introduzcamos ahora un sistema de coordenadas en el plano. Sea α un plano arbitrario; denotemos por O algún punto del plano α, y por a, alguna recta de este plano que pase por O. Entonces O divide la recta a en dos semirrectas; llamaremos *positiva* a una de ellas, y *negativa* a la otra. La recta a divide al plano α en dos semiplanos, uno de los cuales llamaremos asimismo *positivo*, y el otro, *negativo*. Si, además, se escoge una unidad de medida de longitudes, de acuerdo con lo expuesto, en la recta a queda determinado un sistema de coordenadas con origen O y semirrecta positiva distinguida.

Sea ahora M un punto arbitrario del plano α. Por el teorema 25 del § 17, de M se puede trazar una única perpendicular a a. Denotemos por M_x el pie de esta perpendicular. Sea x la coordenada del punto M_x en el sistema de coordenadas que hemos introducido en la recta a, e y, un número cuyo valor absoluto es igual a la longitud

del segmento MM_x, y cuyo signo depende de la posición de M como sigue: $y > 0$, si M está en el semiplano positivo, $y < 0$, si M está en el semiplano negativo. Si M está sobre la recta a, hacemos $y = 0$.

Hemos puesto, así, en correspondencia a cada punto M del plano α un par ordenado de números x, y, llamados coordenadas de este punto.

Evidentemente, *cualesquiera que sean los números reales x, y, en el plano existe exactamente un punto cuyas coordenadas son respectivamente iguales a estos números.*

En efecto, el número x determina siempre y de manera unívoca en la recta a el punto M_x. Por el teorema 26 del § 17, podemos trazar en el punto M_x una única perpendicular a la recta a. Supongamos que $y \neq 0$; por el teorema 35, existe un segmento cuya longitud es igual al valor absoluto del número y. Determinemos este segmento a partir del punto M_x sobre la perpendicular a la recta a, de modo que quede situado en el semiplano positivo, si $y > 0$, y en el negativo, si $y < 0$. El extremo del segmento construido se denota por la letra M; el punto M tendrá las coordenadas x, y dadas.

Si $y = 0$, suponemos que el punto M coincide con M_x; entonces M tendrá la coordenada x dada e $y = 0$.

Siempre podemos, pues, determinar un punto cuyas coordenadas sean iguales a los números dados x, y. La unicidad de este punto se demuestra por razonamientos evidentes.

Para introducir coordenadas en el espacio, fijemos un plano arbitrario α y determinemos sobre él un sistema coordenado, de alguna manera (es decir, indicamos el punto O, la recta a, etc.). El plano α divide al espacio en dos semiespacios; llamemos *positivo* a uno de ellos, y *negativo* al otro. Entonces, a cada punto M del espacio le pondremos en correspondencia tres coordenadas (x, y, z), determinándolas como sigue: x e y coinciden con las coordenadas del pie M' de la perpendicular trazada desde M al plano α, en nuestro sistema de coordenadas que suponemos ya introducido en el plano α; z será igual en valor absoluto a la longitud del segmento MM'; el signo de z depende de la posición del punto M de la manera siguiente: $z > 0$, si M está en el semiespacio positivo, y $z < 0$, si M está en el semiespacio negativo. Si M se encuentra sobre el plano α, ponemos $z = 0$.

El método que acabamos de exponer de introducción de un sistema de coordenadas en el espacio requiere la definición previa del concepto de perpendicular a un plano y la demostración del teorema: de cualquier punto se puede trazar a cualquier plano una perpendicular, y sólo una. La definición pertinente, así como la demostración de este teorema, pueden efectuarse de manera idéntica a como suele hacerse en los textos de geometría elemental.

Si, además, se establece la existencia y unicidad de la perpendicular a un plano por un punto dado de éste, se puede, recurriendo al teorema 26 del § 17, establecer la afirmación:

Cualesquiera que sean tres números reales x, y, z, en el espacio existe exactamente un punto cuyas coordenadas son respectivamente iguales a x, y, z.

Los sistemas de coordenadas en el plano y en el espacio que acabamos de describir podrían llamarse cartesianos. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que sólo de los axiomas I—IV no siguen muchas propiedades características de las coordenadas cartesianas. Consideremos, para simplificar, el sistema de coordenadas en el plano.

Llamemos, como se hace comúnmente, eje x a la recta a, y eje y a la perpendicular a ella por el punto O. Sea M un punto arbitrario del plano, y sean M_x, M_y los pies de las perpendiculares trazadas desde M al eje x y al eje y respectivamente. Utilizando los axiomas I—IV no es posible, por ejemplo, demostrar que el segmento OM_y es igual al M_xM. Análogamente, de estos axiomas no puede deducirse la expresión bien conocida en geometría analítica para la distancia entre dos puntos.

§ 23. Al introducir coordenadas en la recta, establecemos una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todos los puntos de la recta y el conjunto de todos los números reales. Vamos a analizar ahora una particularidad característica de esta correspondencia.

Como mostramos más arriba utilizando los axiomas de los grupos I—II, en el conjunto de puntos de una recta se puede introducir una relación de orden, de manera que si el punto B sigue al punto A y precede al C, entonces B está entre A y C en el sentido del § 13. Sólo es posible establecer este orden de dos maneras diferentes; esto corresponde a nuestra idea intuitiva de los dos sentidos sobre una recta. Escojamos de estos dos órdenes posibles aquél en que el origen de coordenadas precede a todos los puntos de la semirrecta positiva (el sentido que se determina así se llamará positivo). Entonces, si M_1 y M_2 son dos puntos de coordenadas x_1 y x_2 y si M_1 precede a M_2, será $x_1 < x_2$.

Tenemos, así el

TEOREMA 39. *Entre el conjunto ordenado de todos los puntos de una recta y el conjunto ordenado de todos los números reales se puede establecer una correspondencia biyectiva tal que los elementos correspondientes se encuentren en igual relación de orden.*

La propiedad de la recta expresada por este teorema se denomina *continuidad*. Como la continuidad de la recta queda asegurada por los axiomas IV,1, IV,2 a los axiomas del grupo IV se los llama *axiomas de continuidad*.

Los axiomas IV,1 y IV,2 pueden sustituirse por otras proposiciones equivalentes, conservando los grupos precedentes I—III sin cambios. Uno de los equivalentes importantes de los axiomas del grupo IV es EL PRINCIPIO DE DEDEKIND.

En los fundamentos del análisis es bien conocida la proposición que expresa el principio de Dedekind en el conjunto de todos los números reales.

Si todos los números reales están divididos en dos clases de manera que:

1) *cada número pertenece a una clase, y sólo a una, y cada clase contiene números;*

2) *cada número de la primera clase es menor que cada uno de la segunda, entonces o bien en la primera clase existe un número máximo, o bien en la segunda un mínimo.*

La esencia de esta proposición consiste en descartar dos posibilidades: la existencia de elementos que clausuren ambas clases a la vez, y la ausencia de tales elementos en ambas clases.

Del teorema 39 y el principio de Dedekind para los números reales sigue de inmediato el principio de Dedekind para la recta.

TEOREMA 40. *Si todos los puntos de una recta están distribuidos en dos clases de manera que:*

1) *cada punto pertenece a una clase y sólo a una y cada clase contiene puntos;*

2) *cada punto de la primera clase precede a cada uno de la segunda,*
entonces o bien en la primera clase existe algún punto que sigue a todos los demás de esta clase, o bien en la segunda existe algún punto que precede a todos los demás de dicha clase.

Se dice que este punto determina *una cortadura de Dedekind* en la recta.

La equivalencia de esta afirmación con los axiomas del grupo IV se expresa por el siguiente

TEOREMA 41. *Si a los axiomas* I—III *agregamos el principio de Dedekind, las proposiciones de Arquímedes* IV,*1 y de Cantor* IV,*2 pueden ser demostradas.*

Ante todo, obtengamos el principio de Arquímedes, basándonos en el de Dedekind y en los axiomas I—III.

Razonaremos reduciendo al absurdo. Supongamos que para algún segmento AB no es válido el axioma de Arquímedes. Esto significa que existe una sucesión INFINITA de segmentos CONGRUENTES $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv A_nA_{n+1}$, situados dentro del segmento AB.

Escojamos el orden de puntos de la recta AB (sentido) para el cual A preceda al punto B, y dividamos los puntos de la recta AB en dos clases como sigue: en la primera clase pondremos cada punto que precede a alguno de los puntos A_n (y, por ende, a los puntos A_{n+1}, A_{n+2}, etc.); en la segunda, a los restantes puntos de la recta AB.

Es evidente que en este caso se cumplirán las condiciones que determinan una cortadura de Dedekind. En efecto:

1) cada punto de la recta AB pertenece a una clase, y sólo a una; cada clase es no vacía, pues la primera contiene seguramente a los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, y la segunda, al punto B;

2) todos los puntos de la primera clase preceden a los de la segunda.

Entonces, en virtud del principio de Dedekind, que ahora estamos aceptando como un axioma, existe un punto C que realiza la cortadura.

Es evidente que en la primera clase no hay último elemento; en consecuencia, C es un punto de la segunda clase, que precede a los demás de esta clase.

Por el axioma III,1, existe un punto D que precede a C y determina con él un segmento CD congruente a cada segmento AA_1, A_1A_2, etc. El punto D no puede pertenecer a la segunda clase, pues precede al punto C.

D es, entonces, un punto de la primera clase y, por esto, precede a algún punto A_n. El segmento A_nA_{n+1} es parte del segmento CD y, por el teorema 29, $A_nA_{n+1} < CD$. Por otro lado, tenemos que $A_nA_{n+1} \equiv CD$. Pero, por el teorema 27, las relaciones $A_nA_{n+1} < CD$ y $A_nA_{n+1} \equiv CD$ no pueden tener lugar simultáneamente. La contradicción obtenida concluye la demostración del principio de Arquímedes.

Demostremos ahora el principio de Cantor.

Supongamos que en alguna recta a se ha fijado una sucesión infinita de segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc, y que cada segmento $A_{n+1}B_{n+1}$ está en el interior de A_nB_n. Supongamos, también, que no existe ningún segmento menor que todos los de la sucesión. Debemos demostrar que existe un punto perteneciente al interior de cualquier segmento A_nB_n.

Fijemos algún sentido en la recta y supongamos que A_n denota siempre el extre-

mo del segmento que precede a B_n. Dividamos los puntos de la recta a en dos clases, colocando en la primera aquellos puntos que preceden a alguno de los puntos A_n (y también, entonces, a A_{n+1}, A_{n+2}, etc.) y en la segunda, a los demás puntos de a.

Hemos obtenido una cortadura de Dedekind. Efectivamente,

1) cada punto de la recta a pertenece a una clase, y sólo a una; además, cada clase es no vacía, pues la primera contiene los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, y la segunda, $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$;

2) los puntos de la primera clase preceden a los de la segunda.

En virtud del principio de Dedekind, existe algún punto C que realiza la cortadura.

Es evidente que en la primera clase no hay último punto; por lo tanto, C es el primer punto de la segunda clase. Por esto, C precede a todos los puntos B_1, $B_2, \ldots, B_n, \ldots$ y sigue a cada punto $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ De aquí concluimos que C está en el interior de cualquier segmento A_nB_n.

Nuestra afirmación queda así demostrada completamente.

§ 24. Como hemos visto, los axiomas de continuidad permiten demostrar que en cada recta puede introducirse un sistema de coordenadas y transformarla así en un eje numérico.

Esto resulta ser de gran importancia, pues gracias a este resultado se abre la posibilidad de aplicar en la geometría los resultados básicos del análisis.

Presentaremos dos teoremas que pueden ser fácilmente demostrados ahora, una vez introducidos los axiomas de continuidad.

TEOREMA 42. *Si una recta pasa por algún punto del interior de un círculo debe intersecar a la circunferencia de este círculo en dos puntos**).

TEOREMA 43. *Si una circunferencia k pasa por algún punto interior y por otro exterior de otra circunferencia k', entonces k y k' se intersecan en dos puntos.*

Demostremos el primer teorema.

Supongamos que alguna recta a pasa por un punto interior de un círculo k, de radio r. Tracemos del centro del círculo k a la recta a una perpendicular, y denotemos por O su pie.

Introduzcamos en la recta a un sistema de coordenadas con origen en el punto O. La distancia del centro del círculo a un punto arbitrario de la recta a, de coordenada x, es función de x que denotaremos por $s(x)$. Es fácil ver que $s(x)$ es continua para todo x; en efecto, por un teorema conocido, la diferencia de dos lados de un triángulo es menor que el tercer lado; por esto,

$$|\Delta s| = |s(x + \Delta x) - s(x)| < |\Delta x|,$$

por lo cual $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta s = 0$. Observemos, además, que $s(0) < r$, y que $s(r) > r$; así la función $s(x) - r$ cambia su signo cuando x varía de 0 a r. Como esta función es continua, existe un valor del argumento $x = x_1$, contenido entre 0 y r, para el cual $s(x_1) = r$. Las propiedades de continuidad de la recta permiten afirmar que cualquiera que sea el número x_1, sobre la recta a existe un punto M_1 de coordenada x_1

*) Es natural llamar a un punto *interior* con respecto a un círculo o a una circunferencia, si su distancia del centro es menor que el radio, y *exterior*, si esta distancia es mayor que el radio.

(esto fue demostrado en el parágrafo anterior). Como la distancia del punto M_1 al centro del círculo es igual a r, este punto está sobre la circunferencia periférica, es decir, es un punto de intersección de la recta a con la circunferencia del círculo k.

Es fácil ver que el punto M_2 de coordenada $x_2 = -x_1$ es el segundo punto de intersección.

Los teoremas 42 y 43 permiten fundamentar las construcciones que comúnmente se utilizan en los textos de geometría elemental al resolver problemas de dividir un segmento o un ángulo en dos partes iguales, al trazar una perpendicular a una recta dada por un punto dado, etc. En el teorema 23, referente a la posibilidad de dividir un segmento en dos partes iguales, tuvimos que eludir estas contrucciones, pues de los axiomas I—III (sin los de continuidad) no es posible deducir los teoremas 42 y 43.

8. Grupo V. Axioma de paralelismo. Geometría absoluta

§ 25. DEFINICIÓN 14. Dos rectas que se encuentren en un mismo plano y no tengan puntos comunes se llaman *paralelas*.

La definición dada requiere, evidentemente, la demostración de existencia de rectas paralelas. Esta demostración, siguiendo a Euclides, puede hacerse fácilmente utilizando el teorema que sigue.

TEOREMA 44. *Si las rectas a, b, c están en un mismo plano y la recta c, al intersecar las rectas a y b, forma con ellas ángulos alternos internos iguales, entonces las rectas a y b son paralelas.*

El teorema 44 se demuestra en dos palabras, por reducción al absurdo: supongamos que c interseca a y b en los puntos A y B, respectivamente; supongamos que a y b no son paralelas. En tal caso, tienen un punto común O, y en el triángulo AOB hay un ángulo exterior igual a uno de los interiores no adyacentes. Esto contradice el teorema 30.

Un caso particular del teorema 44 es el

TEOREMA 45. *Dos rectas que están en un mismo plano y son perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.*

De los teoremas 44 y 45 se desprende de inmediato el

TEOREMA 46. *Por cada punto exterior a una recta dada pasa una paralela a ella.*

En efecto, sea A un punto arbitrario no perteneciente a alguna recta a. Tracemos por A una perpendicular AP a la recta a, y denotemos por b la recta que pasa por A, es perpendicular a AP y está en el plano que contiene AP y a. En virtud del teorema 45, la recta b es paralela a a.

El teorema 46 complementa la definición 14, pues establece la existencia de rectas paralelas.

Para fundamentar la teoría euclidiana de las paralelas es suficiente agregar a los axiomas I—IV el siguiente axioma V:

V (AXIOMA DE PARALELISMO). *Sea a una recta arbitraria, y A, un punto exterior a ella; entonces en el plano determinado por A y la recta a, se puede trazar a lo sumo una recta que pasa por A y no interseca a.*

En en § 5 hemos demostrado que este axioma es equivalente al V postulado de Euclides.

Del axioma V sigue de inmediato un teorema recíproco del 44.

TEOREMA 47. *Si dos rectas paralelas se cortan por una tercera, los ángulos alternos internos que se forman son iguales.*

De aquí, por el método habitual, se puede deducir el

TEOREMA 48. *La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.*

No tiene sentido reproducir los teoremas ulteriores de la geometría. Todos los razonamientos que se utilizan en los textos al demostrarlos han sido rigurosamente fundamentados por lo expuesto y pueden efectuarse sin referencia alguna a una figura o a la clara evidencia *).

Digamos más que los axiomas I—V fundamentan la geometría analítica de Descartes. En el § 22 introducimos sistemas de coordenadas en la recta, en el plano y en el espacio. Ahora, disponiendo del axioma V y, en consecuencia, de la teoría euclidiana de las paralelas, de la teoría de semejanza de figuras y, en particular, del teorema de Pitágoras, se puede demostrar que la distancia entre dos puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$ se determina por la conocida fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

que todo plano se determina por una ecuación de primer grado

$$ux + vy + wz + t = 0,$$

etc. Queda así abierta la posibilidad de demostrar los teoremas de la geometría por métodos aritméticos.

§ 26. En el capítulo I expusimos ejemplos de tentativas de demostrar el postulado de Euclides de las paralelas. Los autores de estas demostraciones se proponían deducir de manera lógica el V postulado de LOS DEMÁS POSTULADOS DE EUCLIDES. Cabe observar que a pesar de que este problema estaba planteado ante los geómetras durante muchos siglos, seguía sin estar bien definido hasta fines del siglo XIX.

En efecto, las definiciones y axiomas de Euclides son tan imperfectos que no pueden servir de base para desarrollar construcciones lógicas rigurosas. Es interesante destacar que el problema del V postulado, aun cuando ya había sido resuelto por Lobachevski, seguía sin ser enunciado con rigor, pues en la época de Lobachevski todavía no se habían superado los defectos de la fundamentación euclidiana de la geometría.

Una vez expuestos los axiomas de Hilbert, tenemos la posibilidad de enunciar rigurosamente el problema del V postulado como sigue:

Habiendo aceptado los axiomas enumerados en los grupos I—IV, *deducir de ellos el axioma* V.

El resultado de Lobachevski puede ahora ser expresado también con total precisión:

---

*) En esencia, estamos afirmando que el sistema de axiomas de Hilbert es completo, es decir, que si aceptamos todos sus axiomas se puede hacer un desarrollo rigurosamente lógico de la geometría. La definición exacta del concepto de completitud de un sistema de axiomas y la demostración de la completitud del sistema de Hilbert se den en el cap. IV.

El axioma V *no es consecuencia de los axiomas* I—IV.

Este mismo resultado puede enunciarse de otra forma:

Si a los axiomas I—IV *se adjunta una proposición que niega la justeza del axioma* V, *los corolarios de todas estas premisas formarán un sistema lógico no contradictorio* (geometría no euclidiana).

Los resultados básicos de la teoría sobre las paralelas de la geometría de Lobachevski y la demostración de su consistencia se exponen en el cap. III.

§ 27. El sistema de corolarios que se desprenden únicamente de los axiomas I—IV se denomina *geometría absoluta* (término de J. Bolyai). Evidentemente, la geometría absoluta es la parte común de las geometrías euclidiana y no euclidiana, pues las proposiciones que pueden ser demostradas por medio de los axiomas I—IV son verdaderas en igual medida tanto en la geometría de Euclides como en la de Lobachevski.

Todos los teoremas que enunciamos en este capítulo, hasta el 46 inclusive, son teoremas de la geometría absoluta. A ellos agregaremos los siguientes, que son resultado de los trabajos de Saccheri, Lambert y Legendre, y que fueron demostrados en el § 8.

TEOREMA 49. *El defecto* $D(\Delta)$ *de cualquier triángulo satisface la desigualdad*

$$D(\Delta) \geqslant 0.$$

O, en un enunciado diferente: *La suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos rectos.*

TEOREMA 50. *Los ángulos de la base superior de un cuadrilátero de Saccheri no pueden ser obtusos (es decir, la hipótesis del ángulo obtuso es contradictoria).*

TEOREMA 51. *Si existe algún triángulo con defecto positivo, cada triángulo tendrá defecto positivo.*

O bien, en otra forma:

Si existe algún triángulo la suma de cuyos ángulos es menor que dos rectos, todo triángulo tendrá suma de ángulos menor que dos rectos.

TEOREMA 52. *Si se acepta la hipótesis del ángulo agudo para algún cuadrilátero de Saccheri, es necesario aceptarla para todo otro cuadrilátero de Saccheri.*

TEOREMA 53. *La hipótesis del ángulo recto de Saccheri y la suposición de Legendre acerca de la existencia de un triángulo la suma de cuyos ángulos es igual a dos rectos, son equivalentes al axioma* V.

TEOREMA 54. *Si existe un ángulo agudo tal que la perpendicular trazada a uno de sus lados por cualquier punto de éste corta al otro lado, entonces el axioma* V *puede ser demostrado.*

Capítulo III

TEORÍA NO EUCLIDIANA DE LAS PARALELAS

1. Definición de paralelas según Lobachevski

§ 28. Ahora procederemos a exponer los resultados básicos de la teoría no euclidiana de las paralelas. En su base pondremos los axiomas de la geometría absoluta I—IV y el siguiente axioma de Lobachevski.

Existen una recta a y un punto A que no le pertenece, tales que por A pasan no menos de dos rectas que no cortan a y están en un mismo plano con ella.

Demostremos que *en el mismo plano pasan por A infinitas rectas que no cortan a.*

Sean a_1 y a_2 dos rectas que pasan por A y no intersecan la recta a (fig. 30); su existencia queda asegurada por el axioma de Lobachevski. Fijemos sobre la recta a_2 un punto B_2 de modo que se encuentre del lado de la recta a_1 donde NO ESTÁ la recta a. Unamos B_2 con algún punto B de la recta a. El segmento B_2B intersecará la recta a_1 en algún punto B_1. Sea M un punto arbitrario del segmento B_1B_2. Es fácil ver que la recta AM no corta la recta a. En efecto, si la recta AM tiene con la recta a algún punto C de intersección que se encuentra en la dirección de A hacia M, se formará un triángulo MBC uno de cuyos lados, MB, interseca la recta a_1. Entonces, por el axioma de Pasch II,4, la recta a_1 tendrá que cortar la recta a, cosa que se descarta. Si, en cambio, AM tiene con la recta a un punto de corte C' en la dirección de M hacia A, se formará un triángulo MBC', cuyo lado MC' interseca la recta a_2. Entonces, por el axioma de Pasch, dicha recta tendrá que cortar la recta a, cosa que también queda descartada.

Podemos, pues, concluir que si a_1 y a_2 pasan por A y no cortan a, todas las rectas que pasan por A en un par determinado de ángulos opuestos por el vértice, determinados por a_1 y a_2, tampoco cortan la recta a.

Con el axioma de Lobachevski se niega la propiedad característica de la geometría euclidiana de unicidad de la paralela, al menos para algún punto determinado y alguna recta determinada. Sin embargo, es fácil comprobar que *si el enunciado del postulado de Lobachevski se cumple para algún punto y alguna recta determinados, entonces se cumplirá para puntos y rectas cualesquiera.*

Demostremos esto por reducción al absurdo.

Supongamos, en contra de lo afirmado, que por algún punto B, que no está sobre una recta b, pasa una única recta b' que no corta la recta b y se encuentra en un mismo plano con ella (fig. 31).

Tracemos la perpendicular BB_1 por B a la recta b y tomemos sobre b algún otro punto B_2, diferente de B_1.

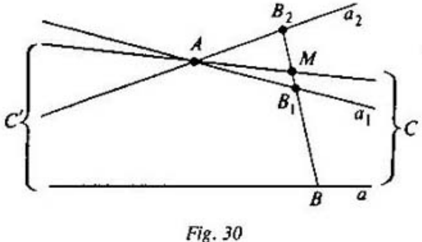


Fig. 30

Es fácil ver que la recta BB_2 forma con las rectas b y b' ángulos alternos internos iguales. En efecto, si esto no fuera así, se podría, trazar por B una recta b'', diferente de b' y tal que la recta BB_2 formara con las rectas b y b'' ángulos alternos iguales. Pero entonces la recta b'', por un lado, no podría tener punto común con b, como sigue del teorema 44 del capítulo II y, por el otro, no podría dejar de cortar la recta b, ya que la única recta que pasa por B y no corta b es, según nuestra hipótesis, la recta b'. Análogamente, también la recta BB_1 formará con b y b' ángulos alternos iguales; en consecuencia, BB_1 es perpendicular no sólo a la recta b, sino también a b'. De aquí sigue de inmediato que el triángulo BB_1B_2 tiene suma de ángulos internos igual a dos rectos. Entonces, en virtud del teorema 51 del capítulo II, la suma de los ángulos de cualquier triángulo será igual a dos rectos. De aquí, según el teorema 53, se desprende el V postulado de Euclides y, por consiguiente, la unicidad de la recta que pasa por un punto arbitrario dado y no corta una recta arbitraria prefijada.

Se obtiene así una contradicción con el axioma de Lobachevski, que niega esta unicidad con respecto a la recta a y el punto A.

Entonces, al aceptar el axioma de Lobachevski llegamos necesariamente a la siguiente proposición.

TEOREMA I. *Cualesquiera que sean dados una recta y un punto que no le pertenece, por este punto pasa un conjunto infinito de rectas que no cortan la recta dada.*

Aquí se sobreentienden, claro está, rectas que están en un mismo plano junto con la recta dada. En lo sucesivo no volveremos a hacer esta salvedad, asumiendo que nuestro análisis (hasta el § 33) se hace desde punto de vista de planimetría, es decir, que se consideran puntos y rectas de un plano determinado.

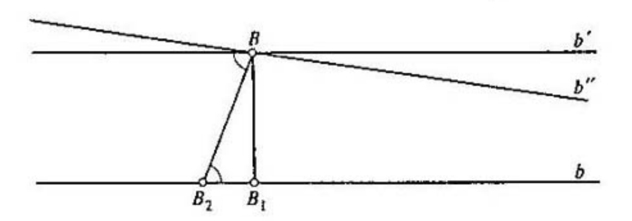


Fig. 31

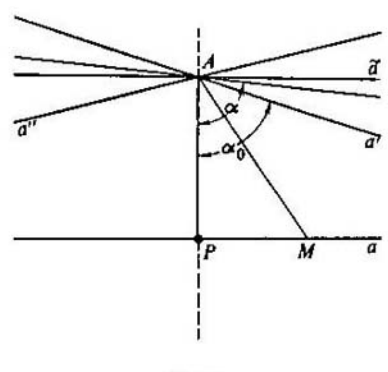


Fig. 32

De acuerdo con lo expuesto, como consecuencia del axioma de Lobachevski debemos:

1) para cada cuadrilátero de Saccheri aceptar la hipótesis del ángulo agudo;

2) suponer que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos.

§ 29. A diferencia de la definición de Euclides, según Lobachevski son paralelas a una recta dada sólo algunas rectas particulares de aquellas que no tienen puntos comunes con la dada. Ahora daremos la definición de rectas paralelas según Lobachevski; no es tan sencilla como la de Euclides, y requiere algunas consideraciones previas.

Sea a alguna recta y A un punto que no le pertenece (fig. 32). Bajemos desde A la perpendicular AP a la recta a. La recta AP divide al plano en dos partes, una de las cuales convendremos en llamar semiplano «derecho», y la otra, semiplano «izquierdo». Análogamente, la recta a divide al plano en dos partes; llamaremos «superior» a aquella que contiene al punto A.

Sea $\bar{a}$ la recta perpendicular a AP por el punto A. De la geometría absoluta se sabe que las rectas a y $\bar{a}$ no tienen puntos comunes. Como consecuencia del postulado de Lobachevski, existe un conjunto infinito de rectas diferentes de $\bar{a}$ y que tampoco intersecan la recta a. Sea α el ángulo que forma la semirrecta derecha de alguna de estas rectas con la semirrecta AP, y sea α_0 la cota inferior del conjunto de tales ángulos α *).

Evidentemente, tienen lugar las desigualdades

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}.$$

---

*) Es decir, α_0 no es mayor que *cada* ángulo del conjunto indicado ($\alpha_0 \leqslant \alpha$), pero si aumentamos α_0 en un valor positivo ε arbitrariamente pequeño, entonces $\alpha_0 + \varepsilon$ ya superará *cierto* ángulo de este conjunto.

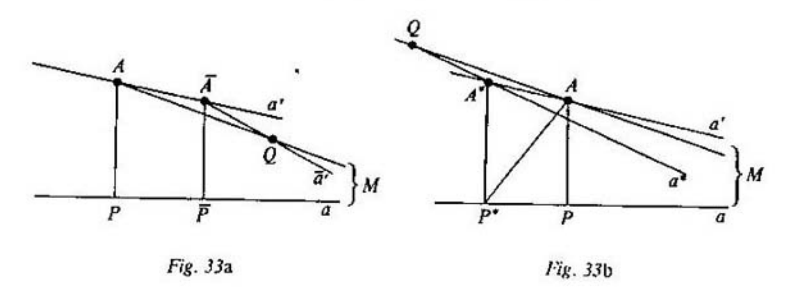


*Fig. 33*a *Fig. 33*b

En efecto, α_0 es mayor que el ángulo PAM, siendo M un punto arbitrario de la recta a, a la derecha de P; consecuentemente, $\alpha_0 > 0$. Como $\bar{a}$ no es la única recta que no tiene puntos comunes con a, entonces $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$.

Tracemos por A una recta a' de forma que su semirrecta derecha forme con AP un ángulo igual a α_0.

Es fácil ver que a' no corta la recta a. En efecto, si las rectas a y a' pueden cortarse, lo harán sólo en el semiplano derecho. Supongamos que a y a' tienen un punto común R.

Tomemos sobre la recta a un punto R', situado a la derecha de R, y denotemos $\alpha' = \angle PAR'$. Pero entonces $\alpha_0 < \alpha'$, y la cota inferior de las magnitudes α será mayor que α_0, lo que contradice la definición de α_0.

Sea a'' la recta que pasa por A y es simétrica a a' con respecto a AP.

Las rectas a' y a'' forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Cada recta, que pasa por A y está en el par de ángulos opuestos por el vértice que contiene el punto P, interseca la recta a, mientras que cada recta, que pasa por A y está en el otro par de ángulos opuestos por el vértice, no corta la recta a. Las propias rectas a' y a'', como acabamos de demostrar, pertenecen a las rectas que no intersecan a, y son las rectas frontera de esta colección. Llamaremos a la recta a' *recta frontera derecha*, y a la a'', *izquierda*.

Tiene lugar el siguiente importante

TEOREMA II. *Sean dadas las rectas a y a'. Si a' es recta frontera derecha del conjunto de rectas que pasan por alguno de sus puntos y no cortan la recta a, entonces a' será recta frontera derecha también en el conjunto análogo de rectas que pasan por cualquier otro punto de ella.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un punto sobre la recta a' con respecto al cual se cumple la condición del teorema; bajemos desde A la perpendicular AP a la recta a.

Demostremos primero la afirmación del teorema para los puntos que están a la derecha de A. Sea $\bar{A}$ alguno de estos puntos, y $\bar{A}\bar{P}$ la perpendicular a la recta a (fig. 33a). Nos basta establecer que cualquier semirrecta que parte de $\bar{A}$ y está situada en el semiplano derecho con respecto a $\bar{A}\bar{P}$ «por debajo» de la recta a', debe cortar la recta a. Sea $\bar{a}'$ una tal semirrecta. Fijemos sobre $\bar{a}'$ un punto Q arbitrario y construyamos la semirrecta AQ. Como para el punto A se satisface la hipótesis del teorema y la semirrecta AQ está en el semiplano derecho con respecto a AP «por de-

bajo» de la recta a', esta semirrecta debe cortar la recta a en algún punto; lo denotaremos por M. Por cuanto la semirrecta $\bar{a}'$ interseca uno de los lados del triángulo APM, precisamente el AM, en virtud del axioma de Pasch II,4 debe intersecar también uno de los otros dos lados de este triángulo *). Pero con el lado AP la semirrecta $\bar{a}'$ no puede tener puntos comunes, pues AP está en el semiplano izquierdo con respecto a $\bar{A}\bar{P}$. En consecuencia, la semirrecta $\bar{a}'$ tiene un punto común con el lado PM (evidentemente, a la derecha del punto P), cosa que precisamente había que demostrar.

Consideremos ahora un punto arbitrario A^* que está sobre la recta a' a la izquierda de A (fig. 33b). Sea A^*P^* la perpendicular a la recta a, y a^*, alguna semirrecta con origen A^*, situada en el semiplano derecho con respecto a A^*P^* por debajo de la recta a'. Debemos demostrar que a^* tiene un punto común con la recta a. Tomemos sobre el complemento de la semirrecta a^* un punto arbitrario Q, y unámoslo con el A por una recta. Según nuestra hipótesis, la recta a' es frontera en el conjunto de rectas que pasan por A y no cortan a. Por esto, la recta QA cortará la recta a en algún punto M, a la derecha de P. Observemos ahora que la semirrecta a^* pasa por el vértice y el interior del ángulo AA^*P^*; por lo tanto, tendrá que cortar al segmento AP^* (de acuerdo con el teorema 11a del capítulo II). Pero entonces, por el axioma de Pasch II,4, la semirrecta a^* tendrá que intersecar o bien al lado AM, o bien al P^*M del triángulo AP^*M. Como la recta a^* tiene con la AM un punto común Q, fuera del segmento AM, la semirrecta a^* deberá intersecar precisamente al lado P^*M. Así, esta semirrecta se interseca con la recta a, quedando con ello demostrado el teorema.

Se puede hacer una demostración análoga para el caso en que a' sea la recta frontera izquierda.

Ahora podemos definir el concepto de paralelismo en la geometría de Lobachevski.

Según Lobachevski, *la recta a' se dice paralela a la recta a, si en el conjunto de las rectas que pasan por algún punto de a' y no cortan la recta a, la recta a' resulta ser frontera.*

Del teorema II sigue que si algún punto de la recta a' posee la propiedad indicada en la definición que acabamos de dar, *todo otro punto de a' tendrá la misma propiedad.*

Fijemos uno de los dos sentidos de la recta a (indicado con una flecha en la fig. 34) y bajemos de algún punto A de la recta a' sobre la recta a la perpendicular AP. El segmento AP forma con la recta a' dos ángulos adyacentes, uno de los

*) El axioma de Pasch II,4 se refiere a un triángulo y una recta. Con respecto a una semirrecta (rayo), este axioma puede aplicarse si el origen de la semirrecta está fuera del triángulo, y es inaplicable si el origen está dentro de él.

Al aplicar el axioma de Pasch a un triángulo y una semirrecta, tendríamos que hacer la salvedad previa de que el origen de ésta se halla fuera del triángulo. Sin embargo, no vamos a hacer cada vez esta salvedad, omitiendo así en este caso y en otros similares los detalles de los razonamientos, siempre que éstos sean suficientemente evidentes. Una exposición demasiado escrupulosa complicaría la lectura del libro con menudencias que no son ni interesantes ni esencialmente importantes.

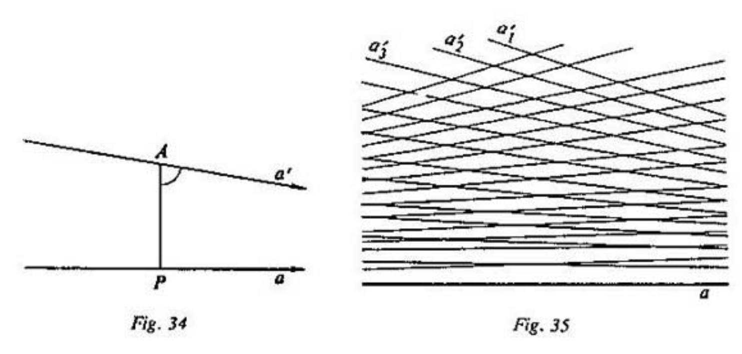


Fig. 34 *Fig. 35*

cuales será agudo, y el otro, obtuso. Si el ángulo agudo queda del lado de la recta AP hacia el cual está orientada nuestra recta a, diremos que *a' es paralela a la recta a en el sentido prefijado, o en la dirección prefijada* (en las figuras indicaremos la dirección del paralelismo por medio de flechas en ambas rectas).

Utilizando nuestra convención sobre la notación de los lados del plano con respecto a la recta AP («derecho» e «izquierdo»), se puede describir la dirección de paralelismo de otro modo: en el conjunto de rectas que pasan por A y no cortan la recta a, a' puede ser recta frontera derecha o izquierda; en el primer caso, decimos que *a' es paralela a la recta a hacia la derecha*, en el segundo, que *a' es paralela a la recta a hacia la izquierda.*

Así, entonces, por cada punto del plano pasan dos rectas paralelas a una recta dada, que son paralelas a ella en dos direcciones diferentes (véase la fig. 35; las rectas paralelas a la recta a hacia la derecha se denotan con las letras a_1', a_2', ...). En particular, tiene lugar el siguiente

TEOREMA III. *Por cada punto del plano pasa exactamente una recta paralela a otra dada en una dirección determinada.*

§ 30. Basándonos en la definición dada más arriba de paralelismo, no podemos todavía hablar de dos rectas *mutuamente* paralelas. Más adelante estableceremos la reciprocidad de la relación de paralelismo, es decir, que si una de dos rectas dadas es paralela a la otra, entonces la segunda es paralela a la primera. Pero antes tendremos que demostrar algunas proposiciones auxiliares.

LEMA I. *Sean a y b dos rectas arbitrarias; O, un punto sobre b; OA, la perpendicular bajada de O sobre a. Supongamos, además, que OA forma con la recta b ángulos adyacentes desiguales. Entonces, si x denota la distancia de O a un punto tomado sobre la recta b del lado del ángulo obtuso, e $y = f(x)$, la longitud de la perpendicular trazada de este punto a la recta a, $f(x)$ será una función continua, monótona y creciente indefinidamente.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos, del lado del ángulo obtuso, sobre la recta b dos puntos M y M', de forma que M esté entre O y M' (fig. 36). Tracemos las perpendiculares OA, MP y $M'P'$ a la recta a, y pongamos

$$OM = x, \qquad OM' = x',$$
$$MP = y, \qquad M'P' = y';$$

en este caso, $x' > x$.

Obsérvese que en virtud del axioma de Lobachevski, la suma de los ángulos internos del cuadrilátero $OMPA$ es menor que cuatro rectos; esto, sumado a que los ángulos internos en los vértices A y P son rectos, implica que $\angle PMM'$ es mayor que $\angle AOM$. En consecuencia, $\angle PMM'$ es obtuso.

Determinemos sobre la recta $P'M'$, a partir del punto P', un segmento $P'N = PM$. Uniendo los puntos M y N, obtenemos un cuadrilátero de Saccheri $PMNP'$; $\angle PMN$, por ser un ángulo de la base superior de éste, es agudo. Como $\angle PMM'$ es obtuso y $\angle PMN$, agudo, el punto N estará entre P' y M', es decir, $P'M' > PM$. Así, cuando $x' > x$, será también $y' > y$. Queda con esto demostrado que $f(x)$ es una función monótona creciente.

Hagamos ahora $\Delta x = x' - x$ y $\Delta y = y' - y (\Delta x > 0,\ \Delta y > 0)$. Evidentemente, $\Delta x = MM'$, $\Delta y = NM'$. Partiendo de la igualdad

$$NM' < NM + MM'$$

y tomando en consideración que NM es más corto que MM', pues en el triángulo NMM' el lado NM es opuesto a un ángulo agudo, y el MM' opuesto al obtuso, hallamos que

$$NM' < 2MM',$$

o bien que $\Delta y < 2\Delta x$.

Considerando análogamente el caso en que M' está entre O y M, llegamos a establecer la desigualdad

$$|\Delta y| < 2|\Delta x|,$$

válida para todas las posiciones posibles de los puntos M y M'. De aquí sigue que $\Delta y \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, es decir, que $f(x)$ es efectivamente una función continua.

Queda por demostrar que cuando x crece indefinidamente, $f(x)$ también crece indefinidamente. Para mostrar esto, fijemos sobre la recta b un punto M'' de forma que se cumpla $MM' = M'M''$ y tracemos la perpendicular $M''P''$ a la recta a. Supongamos que al punto M'' le corresponde $x'' = OM''$ e $y'' = f(x'') = M''P''$. Introduzcamos las notaciones $h_1 = y' - y$, $h_2 = y'' - y'$; entonces $MP = y$, $M'P' = y + h_1$, $M''P'' = y + h_1 + h_2$. Determinemos sobre la recta $P'M'$, a partir de P' y en la dirección de M', los segmentos $P'N \equiv PM$, $P'Q \equiv P''M''$, y a partir de M', el segmento $M'R \equiv M'N$. Evidentemente,

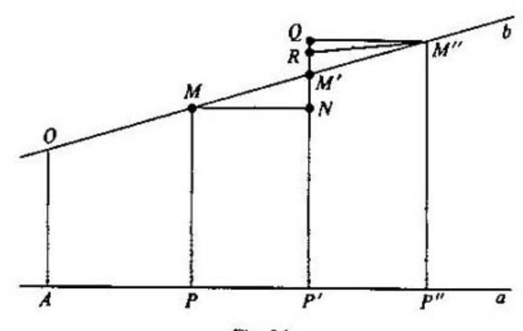


Fig. 36

$NM' = h_1$, $M'R = h_1$ y $M'Q = h_2$. Observemos ahora que los triángulos $M'NM$ y $M'RM''$ son iguales, pues tienen ángulos iguales encerrados entre lados iguales. En consecuencia, $\angle M'RM'' = \angle M'NM$. Pero $\angle M'NM$ es adyacente al ángulo agudo $\angle MNP'$ en el cuadrilátero de Saccheri. Por eso, este ángulo es obtuso, así como también el $\angle M'RM''$, que es igual a él. El ángulo $M'QM''$, por estar en la base superior del cuadrilátero de Saccheri $P'QM''P''$, es agudo. De la comparación de $\angle M'QM''$ con $\angle M'RM''$ se desprende que el punto R está entre M' y Q, es decir, que $M'Q > M'R$, o bien que $h_2 > h_1$.

Tenemos, de aquí, que $MP = y$, $M'P' = y + h_1$, $M''P'' > y + 2h_1$. Si hacemos, entonces, $MM' = M'M'' = s$ y tomamos la sucesión $x_1 = x, x_2 = x + s$, $x_3 = x + 2s, \ldots$, obtenemos respectivamente $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y + h_1$, $f(x_3) > y + 2h_1, f(x_4) > y + 3h_1$, etc. De estas relaciones se aprecia directamente que cuando x crece indefinidamente, la función $f(x)$ crece también en forma indefinida. El lema está demostrado.

Obsérvese que el lema I pertenece a la geometría absoluta, a pesar de que los razonamientos efectuados se basaron esencialmente en las propiedades de un cuadrilátero de Saccheri en el sistema de Lobachevski. En la teoría euclidiana de las paralelas la demostración de este lema se efectúa sin dificultad alguna; en este caso habrá que sustituir las relaciones que obtuvimos al final de la demostración por las igualdades respectivas $MP = y$, $M'P' = y + h_1$, $M''P'' = y + 2h_1, \ldots$, que expresan el carácter lineal de la función $y = f(x)$.

Un caso particular importante del lema I es la siguiente proposición.

LEMA II. *Si x denota la distancia del vértice de un ángulo a un punto que está sobre un lado de este ángulo, e $y = f(x)$, la longitud de la perpendicular trazada de este punto al otro lado, entonces $f(x)$ es una función continua, monótona e indefinidamente creciente.*

Los lemas I y II serán aplicados más de una vez.

Ante todo, utilizaremos el lema I para demostrar la reciprocidad de la relación de paralelismo.

TEOREMA IV. *Si una de dos rectas es paralela a la otra en una dirección determinada, entonces la segunda es paralela a la primera en la misma dirección.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la recta a es paralela a la recta b en alguna dirección. Tenemos que demostrar que b es paralela a a en la misma dirección.

Ante todo, estableceremos la existencia de un punto equidistante de las rectas a y b. Esto, que por evidencia es bien claro, se desprende directamente del lema I. En efecto, sea P algún punto de la recta a, y PB, la perpendicular trazada por P a la recta b (fig. 37). Fijemos sobre el segmento PB un punto arbitrario M y tracemos por él la perpendicular MA a la recta a.

Hagamos $PB = s$, $PM = x$, $MA = f(x)$; consideremos, además, la función $\varphi(x) = s - x$. Evidentemente, $f(x)$ y $\varphi(x)$ denotan respectivamente la distancia del punto M a las rectas a y b. En virtud del lema I, $f(x)$ es una función continua monótonamente creciente; $\varphi(x)$, como se ve de su expresión, es una función también continua y monótonamente decreciente. Como $f(0) < \varphi(O)$, y $f(x) > \varphi(s)$, existe un valor de x, $0 < x < s$, y sólo uno, tal que $f(x) = \varphi(x)$. A este valor de x le corresponde un punto M que equidista de las rectas a y b, es decir, tal que $MA = MB$.

Para este punto M, la recta AB forma ángulos iguales con las rectas a y b; esta recta se denomina *secante de igual pendiente* para las rectas a y b.

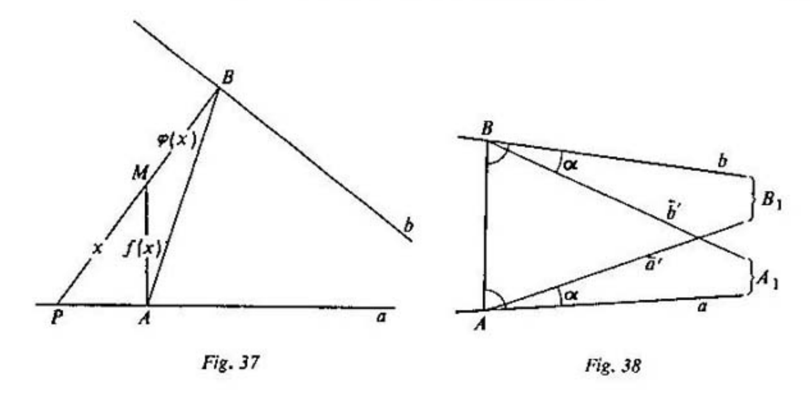


Fig. 37

Fig. 38

Una vez probada la existencia de una secante de igual pendiente, la reciprocidad de la relación de paralelismo se hace claramente evidente. Con todo, daremos la demostración rigurosa del teorema.

Como, según la condición, la recta a es paralela a b, entonces a y b no se cortan. De este modo, para verificar que b sea paralela con respecto a a, debemos establecer que b es una recta frontera entre todas las que pasan por alguno de sus puntos y no cortan a. Sea B tal punto (fig. 38). Denotemos con $\bar{b}$ la semirrecta de la recta b que tiene origen en B y está dirigida en el sentido de paralelismo de la recta a a la recta b; esta semirrecta no corta la recta a. Debemos demostrar que cualquier otra semirrecta $\bar{b}'$ con origen B y desviada de $\bar{b}$ hacia la recta a en un ángulo α arbitrariamente pequeño, corta la recta a. Sea dado un ángulo α. Tracemos por A una semirrecta $\bar{a}'$, situada del mismo lado de a que la recta b y que forme con el sentido de paralelismo de la recta a un ángulo α. Como la recta a es paralela a b, la semirrecta $\bar{a}'$ encontrará a b en algún punto B_1. Determinemos sobre la recta a, en el sentido de paralelismo, un segmento AA_1 igual al BB_1. Como AB es secante de igual pendiente para las rectas a y b, el triángulo BB_1A es igual al AA_1B. De aquí sigue que la semirrecta con origen B que pasa por el punto A_1 forma con la recta b el ángulo dado α hacia la recta a, es decir, coincide con la semirrecta $\bar{b}'$. Pero la primera semirrecta, por construcción, corta la recta a. Así, pues, una semirrecta que pasa por B y se desvía de $\bar{b}$ hacia la recta a en un ángulo arbitrariamente pequeño, corta esta recta. Por ende, la recta b es paralela a la recta a, quedando con esto demostrado el teorema.

Sean a y c dos *rectas paralelas entre sí.* La recta a divide al plano en dos semiplanos; denotemos por Π_{ac} aquel que contiene la recta c. Análogamente, la recta c dividirá al plano en dos semiplanos; llamaremos Π_{ca} aquel que contiene la recta a. Convendremos en llamar a la parte común de los semiplanos Π_{ac} y Π_{ca} zona interior del plano con respecto a las rectas a y c. *Sea b una tercera recta, paralela a alguna de las dos rectas a y c en la misma dirección en que éstas son paralelas entre sí.* Es fácil dilucidar que en este caso b no puede intersecar ni la recta a, ni la recta c. En efecto, supongamos, por ejemplo, que b es paralela a la recta c; entonces b y c no pueden tener intersección, como rectas paralelas. Pero a y b tampoco pueden intersecarse,

pues en caso contrario por su punto común pasarían dos rectas paralelas a c en una misma dirección, cosa imposible (véase el teorema III).

LEMA III. *Si para las condiciones indicadas arriba la recta b está en la zona interior del plano con respecto a las rectas a y c, entonces debe cortar a cada segmento que una algún punto de la recta a con otro de la recta c.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que b es paralela a c. Tomemos sobre la recta a un punto arbitrario A, y sobre c, otro punto cualquiera C; tracemos el segmento AC. Sea $\bar{c}$ la semirrecta de c que parte del punto C en la dirección de paralelismo de las rectas a y c (fig. 39). Sea $\bar{c}'$ alguna semirrecta que sale del punto C hacia el interior del ángulo determinado por las semirrectas CA y $\bar{c}$; supongamos, además, que $\bar{c}'$ está del lado del paralelismo con respecto a las perpendiculares trazadas desde C a las rectas a y b. Según la condición de paralelismo entre a y c, la semirrecta $\bar{c}'$ debe cortar la recta a en algún punto P. Análogamente, según la condición de paralelismo entre c y b, la semirrecta $\bar{c}'$ tiene que intersecar la recta b. Como b se encuentra en la zona interior con respecto a las rectas a y c, el punto de intersección de la semirrecta $\bar{c}'$ con la recta b tiene que estar entre los puntos C y P. De esto, más el axioma de Pasch, concluimos que la recta b cortará bien el segmento AC, bien el AP. Pero no puede cortar a este último, pues no puede tener intersecciones con la recta a. Consecuentemente, la recta b corta al segmento AC. El lema queda demostrado.

El siguente teorema establece la transitividad de la relación de paralelismo.

TEOREMA V. *Dos rectas paralelas a una tercera en una misma dirección son paralelas entre sí, en la misma dirección.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las rectas a y b son paralelas en una misma dirección a la recta c. De aquí, como arriba, concluimos que las rectas a y b no pueden intersecarse (en caso contrario, por su punto común pasarían dos rectas paralelas a c en una misma dirección, cosa imposible).

A fin de demostrar que a y b son paralelas, consideremos dos casos (fig. 40).

1. Las rectas a y b están a un mismo lado de la recta c.
2. Las rectas a y b están en lados diferentes de la recta c.

En el primer caso, una de las dos rectas a, b está en la zona interior del plano, determinada por la otra recta conjuntamente con c. Supongamos, por ejemplo, que b está en la zona interior con respecto a a y c.

Tomemos sobre a un punto arbitrario A y denotemos con $\bar{a}$ la semirrecta de a que parte de A en el sentido de paralelismo de las rectas a y c. Tenemos que demostrar que la semirrecta $\bar{a}$ es de frontera en el conjunto de todas las semirrectas con el punto A que no cortan la recta b. Admitiendo lo contrario, supongamos que

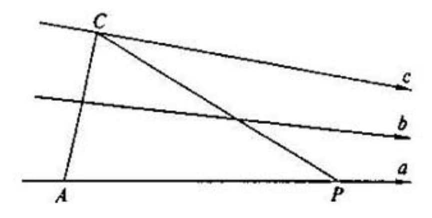


Fig. 39

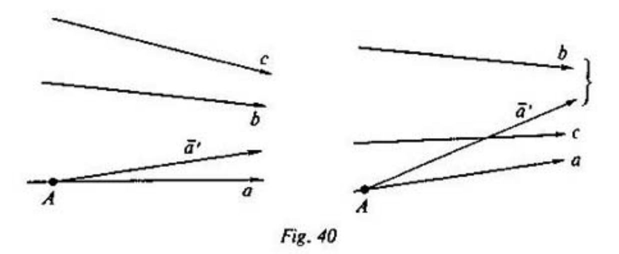


Fig. 40

existe una semirrecta $\bar{a}'$ que sale del punto A en la dirección de paralelismo (es decir, se encuentra en la dirección de paralelismo con respecto a las perpendiculares desde A a las rectas b y c) y está más cerca de la recta b que la semirrecta $\bar{a}$ pero que no corta la recta b. Entonces, en virtud del lema precedente, la semirrecta $\bar{a}'$ no puede cortar tampoco la recta c, cosa que contradice el paralelismo de las rectas a y c, pues la semirrecta $\bar{a}'$, en este caso, no sería de frontera en el conjunto de las que parten de A y no cortan la recta c.

Consideremos el segundo caso. Supongamos que a y b están en lados diferentes con respecto a c; entonces b y c estarán del mismo lado de a. Tracemos por un punto arbitrario A de la recta a una semirrecta $\bar{a}'$ de forma que esté más cerca de las rectas b y c que la recta a y que pase en el sentido de paralelismo con respecto a las perpendiculares desde A a las rectas b y c. Como a y c son paralelas, la semirrecta $\bar{a}'$ cortará la recta c, y en virtud del paralelismo de c y b, esta semirrecta cortará también la recta b. Así, en el conjunto de semirrectas que pasan por A y no intersecan la recta b, la semirrecta $\bar{a}$ resulta ser de frontera; por ende, las rectas a y b son paralelas entre sí (en la misma dirección en que ambas lo son con la recta c). El teorema queda demostrado.

Las proposiciones establecidas en este parágrafo muestran que aunque la definición de paralelismo en la geometría de Lobachevski es bastante complicada, el conjunto de rectas paralelas a una recta dada en una dirección determinada posee las mismas propiedades básicas que el conjunto de rectas paralelas en la geometría euclidiana.

2. Particularidades de la disposición de rectas paralelas y rectas divergentes

§ 31. Si dos rectas no se cortan y no son paralelas, se llaman *divergentes**). Por cada punto del plano pasan dos rectas paralelas a una recta dada, y un número infinito de rectas divergentes con ella (teorema I).

Ahora estudiaremos algunas propiedades de la posición recíproca de las rectas paralelas y las divergentes. Los resultados que obtendremos aquí nos permitirán representarnos en forma bien clara la diferencia entre las rectas paralelas y las divergentes.

---

*) El término «rectas divergentes» se justifica por las particularidades de la posición recíproca de estas rectas; véase el teorema VIII más abajo.

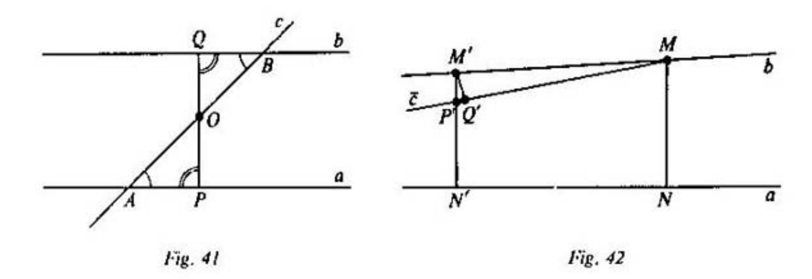


Fig. 41

Fig. 42

Indiquemos, ante todo, los dos teoremas siguientes.

TEOREMA VI. *Dos rectas perpendiculares a una tercera son divergentes.*

La demostración se ve en seguida. En efecto, el que dos rectas a y b, perpendiculares en los puntos A y B a una tercera recta c, no tienen puntos comunes, ya nos es conocido como proposición de la geometría absoluta. Pero estas rectas no son paralelas, pues por A pasa un número infinito de rectas que no se cortan con b, y entre ellas la recta a no es de frontera y por ende no es paralela a la recta b. El teorema VI ya fue establecido en forma implícita en el § 29.

TEOREMA VII. *Dos rectas que al cortarse con una tercera forman ángulos alternos iguales, o bien ángulos correspondientes iguales, son divergentes.*

DEMOSTRACIÓN. Este teorema es una generalización del precedente, pero se reduce fácilmente a él. Sean a y b dos rectas dadas, y sea c una secante de ambas (fig. 41). Sean A y B los puntos en que c corta a y b, y O, el punto medio del segmento AB. Bajemos desde O las perpendiculares OP y OQ a las rectas a y b.

En los triángulos rectángulos OAP y OBQ tenemos: $OA = OB$, por la elección del punto O; $\angle OAP = \angle OBQ$, por la condición del teorema. De aquí sigue que el triángulo OAP es igual al OBQ. En particular, $\angle BOQ = \angle AOP$ y, en consecuencia, los segmentos OP y OQ están sobre una misma recta PQ, a la cual son perpendiculares las rectas a y b. Por el teorema VI, estas rectas son divergentes, cosa que había que probar.

Ahora demostraremos que dos rectas divergentes cualesquiera tienen exactamente una perpendicular común. Por consiguiente, *la existencia de una perpendicular común, y, además, sólo una, es una propiedad característica de las rectas divergentes.*

Ante todo está claro que en la geometría de Lobachevski dos rectas no pueden tener dos perpendiculares comunes. En efecto, si AB y CD son perpendiculares a las rectas AC y BD, el cuadrilátero $ABCD$ tendrá suma de ángulos igual a cuatro rectos, cosa imposible, pues cada uno de los triángulos ABC y BCD tiene suma de ángulos menor que dos rectos. Así, la unicidad de la perpendicular común a dos rectas se establece inmediatamente.

La demostración se existencia de una perpendicular común a dos rectas divergentes no es tan sencilla.

Sean a y b dos rectas divergentes cualesquiera (fig. 42). Sea MN la perpendicular trazada de un punto arbitrario M de la recta b a la recta a. Si MN es también perpendicular a b, no hay nada que demostrar. Supongamos, pues, que MN no es perpen-

dicular a b, y fijemos sobre b un sentido positivo de manera que éste forme un ángulo obtuso con la perpendicular MN. Entonces, en virtud del lema I, la longitud de MN, al desplazar el punto M en el sentido positivo, crece monótona e indefinidamente.

Demostraremos que, a partir de algún momento, la longitud de MN crece indefinidamente también cuando desplazamos el punto M en el sentido negativo.

La recta MN divide el plano en dos semiplanos; convendremos en llamar positivo a aquel hacia el cual está dirigida la semirrecta positiva de b, y negativo, al otro.

Tracemos por M en el semiplano negativo la semirrecta $\bar{c}$ paralela a la recta a.

Como a y b son rectas divergentes, la semirrecta c está más cerca de la recta a que la semirrecta negativa de la recta b. Por esto, si fijamos sobre b en el semiplano negativo algún punto M' y trazamos la perpendicular $M'N'$ a la recta a, ésta cortará la semirrecta $\bar{c}$ en algún punto P' del segmento $M'N'$. Así, pues, $M'N' > M'P'$. Tracemos ahora la perpendicular $M'Q'$ a la semirrecta $\bar{c}$; evidentemente, $M'P' > M'Q'$ y, en consecuencia, $M'N' > M'Q'$. Pero, de acuerdo con el lema II, la distancia de un punto variable sobre un lado de un ángulo al otro lado crece indefinidamente cuando este punto se aleja del vértice; en virtud de esto, cuando el punto M' se aleja en sentido negativo, $M'Q'$ crece monótona e indefinidamente. Como $M'N' > M'Q'$, entonces $M'N'$ a la postre también tandrá que crecer indefinidamente.

Introduzcamos sobre la recta b un sistema lineal de coordenadas, fijando arbitrariamente un origen y suponiendo que el crecimiento de la coordenada tiene lugar, por ejemplo, en sentido positivo. Sea x la coordenada de un punto variable M, e $y = f(x)$ la longitud de la perpendicular MN a la recta a. Por lo que acabamos de mostrar, $f(x)$ es una función continua siempre positiva, cuyo valor crece indefinidamente cuando x tiende al infinito ya sea en el sentido positivo o en el negativo. De aquí sigue, en primer lugar, que $f(x)$ tiene algún mínimo positivo $f(x_0)$ y, en segundo, que cada valor mayor que $f(x_0)$ lo toma la función $f(x)$ al menos para dos valores distintos del argumento. Sean x_1 y x_2 ($x_1 \neq x_2$) dos valores de x, tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Sean M_1 y M_2 los puntos de coordenadas x_1 y x_2, y M_1N_1, M_2N_2, las perpendiculares bajadas de ellos a la recta a. Por la elección de los puntos M_1 y M_2, el cuadrilátero $N_1M_1M_2N_2$ es un cuadrilátero de Saccheri y es, por ende, simétrico con respecto a la perpendicular trazada en el punto medio de la base inferior. De aquí sigue que la perpendicular M_0N_0 trazada desde el punto medio M_0 del segmento M_1M_2 a la recta a, es una perpendicular común a las rectas a y b. Queda, así, demostrada la existencia de una perpendicular común.

Si tomamos ahora sobre la recta b un punto arbitrario $\bar{M}$ y bajamos de él la perpendicular $\bar{M}\bar{N}$ a la recta a, en el cuadrilátero $N_0M_0\bar{M}\bar{N}$ los ángulos en los vértices N_0, M_0 y $\bar{N}$ serán rectos y, consecuentemente, en el ángulo externo en el vértice $\bar{M}$ será obtuso. De aquí, en virtud del lema I, sigue que los valores de la función $f(x)$ crecen en el lado del punto $\bar{M}$ en el que no se encuentra el punto M_0. En consecuencia, M_0 es el único punto donde $f(x)$ alcanza su mínimo valor.

Todo lo expuesto permite enunciar el siguiente

TEOREMA VIII. *Dos rectas divergentes cualesquiera tienen exactamente una perpendicular común, a ambos lados de la cual se alejan indefinidamente una de otra.*

Agreguemos, a propósito, que las proyecciones de todos los puntos de una de las

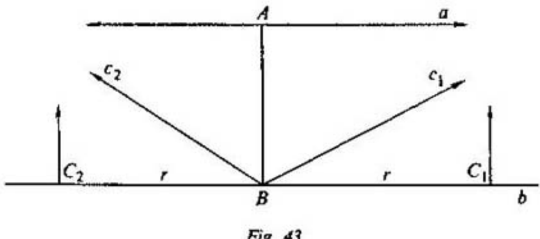


Fig. 43

dos rectas divergentes sobre la otra forman sólo un segmento finito en la segunda. En efecto, sean a y b dos rectas divergentes, y AB, su perpendicular común (fig. 43). Tracemos por B las rectas c_1 y c_2, paralelas a la recta a, e imaginemos que en todos los puntos de la recta b se han levantado perpendiculares a ella. Si todas estas perpendiculares encontrasen a las rectas c_1 y c_2, sería necesario aceptar el V postulado de Euclides (véase la proposición IV del § 8, o bien el teorema 54 del § 27).

Así, del postulado de Lobachevski sigue que las perpendiculares levantadas en los puntos de la recta b y suficientemente alejadas del punto B no cortan a las rectas c_1 y c_2. Sea r cota inferior de las distancias de estas perpendiculares al punto B. Determinemos sobre la recta b dos puntos C_1 y C_2 de modo que $C_1B = BC_2 = r$; entonces, evidentemente, las proyecciones de todos los puntos de la recta a cubrirán todo el interior del segmento C_1C_2.

Las perpendiculares en los puntos C_1 y C_2 son paralelas tanto a la recta a, como a las rectas c_1 y c_2 (no nos detendremos a demostrarlo; la demostración, en esencia, se hace más abajo, en el § 33). Si construimos la recta simétrica a a con respecto a b, se obtiene una figura representada esquemáticamente en la fig. 44. Se trata de un «rectángulo» singular, cuyos lados y diagonales son paralelos entre sí en las direcciones indicadas por las flechas.

Naturalmente, esta figura no tiene ningún análogo en la geometría de Euclides.

§ 32. Estudiemos ahora la disposición recíproca de rectas paralelas. Supongamos que las dos rectas a y b, representadas en la fig. 45, son paralelas en alguna dirección. Denotemos con M un punto variable sobre la recta a, y tracemos la perpen-

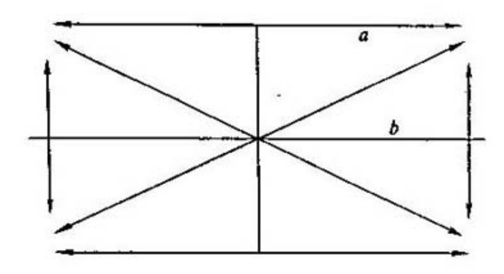


Fig. 44

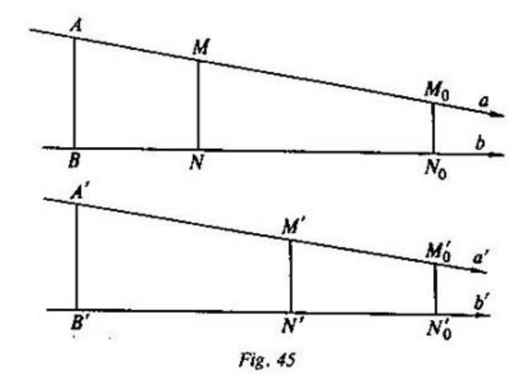


Fig. 45

dicular MN a la recta b. Del lado del paralelismo, esta perpendicular forma un ángulo agudo con la recta a. En virtud del lema I, de aquí sigue que la longitud de MN crece monótona e indefinidamente, cuando el punto M se desplaza en el sentido opuesto al de paralelismo, y decrece monótonamente en el sentido del paralelismo.

Demostraremos ahora que en el último caso la longitud de MN tiende a cero.

Fijando sobre la recta a algún punto A, bajemos la perpendicular AB a la recta b. Sea dado un número positivo ε; hay que mostrar que para alguna posición del punto M será $MN < \varepsilon$. Si $AB > \varepsilon$, tomaremos en el plano alguna recta b' y en un punto arbitrario N'_0 de ella levantaremos la perpendicular $N'_0M'_0$, cuya longitud tomaremos menor que ε. Tracemos por M'_0 una recta a' paralela a b'. Imaginemos ahora que un punto variable M' se desplaza sobre la recta a' en el sentido opuesto al de paralelismo. Entonces, la longitud de la perpendicular $M'N'$ a la recta b variará en forma continua, creciendo indefinidamente. Por esto, habrá alguna posición de M' tal que la longitud de $M'N'$ resulte ser igual a AB. Denotemos por A' y B' los puntos M' y N' en ese momento. Desplazando la figura formada por las rectas a' y b', la ubicaremos de tal forma que la recta b' coincida con b, el punto B', con el B, y la dirección de paralelismo de las rectas a' y b' coincida con la de las rectas a y b *).

Como $A'B' = AB$, el punto A' coincidirá con el A, y por cuanto por un punto dado pasa una única recta paralela a una recta determinada en una dirección fija, la recta a' se superpondrá a la recta a. Supongamos que el punto M'_0 de la recta a' ocupe la posición M_0 en la recta a; denotaremos con N_0 la posición correspondiente del punto N'_0. Entonces, la longitud de la perpendicular M_0N_0 resulta ser menor que el número positivo prefijado ε, es decir, las rectas a y b se aproximan indefinidamente en la dirección del paralelismo.

Recapitulando lo expuesto, podemos enunciar el siguiente

---

*) Al hablar de desplazamiento de una figura, sobreentendemos la construcción de otra figura, congruente con la dada. En tal sentido, el concepto de movimiento es totalmente preciso (véase el § 19).

TEOREMA IX. *La distancia de un punto variable sobre una de dos rectas paralelas a la otra recta tiende a cero si el punto se desplaza en el sentido del paralelismo, y crece indefinidamente cuando el punto se mueve en el sentido opuesto.*

Resumamos concisamente los resultados de nuestro análisis: dos rectas divergentes tienen siempre exactamente una perpendicular, en ambos lados de la cual se alejan indefinidamente una de la otra («divergen»); las rectas paralelas se alejan indefinidamente en un sentido, y se aproximan asintóticamente en el otro.

3. La función de Lobachevski $\Pi(x)$

§ 33. Tomemos alguna recta a y un punto A fuera de ella. Por A pasan dos rectas paralelas a la recta a en dos direcciones diferentes; las denotaremos por u_1 y u_2. Estas rectas forman ángulos iguales con la perpendicular AP bajada a la recta a desde el punto A. El ángulo agudo que forma cualquiera de las rectas u_1 ó u_2 con la perpendicular AP se denomina *ángulo de paralelismo en el punto A con respecto a la recta a.*

Demostraremos ahora que *el ángulo de paralelismo queda totalmente determinado por la distancia del punto A a la recta a.*

Sean A y A' dos puntos que se encuentran a igual distancia de las rectas a y a' respectivamente. Tracemos por el punto A una recta u paralela a a, y por A' una recta u', paralela a a'. Ahora denotemos con AP y $A'P'$ las perpendiculares trazadas a las rectas a y a', y por α y α', los ángulos de paralelismo en los puntos A y A' con respecto a las rectas a y a'. Debemos establecer la igualdad $\alpha = \alpha'$. Supongamos que, por el contrario, uno de estos ángulos es menor que el otro, por ejemplo, $\alpha < \alpha'$. Tracemos por A' una recta que forme con el segmento $A'P'$ un ángulo α, del lado del paralelismo de las rectas u' y a'. En virtud del paralelismo de estas rectas, la recta trazada tendrá que intersecar a' en algún punto Q' (situado en el sentido del paralelismo con respecto al punto P'). Determinemos sobre la recta a, partiendo del punto P y en el sentido del paralelismo, un segmento PQ, igual al $P'Q'$. El triángulo PAQ, evidentemente, es igual al $P'A'Q'$ (los lados AP y $A'P'$ son iguales por la condición, los lados PQ y $P'Q'$, por construcción, y los ángulos comprendidos entre estos lados son rectos); por esto, $\angle PAQ$ es igual a α. Por consiguiente, la recta u coincide con la recta AQ. Pero en este caso u tendrá que intersecar la recta a en el punto Q, cosa imposible por ser paralelas estas rectas. La contradicción obtenida demuestra nuestra afirmación.

Sea A algún punto fuera de la recta a_0, y α, el ángulo de paralelismo en el punto A con respecto a la recta a_0 (fig. 46). Sea x la longitud de la perpendicular AA_0 trazada a la recta a_0 desde A. Según lo expuesto, el ángulo α queda totalmente determinado por la magnitud x; introduciendo la notación de Lobachevski, pongamos

$$\alpha = \Pi(x).$$

Esta función tiene importancia fundamental en la geometría no euclidiana; pasaremos a estudiar sus propiedades elementales.

Mostremos, ante todo, que $\Pi(x)$ *es una función monótona decreciente.* Con este fin, tomemos sobre la recta AA_0 algún punto A' y denotemos por x' la longitud de $A'A_0$. Supongamos que $x' > x$; hay que demostrar que $\Pi(x') < \Pi(x)$. Tracemos

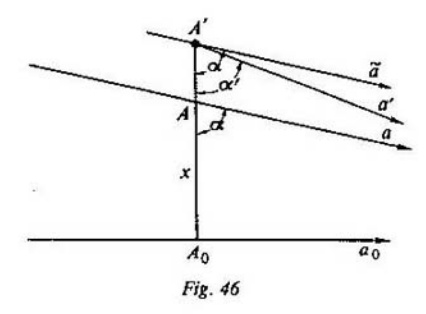


Fig. 46

por A una recta a paralela a a_0, y por A' otra $\tilde{a}$ de forma que forme un ángulo $\alpha = \Pi(x)$ con el segmento $A'A_0$, del lado de paralelismo de las rectas a y a_0. Las dos rectas a y $\tilde{a}$ forman ángulos correspondientes iguales al intersecar la recta AA'; en virtud del teorema VII son, por tanto, divergentes. De aquí sigue que la recta a' que pasa por A' y es paralela a a en la misma dirección en que a es paralela a a_0 está más cerca de a que $\tilde{a}$, del lado del paralelismo.

Así, pues, si $\alpha' = \Pi(x')$, entonces $\alpha' < \alpha$, es decir, cuando $x' > x$ será $\Pi(x') < \Pi(x)$.

Observemos, a continuación, que $\Pi(x)$ *toma todos los valores encerrados entre* 0 y $\frac{\pi}{2}$. Para establecerlo, tomemos un ángulo agudo arbitrario α y demostremos que es ángulo de paralelismo para algún segmento x. Sea O el vértice del ángulo, y a y b, sus lados. Del postulado de Lobachevski sigue que las perpendiculares a la recta a, suficientemente alejadas del punto O, no encuentran la recta b (véase el teorema 54 del capítulo II o bien la proposición IV del § 8).

Sea M un punto arbitrario, que sea el pie de una perpendicular a la recta a que no corte la oblicua b. Sea M_0 un punto de la recta a tal que $OM_0 = x$ sea la cota inferior de las distancias OM; denotemos por b_0 la perpendicular a a en el punto M_0. Mostraremos que b_0 y b son paralelas. Para esto, hay que probar ante todo que b_0 y b no se cortan.

Supongamos lo contrario, es decir, que b_0 y b tienen un punto común N_0 (fig. 47a). Tomemos entonces sobre la recta b un punto N_1 de forma que N_0 esté entre O y N_1, y tracemos la perpendicular N_1M_1 a la recta a; hagamos $M_0M_1 = \varepsilon$. Entonces, si M es el pie de alguna perpendicular a la recta a que no corta b, será $OM > x + \varepsilon$, lo cual contradice la definición de x como cota inferior de las longitudes OM.

Demostremos ahora que b_0 es recta frontera en el conjunto de las rectas que pasan por M_0 y no cortan la recta b.

Sea $\bar{b}$ una semirrecta arbitraria que pasa por M_0 del mismo lado de la recta b_0 que el punto O, y del mismo lado de la recta a que el ángulo agudo α (fig. 47b). Tomemos sobre $\bar{b}$ algún punto $\bar{P}$ de modo que se encuentre dentro del ángulo α, y tracemos la perpendicular $\bar{P}\bar{M}$ a la recta a. Evidentemente, el punto $\bar{M}$ estará entre los puntos O y M_0 y, por consecuencia, la perpendicular $\bar{P}\bar{M}$ tendrá un punto común $\bar{N}$

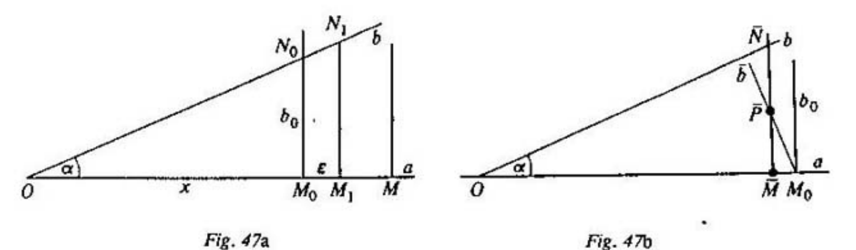


*Fig. 47*a *Fig. 47*b

con la recta b. Como la semirrecta $\bar{b}$ interseca uno de los lados del triángulo $O\bar{M}\bar{N}$, precisamente, el lado $\bar{M}\bar{N}$, por el axioma de Pasch tendrá que intersecar uno de los otros dos lados de este triángulo; pero $\bar{b}$ no puede tener un punto común con el lado $O\bar{M}$. En consecuencia, $\bar{b}$ tiene un punto común con la recta b. Queda con esto demostrado el paralelismo entre las rectas b y b_0, con lo cual se ha demostrado, además, nuestra afirmación. Efectivamente, para un ángulo agudo α prefijado, resultó posible determinar un segmento $x = OM_0$ tal que $\alpha = \Pi(x)$, es decir, efectivamente $\Pi(x)$ toma todos los valores comprendidos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

De aquí sigue ya la continuidad de $\Pi(x)$, pues una función monótona que junto con dos valores cualesquiera toma todos los intermedios, es continua en todo su dominio.

Recapitulando todo lo expuesto, tendremos el

TEOREMA X. *La función* $\Pi(x)$ *está definida para todo* x *positivo*, *es monótona decreciente y continua*; $\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}$ *cuando* $x \to 0$, y $\Pi(x) \to 0$ *cuando* $x \to \infty$.

De que $\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}$ cuando $x \to 0$, se desprende que en regiones pequeñas del espacio, la geometría de Lobachevski difiere poco de la de Euclides (pues para x pequeños el ángulo de paralelismo es próximo a un recto).

La dependencia entre las magnitudes lineales y las angulares, establecida por la función $\alpha = \Pi(x)$, confiere un carácter muy peculiar a la geometría de Lobachevski. Así, por ejemplo, en esta geometría no existe la semejanza entre figuras. Esto es fácil de prever: como las magnitudes angulares y las lineales están relacionadas por ecuaciones, entonces, si se dan los ángulos de un triángulo quedarán determinados sus lados, y triángulos con ángulos respectivamente iguales resultarán iguales entre sí. Más adelante (en el capítulo VIII, § 231) estableceremos esto con toda precisión y deduciremos fórmulas que expresan los lados de un triángulo como función de sus ángulos (véase también el § 61).

Otra particularidad importante de la geometría no euclidiana tiene que ver con la elección de la unidad de medición de longitudes. En la geometría de Euclides existen constantes absolutas de las magnitudes angulares, es decir, ángulos cuya construcción se puede describir de manera abstracta (independientemente de la interpretación concreta de los objetos geométricos); si bien esta construcción contiene elementos arbitrarios, éstos no influyen en la magnitud de los ángulos obtenidos, es de-

cir, dichos ángulos resultan ser iguales entre sí. Como ejemplo, basta indicar el ángulo recto: si se fija éste como unidad de medida de ángulos, al efectuar las mediciones no habrá necesidad de fijar un «patrón» de ángulo recto, con el cual habrán de compararse los demás ángulos por superposición, pues el ángulo recto siempre puede determinarse por una construcción exacta.

Por el contrario, en la geometría euclidiana no existen constantes lineales absolutas. Para expresar las longitudes de todos los segmentos mediante números, es necesario convenir en la elección de la unidad de longitud, que bien puede ser cualquier segmento. Si alguien efectuase esta elección, no la podría describir, y a fin de compararla con otros segmentos tendría que EXHIBIR su patrón. Así, en la práctica, al medir longitudes se utilizan copias del metro patrón; pero la elección del patrón no está condicionada por ningún argumento geométrico.

Al contrario, en la geometría de Lobachevski, conjuntamente con constantes absolutas de las magnitudes angulares, existen también constantes lineales absolutas. Así, por ejemplo, el segmento x que satisface la ecuación $\Pi(x) = \frac{\pi}{4}$ está bien determinado, por cuanto la función $\Pi(x)$ lo está. Dicha función, como vimos, queda completamente determinada en toda la semirrecta numérica positiva por las propiedades geométricas del plano de Lobachevski, es decir, las propiedades de la variedad de objetos geométricos sujetos a los axiomas de la planimetría de Lobachevski. En el § 190 obtendremos una expresión para $\Pi(x)$ utilizando las funciones elementales, bien conocidas en el análisis matemático (véase asimismo el § 59).

4. Rectas y planos en el espacio de Lobachevski

§ 34. Daremos ahora una breve descripción de las particularidades de la posición recíproca de rectas y planos en el espacio de Lobachevski.

Ante todo, enumeraremos las proposiciones básicas de la estereometría absoluta que tendremos que utilizar en lo que sigue.

Sin detenernos a detallar los corolarios elementales de los axiomas I,1 — 8 y II,1 — 4, una parte de los cuales fue indicada en su oportunidad en el cap. II, referimos los teoremas siguientes.

1. *Sean dados un plano arbitrario α y dos rectas a, b, situadas en el plano α y que pasen por alguno de sus puntos O. Si la recta c es perpendicular en O a las rectas a y b, es también perpendicular a cualquier otra recta que está situada en el plano α y pasa por O.*

En este caso, la recta c se llama *perpendicular al plano α.*

2. *Por cada punto del espacio se puede trazar exactamente una recta perpendicular a un plano dado.*

3. *Por cada punto del espacio se puede trazar exactamente un plano perpendicular a una recta dada.*

Dos semiplanos que tengan una recta frontera común y no estén sobre un mismo plano, determinan un ángulo diedro. Los semiplanos que lo determinan se llaman sus *caras*, y la semirrecta frontera común, su *arista.*

Todo plano perpendicular a la arista de un ángulo diedro interseca las caras por dos semirrectas que forman *el ángulo lineal del ángulo diedro dado.*

Tiene lugar el teorema:

4. *Todos los ángulos lineales de un ángulo diedro dado son iguales entre sí.*

Dos ángulos diedros se dirán *iguales*, si sus ángulos lineales lo son.

Un ángulo diedro se llama *recto*, si lo son sus ángulos lineales.

Dos planos α y β que se cortan determinan dos pares de ángulos diedros opuestos por su arista. Si estos ángulos son rectos, los planos α y β se llaman *perpendiculares* entre sí.

Tienen lugar los teoremas:

5. *Si el plano α contiene alguna perpendicular al plano β, entonces α es perpendicular a β.* (Este teorema, evidentemente, es un caso particular del teorema 4.)

6. *Si el plano α es perpendicular a alguna recta perteneciente al plano β, entonces el plano α es perpendicular al plano β.*

7. *Por cada recta a se puede trazar un plano α perpendicular a un plano β dado y sólo un plano, si a no es perpendicular a β.* (El teorema 7 sigue de los teoremas 2 y 5.)

La recta a' de intersección de los planos α y β se llama *proyección* de la recta a sobre el plano β (si a no es perpendicular a β). Según el teorema 7, cada recta se puede proyectar unívocamente sobre cualquier plano no perpendicular a ella.

Las proposiciones enumeradas pertenecen a la geometría absoluta; las que siguen pertenecen ya esencialmente a la geometría de Lobachevski.

§ 35. Dos rectas que no se cortan y pertenecen a un mismo plano en el espacio de Lobachevski se llamarán *paralelas* o *divergentes*, si dentro del plano que determinan ambas éstas son paralelas o divergentes respectivamente, según la definición que dimos antes de estos conceptos en la planimetría plana.

Para lo que sigue es esencial establecer la transitividad de la relación de paralelismo, es decir, que dos rectas paralelas a una tercera en una misma dirección son paralelas entre sí en la misma dirección. Naturalmente, ahora tiene interés sólo el caso en que las tres rectas no pertenezcan a un mismo plano, pues ya hemos demostrado esta proposición en la planimetría (teorema V). Esta transitividad sigue directamente del siguiente lema.

LEMA IV. *La recta de intersección de dos planos que pasan por dos rectas paralelas en alguna dirección, es paralela a estas rectas en la misma dirección.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las rectas a y b, pertenecientes a un mismo plano γ y paralelas en alguna dirección. Sean α y β dos planos que pasan respectivamente por estas rectas, y c, la recta de intersección de los planos α y β (fig. 48; suponemos que los planos α y β no coinciden con el γ). Hay que probar que c es paralela a cada una de las rectas a y b en la misma dirección en que éstas lo son entre sí.

Demostremos, por ejemplo, el paralelismo de las rectas a y c. Ante todo, es claro que las rectas a y c no se cortan. En efecto, si se encontrasen en algún punto O, este punto sería común a los tres planos α, β, γ. Pero entonces también las rectas a, b tendrían un punto común O, contra lo supuesto.

Fijemos ahora sobre la recta c un punto arbitrario C y bajemos de éste la perpendicular CA sobre la recta a. El segmento CA forma dos ángulos adyacentes con la recta a; escojamos aquel que se encuentra del lado del paralelismo de las rectas a y b. Tracemos una semirrecta arbitraria c con origen en C y contenida dentro de este

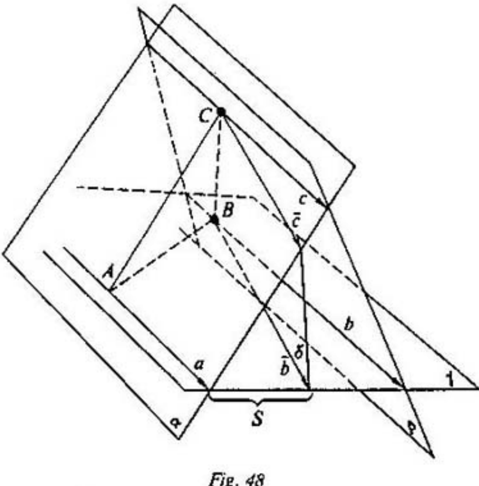


Fig. 48

ángulo. Para comprobar el paralelismo de las rectas c y a, hay que demostrar que la semirrecta $\bar{c}$ corta a a.

Fijemos un punto arbitrario B sobre la recta b y consideremos el semiplano δ, determinado por la recta CB y la semirrecta $\bar{c}$. Este semiplano interseca el plano γ según una semirrecta b, que estará en el interior del ángulo formado por el segmento BA y la dirección de paralelismo de la recta b con la recta a. Como a y b son paralelas por la condición, la semirrecta $\bar{b}$ intersecará a en algún punto S; éste será un punto común de los tres planos α, γ y δ. Por esto, la semirrecta $\bar{c}$ tendrá que cortar a, y el lema queda demostrado.

TEOREMA XI. *Dos rectas paralelas a una tercera en una misma dirección son paralelas entre sí, en la misma dirección.*

DEMOSTRACIÓN. Para el caso en que las tres rectas están sobre un mismo plano, este teorema ya fue probado en el § 30. Consideremos ahora las rectas a, b y c, que no están sobre un mismo plano. Supongamos que b y c son paralelas a la recta a en alguna dirección. Hay que demostrar que b y c son paralelas entre sí en la misma dirección en que lo son con la recta a.

Para demostrar esto, fijemos sobre la recta c algún punto M y tracemos el plano β que contiene este punto y la recta b. Sea α el plano en que se encuentran las rectas a y c. Como b no está en el plano α, los planos α y β serán diferentes. Por el lema precedente, la recta c' de intersección de los planos α y β es paralela a las rectas a y b en la misma dirección en que éstas son paralelas entre sí. La recta c, por la condición, es paralela a la recta a en esta misma dirección. Pero por el punto M, como sabemos, puede pasar únicamente una recta paralela a a en una dirección determinada. En consecuencia, las rectas c y c' coinciden, es decir, c es la recta de intersección de los planos α y β y, por lo que ya vimos, es paralela a la recta b.

Queda así demostrada la transitividad de la relación de paralelismo para la geometría del espacio. Aquí debe siempre tenerse en cuenta que las direcciones de paralelismo de las rectas consideradas tienen que coincidir: dos rectas paralelas a una tercera en direcciones diferentes, nunca serán paralelas entre sí. Esto se demuestra fácilmente si se tiene en cuenta que las rectas paralelas se aproximan indefinidamente en la dirección de paralelismo y divergen indefinidamente en la dirección opuesta.

Pasando al estudio de la posición recíproca de rectas y planos, indicaremos sólo los tres casos posibles aquí.

1. La recta y el plano tienen un punto común.

2. La recta es paralela a su proyección en el plano; en este caso, se dice que la recta es paralela al plano.

3. La recta diverge con su proyección en el plano; en este caso, se dice que la recta y el plano son divergentes.

Indiquemos un teorema cuya demostración se obtiene de inmediato del lema IV.

TEOREMA XII. *Una recta es paralela a un plano si es paralela a alguna recta perteneciente al plano.*

El lector puede fácilmente imaginarse las diferencias cualitativas en la posición de rectas paralelas a un plano y rectas divergentes con él, si toma en cuenta lo expuesto en el § 32.

Pasemos ahora a analizar los casos posibles de posición recíproca de planos. Distinguiremos tres casos posibles.

1er CASO Los dos planos tienen una recta común.

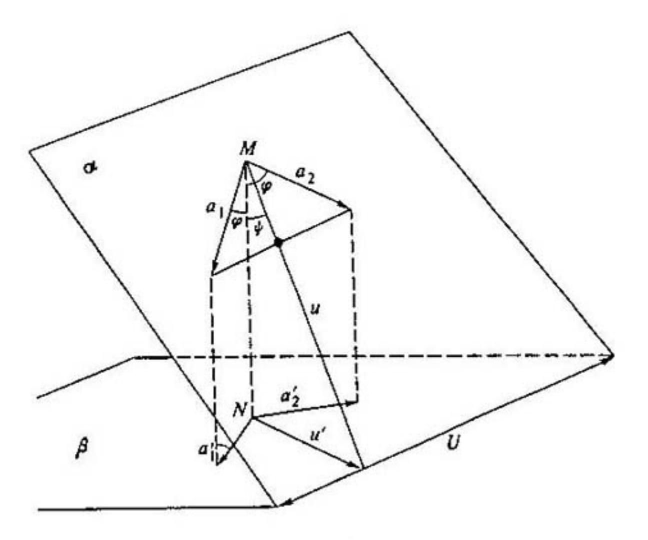


Fig. 49

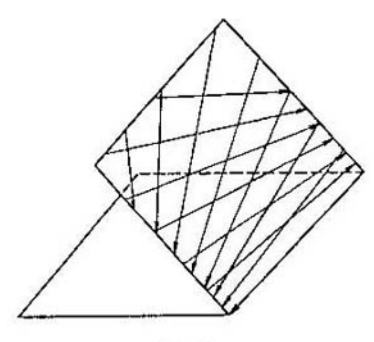


Fig. 50

Supongamos que los planos α y β tienen la recta común a. Entonces, por ejemplo, en el plano α se pueden trazar, por un punto arbitrario, dos rectas paralelas a la recta a en direcciones diferentes. En virtud del teorema XII, estas rectas serán paralelas al plano β. Entonces, *en cada uno de los dos planos secantes, por cada punto que no esté en la línea de corte, pasan dos rectas paralelas al otro plano.*

No es difícil establecer que *esta propiedad caracteriza los planos de intersección.* En efecto, sean dados dos planos α y β y supongamos que en el plano α por cada punto M pasan dos rectas a_1 y a_2 paralelas al plano β (fig. 49). Demostremos que los planos α y β se cortan. Evidentemente, las rectas a_1 y a_2 forman ángulos agudos iguales con la perpendicular MN bajada desde M sobre el plano β; la magnitud común de éstos es $\varphi = \Pi(x)$, donde x es la longitud de la perpendicular MN. Tracemos ahora en el plano α por M alguna recta u de forma que esté dentro del ángulo determinado por las rectas a_1 y a_2, si se las supone orientadas hacia el lado de paralelismo. Como recta u podemos tomar, en particular, la bisectriz de este ángulo. Sea ψ el ángulo agudo que la recta u forma con el segmento MN. Por consideraciones elementales sigue que $\psi < \varphi$, es decir, es menor que el ángulo de paralelismo $\Pi(x)$. Consecuentemente, la recta u tendrá que intersecar su proyección sobre el plano β en algún punto que será común de los planos α y β. De aquí concluimos inmediatamente que los planos α y β tienen una recta común.

Hemos obtenido, así, el siguiente teorema.

TEOREMA XIII. *Para que dos planos se corten, es necesario y suficiente que por cualquier punto de uno de ellos pasen dos rectas paralelas al otro* (fig. 50).

2do CASO. Los dos planos están situados de manera que por algún punto de uno de ellos pasa exactamente una recta paralela al otro; en este caso se dice que los planos son *paralelos.*

Ante todo, es claro que a la condición enunciada los planos no pueden tener puntos comunes, es decir, no pueden ser de intersección, ya que en caso contrario por cualquier punto de cada uno de ellos pasarían dos rectas paralelas al otro.

Ahora bien, si se dan dos planos α y β y si por el punto M en el plano α pasa exactamente una recta a paralela al plano β, es decir, paralela a su proyección a' sobre el plano β, entonces en el plano α por *cada* uno de sus puntos pasará exacta-

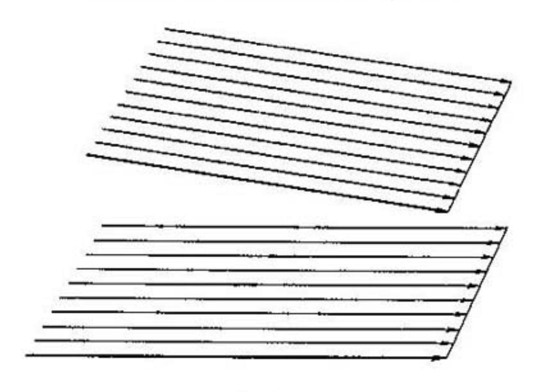


Fig. 51

mente una recta paralela al plano β. En efecto, por cada punto de α se puede trazar una recta paralela a a, en la misma dirección en que ésta es paralela a la recta a'. Por el teorema XI, esta recta es paralela a a', y entonces por el XII, es paralela al plano β.

No puede haber otra recta que esté en el plano α, pase por el mismo punto y sea paralela al plano β, pues de otro modo la recta paralela a ella que pasa por M sería, por las mismas razones, paralela al plano β y, al mismo tiempo, sería diferente de la recta a, cosa imposible según la hipótesis.

El plano α queda, así, cubierto por una familia de rectas paralelas al plano β. No sería difícil mostrar que el plano β a su vez está cubierto por una familia de rectas paralelas a α (fig. 51).

Evidentemente, ambos planos se aproximan indefinidamente en la dirección de paralelismo de las rectas de las familias indicadas.

3^er^ CASO. Los dos planos están situados de modo que ninguno de ellos contiene rectas paralelas al otro; en este caso los planos se llaman *divergentes.*

Dos planos divergentes tienen siempre una perpendicular común y, recíprocamente, dos planos perpendiculares a una misma recta son divergentes. Dos planos divergentes se alejan indefinidamente uno del otro en todas las direcciones, a partir de la perpendicular común (de aquí el nombre de divergentes). No vamos a demostrar las últimas afirmaciones; el lector las puede hacer como ejercicios sencillos.

Los tres casos de posición recíproca de los planos pueden imaginarse bien, recurriendo a la siguiente consideración.

Sea α_0 algún plano; A, un punto que no le pertenece. Bajemos de A sobre el plano α_0 la perpendicular AP y tracemos, además, por A todas las rectas paralelas a α_0. Todas ellas forman un mismo ángulo con AP, igual a $\Pi(AP)$, formando, por ello, un cono circular K con eje AP (fig. 52).

Un plano que pasa por A e interseca el cono K por dos generatrices contiene dos rectas que pasan por A y son paralelas al plano α_0 (precisamente, estas dos generatrices). Este plano se corta con el α_0 (en la fig. 52 es el plano α_1). Su recta de inter-

sección con α_0 se ve desde A bajo el ángulo determinado por las dos generatrices antedichas del cono K.

Un plano que pase por A y sea tangente al cono K según una cierta generatriz, contendrá sólo una recta que pase por A y sea paralela a α_0 (la generatriz de contacto). Este plano es paralelo a α_0 (el plano α_2 de la fig. 52).

Por último, un plano que pase por A y no contenga ninguna generatriz del cono K, no tendrá rectas paralelas al plano α_0; este plano y el α_0 divergen (el plano α_3 de la fig. 52).

Mostraremos un teorema que será necesario más adelante.

TEOREMA XIV. *Dados un plano y una recta paralela a él, existe exactamente un plano que pasa por esta recta y no interseca el plano dado.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y α la recta y el plano dados, respectivamente. Fijemos sobre la recta a un punto arbitrario A y tracemos por él todas las rectas paralelas al plano α; éstas formarán un cono circular K con vértice en A.

Si el plano que pasa por la recta a no corta al plano α, no puede contener dos generatrices del cono y, consecuentemente, tendrá que ser tangente a él a lo largo de la generatriz a. Pero por cada generatriz del cono circular pasa exactamente un plano tangente, de donde sigue nuestro teorema.

Concluiremos con este análisis la revista comenzada en el § 28 de las proposiciones básicas de la teoría de las paralelas de Lobachevski.

A pesar de su peculiaridad, en lo expuesto se pueden encontrar muchas similitudes con la teoría euclidiana de las paralelas.

En la siguiente sección estudiaremos una serie de objetos importantes de la geometría de Lobachevski que no tienen ningún análogo en la de Euclides.

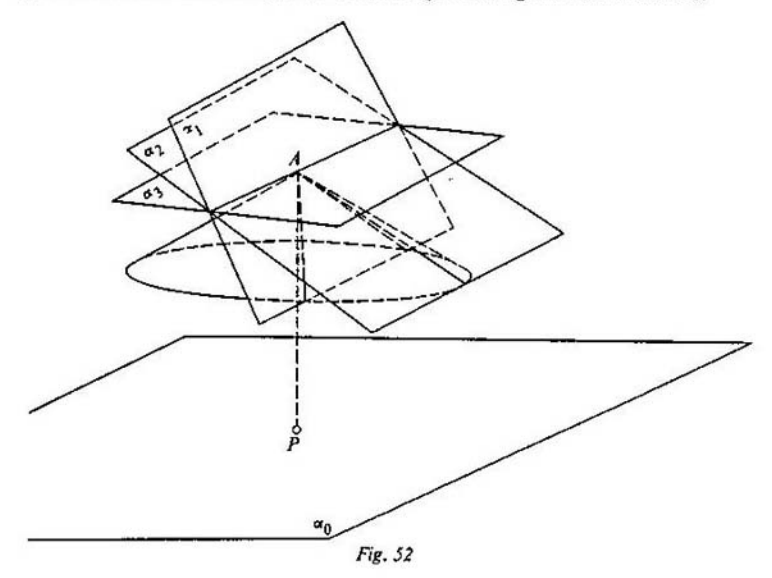


Fig. 52

5. Equidistante y oriciclo

§ 36. En la presente sección se discutirán algunas curvas características de la geometría no euclidiana. Llegaremos a su definición considerando los tipos básicos de movimientos del plano de Lobachevski en sí mismo.

Al final del § 19 demostramos que cada movimiento de una figura puede componerse de una traslación según una recta y un giro alrededor de un punto. El movimiento fue definido entonces como la construcción, dada una figura, de otra congruente a ella. No se hizo diferencia entre las figuras propiamente congruentes y las mutuamente especulares. Si se consideran sólo los movimientos en el sentido directo de la palabra, es decir, si se excluyen las reflexiones especulares se puede enunciar un teorema mucho más fuerte que el citado ahora.

Así, en la planimetría de Euclides tiene lugar el siguiente teorema (que es bien conocido en cinemática como teorema de d'Alembert).

Cada movimiento de la figura (o de todo el plano) es o bien un giro alrededor de un punto, o bien una traslación según una recta.

En otras palabras, un giro y una traslación no sólo permiten obtener mediante su composición cualquier movimiento, sino que son inclusive los únicos tipos posibles de movimientos euclidianos.

Consideraremos ahora los giros del plano euclidiano alrededor de algún punto O. Sea k una circunferencia arbitraria con centro O. Al girar el plano alrededor de O, todos los puntos de la circunferencia k se desplazan, pero permanecen sobre la misma circunferencia. La circunferencia, entonces, globalmente no cambia su posición en el plano, sino que desliza sobre sí misma.

Una línea que en algún movimiento del plano conserve su posición se llamará *invariante* con respecto a este movimiento.

Evidentemente, las circunferencias concéntricas de centro común O son invariantes con respecto a todos los giros alrededor de O.

Si se efectúan traslaciones del plano euclidiano según alguna recta u, las líneas invariantes serán rectas paralelas a u.

En la planimetría de Lobachevski existen tres tipos básicos de movimientos:

1. Giro alrededor de un punto: las curvas invariantes con respecto a todos los giros alrededor de un punto O en la planimetría de Lobachevski son, al igual que en la planimetría de Euclides, circunferencias con centro O, llamadas también *ciclos*.

2. Traslación a lo largo de una recta: las líneas invariantes con respecto a todas las traslaciones a lo largo de una recta u en la planimetría de Lobachevski no son rectas, como en el caso euclidiano, sino curvas particulares, llamadas *equidistantes*, o bien curvas de distancia, o bien *hiperciclos*.

La equidistante es el lugar geométrico de los puntos situados a un mismo lado de una recta u a distancias iguales de ella. La recta u se denomina *base* de la equidistante, y la magnitud h de la distancia, *altura*. Cada recta, evidentemente, puede ser considerada como una equidistante de altura $h = 0$.

Se prueba directamente que las equidistantes son invariantes con respecto a traslaciones. En efecto, al trasladar el plano según una recta u, cada punto de una equidistante con base u se desplaza de manera que su distancia a u permanece invariable. Consecuentemente, este punto permanece todo el tiempo sobre la equidistante que, entonces, globalmente no cambia su posición.

Es fácil ver, asimismo, que las equidistantes son líneas curvas. Además, tiene lugar el siguiente teorema.

Cada recta tiene con una equidistante no más de dos puntos comunes.

La demostración se hace en dos palabras. Supongamos que alguna recta tenga tres puntos comunes A, B, C con una equidistante, que han sido denotados de forma que B esté entre A y C. Si A', B', C' son las proyecciones de los puntos A, B, C sobre la base, de acuerdo con la definición de equidistante los cuadriláteros $ABB'A'$ y $BCC'B'$ son de Saccheri (pues los segmentos AA', BB' y CC' son iguales). Como en la geometria de Lobachevski tiene lugar la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri, la suma de los ángulos ABB' y $B'BC$ es menor que dos rectos. Pero como los puntos A, B, C están alineados, la suma de estos mismos ángulos tendrá que ser igual a dos rectos. La contradicción obtenida demuestra el teorema.

3. El tercer tipo de movimiento básico del plano de Lobachevski sobre sí mismo puede denominarse giro alrededor de un punto del infinito.

Para describir este tipo de movimiento con suficiente claridad, necesitaremos dos teoremas referentes a las «secantes de igual pendiente».

§ 37. Un segmento AB cuyos extremos están sobre las rectas a y b se llama secante de igual pendiente de las rectas a, b, si forma con ellas los ángulos correspondientes internos iguales *).

TEOREMA XV. *Cualesquiera que sean dos rectas paralelas, por cada punto de cualquiera de ellas se puede trazar exactamente una secante de igual pendiente de ambas.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y b dos rectas paralelas arbitrarias; sea S algún punto igualmente alejado de las rectas a y b (la existencia de tal punto fue establecida en el § 30, en la demostración del teorema IV) y bajemos de S las perpendiculares SP y SQ sobre estas rectas. Tracemos, ahora, la bisectriz del ángulo PSQ, que denotaremos con g. Las rectas a y b son simétricas con respecto a g. Por esto, si A es un punto cualquiera de la recta a, el punto B, simétrico a A con respecto de g, estará sobre la recta b. La recta AB será, precisamente, una secante de igual pendiente de las rectas a y b. Es fácil ver que no existe otra secante de igual pendiente de estas rectas que pase por A. Efectivamente, si giramos la recta AB alrededor del punto A, uno de los dos ángulos que ésta forma con las rectas a, b disminuye, y el otro aumenta, de forma que la recta girada ya no puede ser secante de igual pendiente.

TEOREMA XVI. *Sean dadas en el plano tres rectas a, b, c paralelas entre sí en alguna dirección, que pasan por los puntos A, B, C respectivamente. Entonces, si AB es secante de igual pendiente de las rectas a y b, BC, secante de igual pendiente de b y c, AC será secante de igual pendiente de a y c.*

Supongamos primeramente que b está entre las rectas a y c (fig. 53). Sean p y q las perpendiculares en los puntos medios de los lados AB y BC del triángulo ABC, y P y Q, los puntos de su intersección con el lado AC.

Como el punto P está fuera de la franja del plano determinada por las rectas b y c, $\angle PBC$ será mayor que $\angle PCB$. De aquí sigue que el segmento PB es menor que el PC; pero $PB = AP$, por lo cual AP es menor que PC. Razonando análogamente

*) Las secantes de igual pendiente ya fueron mencionadas en el § 30. Ahora nos será más cómodo llamar así no a la recta, sino al segmento.

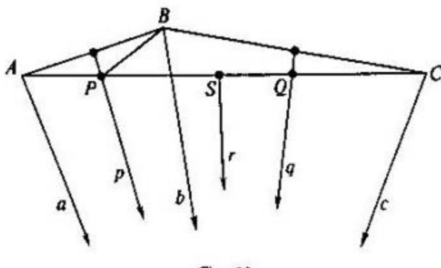


Fig. 53

hallamos que CQ es menor que QA, en virtud de lo cual el punto medio S del lado AC estará entre los puntos P y Q.

Obsérvese ahora que la recta p *es paralela* a las rectas a y b en la misma dirección en que éstas lo son entre sí. Efectivamente, la recta p no puede intersecar ninguna de las rectas a, b: si cortara, digamos, a, entonces, por la simetría de las rectas a y b con respecto a p, también b tendría que pasar por el punto de intersección. Las rectas a y b tendrían, así, un punto común, cosa excluida por la condición de paralelismo. Por otra parte, la recta p no puede ser divergente con alguna de las rectas a, b, pues estas rectas, al ser paralelas, se aproximan indefinidamente en dirección de paralelismo; como p permanece entre ambas, tendrá que aproximarse a cada una de ellas (para demostrar esto con todo rigor, es suficiente utilizar el lema III del § 30). Análogamente, la recta q es paralela a b y c. Todas las rectas a, b, c, p, q, son, entonces, paralelas entre sí (en una misma dirección).

Levantemos ahora en el punto S la perpendicular r al lado AC; esta recta no puede cortar ninguna de las rectas p, q. En efecto, si r cortase, por ejemplo, p en algún punto O, este punto sería el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, en cuyo caso por O tendría que pasar la recta q; por consiguiente, p y q tendrían un punto común O, cosa excluida, por ser paralelas. Más arriba mostramos que el punto S está entre P y Q. De aquí y de la observación que acabamos de hacer sigue que r está entre p y q; y siendo p y q paralelas, r será paralela a ellas en la misma dirección en que éstas lo son entre sí. Así, pues, las seis rectas a, b, c, p, q, r son paralelas entre sí en una misma dirección. Para nuestros fines es fundamental que la recta r, perpendicular al segmento AC en su punto medio, sea paralela a las rectas a y c; habiendo establecido esto, de hecho hemos concluido la demostración del teorema. Efectivamente, de aquí sigue que cada uno de los ángulos agudos que las rectas a y c forman con el segmento AC, es igual a $\Pi\left(\frac{AC}{2}\right)$, por lo cual estos ángulos son iguales entre sí.

Dicho de otro modo, AC es secante de igual pendiente de las rectas a y c.

Ahora hay que analizar el caso en que la recta b no está entre a y c.

Sean AB y BC secantes de igual pendiente de las rectas respectivas. Supongamos que AC no es secante de igual pendiente de las rectas a y c. Alguna de las rectas a, b, c está entre las otras dos; si tal recta es, por ejemplo, a, trazamos por el punto A la

secante de igual pendiente AC' de las rectas a y c. En virtud de lo demostrado arriba, BC' será secante de igual pendiente de las rectas b y c; pero, por la condición, BC es secante de igual pendiente de las mismas rectas. Se obtiene una contradicción con el teorema XV.

§ 38. Definiremos ahora un giro con centro en un punto del infinito.

Sea dado un sistema de todas las rectas posibles, paralelas entre sí en una misma dirección. Imaginarémonos a estas rectas convergentes en la dirección de su paralelismo al punto del infinito O_∞ (al decir «punto del infinito», estamos únicamente introduciendo un término, cómodo, que, en esencia, no significa otra cosa que el sistema dado de rectas).

Llamaremos *giro* con respecto al punto del infinito O a un movimiento del plano sobre sí mismo, tal que alguna recta a del sistema dado coincide con otra recta a' del mismo sistema (de forma que a' es paralela a a) y algún punto A de la recta a se desplaza al punto A' de a', de forma que el segmento AA' sea secante de igual pendiente de las rectas a y a' (en virtud del teorema XV, la posición del punto A' sobre la recta a' queda totalmente determinada por la posición de A sobre a); supongamos, además, que el semiplano, con respecto de la recta a, que no contiene a', se superpone al semiplano, con respecto de la recta a' que contiene a. En este caso,

a) *todo otro punto de la recta a con el punto a que se desplaza determina una secante de igual pendiente de las rectas a y a'*;

b) *cada recta b del sistema dado coincide en este movimiento con alguna recta b' de este mismo sistema (de forma que b' es paralela a b) y en esta superposición los puntos correspondientes de las rectas b y b' son extremos de secantes de igual pendiente de estas rectas.*

La demostración de la afirmación a) es evidente. En efecto, si A_1 es un punto arbitrario de la recta a, y A_1' es el punto sobre la recta a' a que se desplaza el punto A_1, entonces $AA_1 \equiv A'A_1'$ (fig. 54). Por esto, los puntos A_1 y A_1' son simétricos con respecto a la perpendicular en el punto medio del segmento AA' (recuérdese que AA' es la secante de igual pendiente de las rectas a y a'). De la simetría de las rectas a, a' y los puntos A_1 y A_1' con respecto a dicha perpendicular, se desprende que A_1A_1' es una secante de igual pendiente de las rectas a y a'. Queda con esto demostrada la afirmación a).

La demostración de la proposición b) es un tanto más compleja. Introduciremos, ante todo, algunas notaciones. Precisamente, sea I el semiplano, con respecto a la recta a, que no contiene a', y II, el otro semiplano; sean, además, I' el semiplano, con respecto a la recta a', que contiene a, y II' el complementario. En el movimiento considerado del plano sobre sí mismo, la recta a se superpone sobre la a'; el semiplano I, sobre el I' y el II, sobre el II'. Tomemos ahora en el sistema dado de rectas alguna recta b, digamos, en el semiplano I. Tracemos desde A la secante de igual pendiente a las rectas a y b; sea B el extremo de dicha secante (fig. 55). Determinemos el punto a donde debe trasladarse el punto B. Con este fin, tracemos del punto A', en el semiplano I', un segmento que es igual a AB y forma con la recta a' el mismo ángulo que AB forma con la recta a (tomamos los ángulos del lado del paralelismo de las rectas de nuestro sistema); sea B' el extremo del segmento construido. Evidentemente, B' es el punto a donde se traslada el punto B. Tracemos, al fin, una recta b' por B', de manera que forme con el segmento $A'B'$ el mismo án-

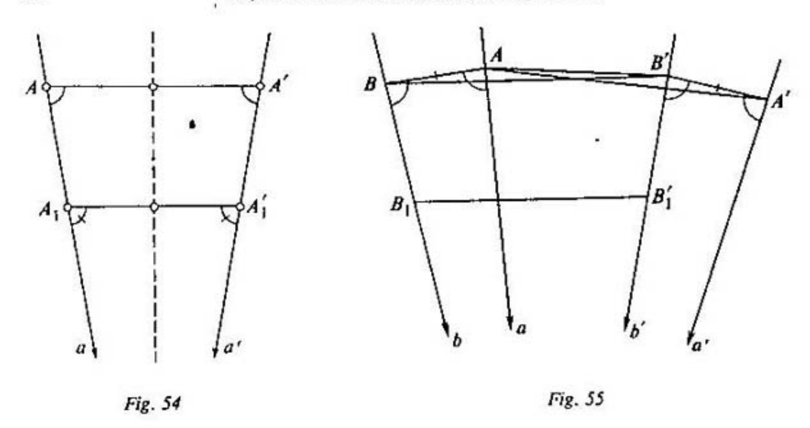


Fig. 54 *Fig. 55*

gulo que b forma con AB. Evidentemente, b' es la recta sobre la cual se superpondrá la recta b. Además, es claro que $A'B'$ es secante de igual pendiente de las rectas a', b', pues AB lo es de las rectas a, b.

Es claro, asimismo, que la recta b' es paralela a a' (en la dirección dada), pues b es paralela a a. Consecuentemente, b' pertenece al sistema dado de rectas. Demostremos ahora que BB' es secante de igual pendiente de las rectas b, b'; esto sigue del teorema XVI. En efecto, como AA' es secante de igual pendiente de las rectas a, a' y $A'B'$ lo es de las rectas a', b', por el teorema XVI, AB' será secante de igual pendiente de las rectas a, b'. Pero AB es una tal secante de a, b; por consecuencia, en virtud del mismo teorema XVI, BB' será secante de igual pendiente de la rectas b, b'. Sea ahora B_1 un punto cualquiera de la recta b; B_1', el punto correspondiente sobre b' durante la superposición. Entonces $BB_1 \equiv B'B_1'$; de aquí sigue que B_1B_1' es, asimismo, secante de igual pendiente de las rectas b y b' (véase la demostración de la proposición a)).

Queda así demostrada la afirmación b).

Ahora es fácil comprender por qué este tipo de movimiento del plano en sí mismo es llamado giro con respecto a un punto del infinito. Es que si B es un punto arbitrario y B' es un punto a donde se traslada durante este movimiento, el «triángulo» infinito $BB'O_\infty$ (es decir, la figura formada por el segmento BB' y las semirrectas que parten de B, B' en el sentido de paralelismo del sistema dado de rectas) es similar a un triángulo isósceles ordinario. La similitud consiste en que el lado BB' forma ángulos iguales con los «lados» BO_∞ y $B'O_\infty$.

Así, pues, el punto del infinito O_∞ es en cierto sentido análogo al centro de un giro habitual.

Las líneas invariantes con respecto a giros alrededor de un punto del infinito fueron llamadas por Lobachevski *oriciclos*, o bien *circunferencias límite*.

Indicaremos ahora cómo construir estas líneas estableciendo, así, su existencia.

Sea dado algún sistema de todas las rectas paralelas entre sí en una dirección dada. Tomemos alguna recta a de este sistema, y un punto A sobre ella (fig. 56). Tracemos de A la secante de igual pendiente de la recta a y de otra recta m arbitraria del

sistema dado. Denotemos por M el extremo de esta secante perteneciente a la recta m. Por el teorema XV, el punto M queda determinado de manera unívoca.

Ahora moveremos la recta m, sin sacarla del sistema considerado de rectas, es decir, conservando su paralelismo con la recta a.

El punto M describirá entonces una curva bien determinada, que es, precisamente, el oriciclo.

En otras palabras, *el oriciclo es el lugar geométrico de los extremos de las secantes de igual pendiente trazadas desde algún punto A de una recta a a todas las rectas paralelas a ella en una dirección determinada.* El propio punto A también se considera perteneciente al oriciclo.

Por cuanto la recta a una vez fijada determina el sistema de rectas paralelas a ella en una dirección dada, es evidente que *el oriciclo queda bien determinado al fijar el punto A y la recta orientada a, que llamaremos eje.*

Debemos mostrar que el oriciclo, cuya construcción acabamos de describir, posee efectivamente la propiedad de invariancia con respecto a los giros alrededor del punto del infinito O_∞, hacia el cual está dirigido su eje a.

Sean B y C puntos arbitrarios del oriciclo; b y c, rectas que pasan por estos puntos y están dirigidas hacia O_∞ (es decir, son paralelas a la recta a en la dirección dada). Por construcción del oriciclo, AB es secante de igual pendiente de las rectas a y b; AC lo es de las rectas a y c; en virtud del teorema XVI, de aquí se deriva que BC es secante de igual pendiente de las rectas b y c. Por esto, si se efectúa un giro del plano alrededor de O_∞ que lleve la recta b a la c, el punto B al desplazarse ocupa el lugar del punto C. Así, en este tipo de giros cada punto del oriciclo permanece sobre él; el oriciclo viene a girar sobre sí mismo.

De aquí sigue, en particular, que todos los puntos del oriciclo tienen propiedades análogas, de modo que la construcción que hicimos a partir del punto A se puede efectuar partiendo de cualquier otro punto de éste.

En otras palabras:

Cada recta paralela al eje a del oriciclo en la dirección escogida sobre dicho eje, interseca al oriciclo en un único punto y es, asimismo, eje de este oriciclo.

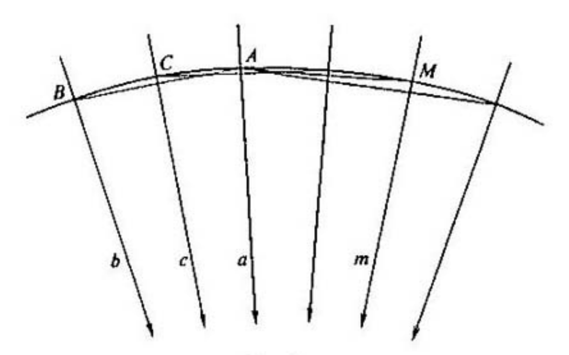


Fig. 56

Con respecto a los oriciclos vale un teorema análogo al que hemos demostrado para las equidistantes.

Toda recta puede tener con un oriciclo no más de dos puntos comunes.

De aquí se desprende, en particular, que *el oriciclo es una línea curva.*

La demostración puede ser reproducida fácilmente por el lector.

§ 39. Tomemos alguna equidistante con base u. Sea A un punto arbitrario de ella, A', su proyección sobre la base, de manera que AA' es la altura de la equidistante (fig. 57). Tracemos, además, por A la recta t perpendicular a la altura AA'. No es difícil establecer que todos los puntos de la equidistante, diferentes de A, se hallan de un mismo lado de la recta t, precisamente, de aquel que contiene la base u. En efecto, si M es algún punto de la equidistante y M' es su proyección sobre u, $AMM'A'$ será un cuadrilátero de Saccheri y $\angle A'AM$, como ángulo de su base superior, será agudo. Por lo tanto, el punto M está del mismo lado de la recta t que el punto A'. Podemos, así, decir que la recta t es recta de apoyo de la equidistante dada *). Ahora mostraremos que *t es, además, tangente.* Consideremos la secante AM y denotemos por α el ángulo $\angle A'AM$, y por 2δ, la longitud del segmento AM. Evidentemente, la perpendicular por el punto medio del segmento AM y la altura AA' son rectas divergentes, pues ambas son perpendiculares a la base. Por esto, α es mayor que el ángulo de paralelismo para el segmento δ, es decir

$$\alpha > \Pi(\delta).$$

Por otro lado, α es un ángulo agudo, de modo que tienen lugar las desigualdades

$$\Pi(\delta) < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Si el punto M, al desplazarse sobre la equidistante, tiende a A, entonces $\delta \to 0$ y, en virtud del teorema X, $\lim\limits_{\delta \to 0} \Pi(\delta) = \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente,

$$\lim_{M \to A} \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Con esto hemos probado que si $M \to A$, la secante AM tiende a una posición límite que es, precisamente, la recta t.

El resultado obtenido puede expresarse así: *cada altura de la equidistante es su normal.* De la discusión precedente sigue, también, que la equidistante tiene en cada punto la concavidad dirigida hacia la base.

Hagamos ahora un análisis similar para el oriciclo.

Consideremos algún oriciclo determinado por el punto A y la recta a (fig. 58). Convendremos en considerar sobre el eje a, así como también sobre cualquier otro eje del oriciclo, positiva la orientación en que este eje es paralelo a los demás ejes del oriciclo. Tracemos por A una recta t perpendicular al eje a. No es difícil establecer que todos los puntos del oriciclo diferentes de A están a un mismo lado de la recta t, precisamente, del lado correspondiente a la orientación positiva de la recta a. En efecto, sea M un punto arbitrario del oriciclo, y m, el eje que pasa por M. Sea α el

---

*) Una recta se llama recta de apoyo de una línea dada, si contiene al menos un punto de ésta y si de un lado de esta recta no hay puntos de la línea.

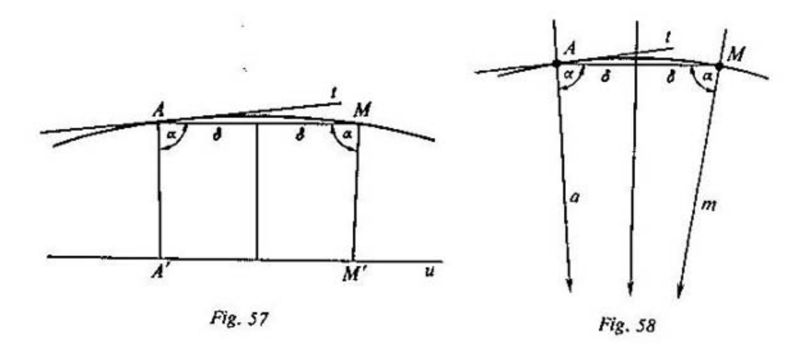


Fig. 57

Fig. 58

ángulo que forma el segmento AM con el sentido positivo del eje a, y sea 2δ la longitud del segmento AM. Como, por definición del oriciclo, AM es secante de igual pendiente de las paralelas a y m, la perpendicular al segmento AM, levantada en su punto medio, es paralela a cada una de las rectas a y m. Por esto, α es el ángulo de paralelismo para el segmento δ:

$$\alpha = \Pi(\delta).$$

De aquí podemos concluir, primeramente, que α es agudo. Por consecuencia, cualquier punto M del oriciclo se encuentra efectivamente del lado de la recta t hacia el cual está dirigido el sentido positivo del eje a. Dicho de otra manera, t es recta de apoyo del oriciclo. Pero es fácil verificar que t es, asimismo, tangente. Para esto sólo hay que tomar en consideración la igualdad ya conocida

$$\lim_{\delta \to 0} \Pi(\delta) = \frac{\pi}{2}$$

la cual implica que cuando $M \to A$, la secante AM tiene por posición límite la recta t.

El último resultado se puede enunciar, también, como sigue: *cada eje del oriciclo es su normal.*

Del análisis precedente se deriva también que en cada punto del oriciclo su concavidad está dirigida hacia el sentido positivo del eje.

Indicaremos dos propiedades comunes para la circunferencia, el oriciclo y la equidistante:

1. Cada una de estas curvas es simétrica con respecto a cualquiera de sus normales.

Por esto, a veces llamaremos ejes a las normales de la circunferencia y la equidistante, al igual que las del oriciclo.

2. Las cuerdas de estas curvas son secantes de igual pendiente de las normales que pasan por sus extremos. Comparando la circunferencia, el oriciclo y la equidistante, podemos describir las familias de sus normales como sigue: todas las normales de la circunferencia convergen a un mismo punto; todas las del oriciclo son paralelas entre sí en alguna dirección (o, como se suele decir, convergen a un mismo punto del infinito); todas las normales de la equidistante son perpendiculares a una misma recta y, en consecuencia, divergen.

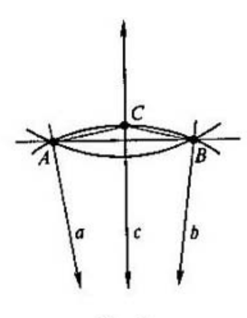


Fig. 59

En la geometría euclidiana, el conjunto de rectas que pasan por un punto, o bien el conjunto de rectas paralelas, se llama *haz*. Trasladando este concepto a la geometría de Lobachevski, llamaremos haz a todo conjunto de rectas que pasan por un mismo punto, o bien todo conjunto de rectas paralelas entre sí en una dirección determinada, o bien de rectas perpendiculares a alguna recta fija. En el primer caso llamaremos *elíptico* al haz, en el segundo, *parabólico*, en el tercero, *hiperbólico*. Basándonos en el análisis precedente, podemos entonces decir que *las circunferencias, los oriciclos y las equidistantes son las trayectorias ortogonales de haces elípticos, parabólicos e hiperbólicos, respectivamente.*

§ 40. Es esencial destacar que mientras las circunferencias se diferencian unas de otras por la magnitud de su radio, y las equidistantes, por la de su altura, *todos los oriciclos son congruentes entre sí.*

En efecto, hemos visto más arriba que un oriciclo queda totalmente determinado si se dan un punto de éste y el eje que pasa por él. Por esto, si movemos el plano de modo que un punto y el eje que pasa por él de un oriciclo coincidan respectivamente con un punto y el eje de algún otro, ambos oriciclos coincidirán (las propiedades de los movimientos que hay que utilizar en este razonamiento quedan aseguradas por el teorema C del § 19).

Demostremos, además, el teorema siguiente.

TEOREMA XVII. *Cualesquiera que sean dos puntos A y B del plano, por ellos pasan exactamente dos oriciclos, que son simétricos con respecto a la recta AB.*

DEMOSTRACIÓN. Tracemos la perpendicular c en el punto medio del segmento AB (fig. 59) y fijemos sobre ella alguno de sus dos sentidos. Tracemos, además, por A y B las rectas a y b, paralelas a c en la dirección fijada. Sea AC la secante de igual pendiente de las rectas a y c. Entonces, por el teorema XVI, BC será secante de igual pendiente de b y c. Evidentemente, el oriciclo determinado por el punto C y el eje c pasará por los puntos A y B.

Si se toma el sentido opuesto sobre la recta c y se repite esta construcción, se obtiene otro oriciclo, simétrico del primero con respecto a AB.

Demostremos, ahora, que no hay otros oriciclos que pasen por los puntos A y B. Con este fin, suponemos que existe algún oriciclo L con cuerda AB, y denotemos con a y b los ejes de éste que pasan por los extremos de dicha cuerda. Las rectas a y

b tienen que ser paralelas y formar ángulos iguales con el segmento AB. Por esto, la perpendicular c en el punto medio de AB es paralela a cada una de las rectas a, b. Pero, en tal caso, las rectas a y b quedan totalmente determinadas por la dirección de paralelismo hacia la recta c; por consiguiente, para la posición de a y b sólo son posibles los dos casos considerados más arriba. Así, pues, L coincide necesariamente con alguno de los dos oriciclos cuya construcción fue descrita en la primera parte de la demostración.

El teorema demostrado puede presentarse también así:

TEOREMA XVIII. *Los arcos de oriciclo determinados por cuerdas congruentes son congruentes entre sí.*

6. Superficie equidistante y orisfera

§ 41. El análogo espacial de la circunferencia es la esfera. De igual forma, existen también superficies que vienen a ser los análogos naturales de la equidistante y el oriciclo; se llaman respectivamente superficie equidistante y orisfera. *La superficie equidistante es el lugar geométrico de los puntos situados a un mismo lado de un plano σ y que se encuentran a una misma distancia de éste.* Diremos que el plano σ es la *base* de la superficie equidistante, y la perpendicular bajada de un punto arbitrario de la superficie sobre la base, su *altura*. Esta definición es totalmente similar a la de la equidistante. De igual modo, la orisfera se define por analogía directa con la definición del oriciclo.

Para dar esta definición, consideremos en el espacio una recta arbitraria a, que pase por algún punto A. Fijemos alguno de los dos sentidos de a, que llamaremos positivo. Sea m alguna otra recta cualquiera del espacio, paralela a a en el sentido positivo. Por el teorema XV, por el punto A se puede trazar exactamente una secante de igual pendiente de las rectas a y m. Sea M el extremo de esta secante situado sobre m. Si desplazamos la recta m conservándola paralela a a en el sentido positivo, los puntos M correspondientes formarán una superficie que se llama orisfera.

Dicho de otro modo, *la orisfera es el lugar geométrico de los extremos de las secantes de igual pendiente trazadas de un punto A de una recta a todas las rectas del espacio paralelas a ella en una dirección determinada.* El propio punto A también se considera perteneciente a la orisfera.

Por cuanto la recta a una vez fijada determina el sistema de rectas del espacio paralelas a ella en una dirección dada, resulta evidente que *al dar un punto A y una recta orientada a, que llamaremos eje, la orisfera queda totalmente determinada.*

Es esencial establecer que el punto A no se distingue en ningún aspecto de los demás de la orisfera, es decir, que la construcción de la orisfera descrita en su definición puede efectuarse a partir de cualquiera de sus puntos. Para esto hay que mostrar que cualesquiera que sean dos rectas paralelas al eje de la orisfera en un sentido distinguido de éste, el segmento que une los puntos de corte de estas rectas con la orisfera es una secante de igual pendiente de ellas.

Todo se reduce, evidentemente, al teorema que sigue.

TEOREMA XIX. *Sean dadas en el espacio tres rectas a, b, c, paralelas dos a dos, que pasen por los puntos A, B, C respectivamente. Entonces,* si *AB es secante de*

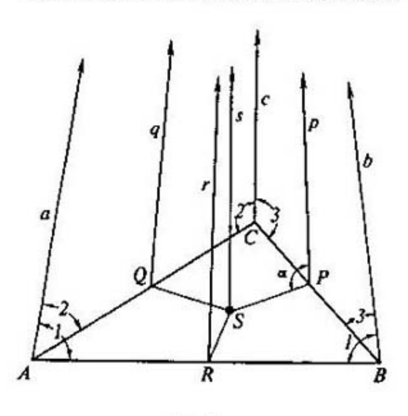


Fig. 60

igual pendiente de las rectas a y b, y BC lo es de las rectas b y c, AC lo será de las rectas a y c.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que las rectas a, b, c no están en un mismo plano, pues este caso ya fue considerado antes, en el teorema XVI.

Sean P, Q, R los puntos medios de los lados del triángulo ABC, opuestos a los vértices A, B, C respectivamente; tracemos por P, Q, R las rectas p, q, r, paralelas a a, b, c (fig. 60) y, consecuentemente, paralelas entre sí.

Es fácil descubrir que las proyecciones de las rectas p, q, r sobre el plano ABC convergen en un mismo punto. Efectivamente, como p y r son paralelas, al menos una de ellas, digamos, p, no será perpendicular al plano ABC. El ángulo agudo que esta recta determina con el plano ABC se denotará por α; determinemos sobre el lado de este ángulo que está en el plano ABC un segmento PS, de manera que se cumpla la igualdad

$$\Pi(PS) = \alpha.$$

Sea s la perpendicular al plano ABC por el punto S. Por construcción, la recta s es paralela a p, pero como las rectas p, q son paralelas entre sí, s será paralela asimismo a las rectas q y r. De aquí sigue que QS y RS son proyecciones de las rectas q y r, es decir, que efectivamente las tres proyecciones convergen en el punto S.

Obsérvese, ahora, que la recta r es perpendicular a AB, pues AB es secante de igual pendiente de las rectas a y b; por el mismo motivo, p es perpendicular a BC. Pero entonces los segmentos PS y RS serán perpendiculares a BC y AB respectivamente y, en consecuencia, S será el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. En virtud de esto, la recta AC será perpendicular a QS, es decir, a la proyección de q; de aquí se desprende que será perpendicular también a la propia q.

Así, q es la perpendicular en el punto medio de AC. Del paralelismo de la recta q con a y c sigue de inmediato que AC es secante de igual pendiente de a y c, cosa que había que probar.

Con esto, evidentemente, queda también establecido que la construcción de la orisfera indicada más arriba se puede efectuar partiendo de cualquiera de sus puntos.

El resultado obtenido puede enunciarse también así:

Cada recta paralela al eje de la orisfera en el sentido positivo interseca a la orisfera en un único punto y es, asimismo, eje de ésta.

§ 42. Presentaremos algunas propiedades generales de la esfera, la orisfera y la superficie equidistante.

Consideremos primeramente la esfera. Las propiedades que indicaremos no dependen, de ningún modo, de que se tome el espacio de Lobachevski o el de Euclides. Son, por supuesto, bien conocidas por el lector, y las enunciamos con el único fin de confrontarlas con las propiedades análogas de la superficie equidistante y la orisfera.

Tomemos sobre la esfera un punto arbitrario A y denotemos con a el diámetro con extremo en dicho punto. Cada plano que pasa por el diámetro a corta la esfera por un círculo de radio máximo. Evidentemente, todos los círculos máximos obtenidos por estos cortes tienen en su punto común A tangentes perpendiculares a la misma recta a. Consecuentemente, estas tangentes es encuentran sobre un mismo plano, que se llama *plano tangente* a la esfera en el punto A. El diámetro a es perpendicular al plano tangente y es, por esto, una normal. Podemos, así, afirmar que *todas las normales de la esfera convergen en un mismo punto* (el centro de la esfera).

Consideremos ahora una superficie equidistante. Sea A un punto arbitrario de ella, y a, la altura que pasa por A. Evidentemente, cada plano α que pasa por la altura a, corta la superficie considerada por una equidistante. La base de ésta será la recta de intersección del plano α con la base de la superficie equidistante, y su altura será igual a la de dicha superficie. De la discusión efectuada en el § 39 sigue que todas las equidistantes obtenidas por estos cortes tienen en su punto común A tangentes perpendiculares a una misma recta a. Por lo tanto, dichas tangentes están situadas en un mismo plano, que llamaremos plano tangente a la supeficie equidistante en el punto A. La altura a es perpendicular al plano tangente, siendo, por esto, una normal. Y como las alturas son perpendiculares a la base σ, podemos afirmar que *todas las normales de la superficie equidistante son perpendiculares a un mismo plano.*

Consideremos, por último, la orisfera. Sean A un punto cualquiera de ella; a, su eje que pasa por A. Evidentemente, cada plano α que contenga este eje intersecará la orisfera según un oriciclo; el eje a de la orisfera será, asimismo, eje de este último. De la discusión efectuada en el § 39 se desprende que todos los oriciclos obtenidos por estos cortes tienen en su punto común A tangentes perpendiculares a la misma recta a. Dichas tangentes estarán, pues, en un mismo plano, que llamaremos plano tangente a la orisfera en el punto A. El eje a es perpendicular al plano tangente, siendo, así, una normal. Y como los ejes de la orisfera, de acuerdo con su definición, son paralelos entre sí en una misma dirección, podemos afirmar que *todas las normales de la orisfera forman un sistema de rectas mutuamente paralelas.*

§ 43. Sea dado en el espacio algún sistema de rectas. Convendremos en llamarlo *radiación* (*haz*), si cada par de rectas de éste pertenecen a un mismo plano. Las rectas que constituyen la radiación se llamarán rayos.

Sean a y b dos rayos cualesquiera. Como, por definición de radiación, a y b es-

tán en un mismo plano, pueden darse únicamente los tres casos siguientes de posición relativa de a y b:

1) a y b se cortan en algún punto;

2) a y b son paralelas en alguna dirección;

3) a y b son divergentes.

Consideremos cada caso por separado.

1. Supongamos que a y b se cortan en algún punto O. Sea c un tercer rayo arbitrario, que no pertenece al plano de a, b. Sean α el plano que contiene a y c; β, el que contiene b y c. Ambos planos pasan por el punto O, y como la recta c se determina por la intersección de ambos planos, tendrá que pasar por el punto O.

Sea, ahora d un rayo arbitrario del plano a, b. Como a y c pasan por el punto O, y d no está en el plano a, c, concluimos, como arriba, que el rayo d pasa también por el punto O. Consecuentemente, todos los rayos pasan por un mismo punto [*]. Una tal radiación se denomina *elíptica*; el punto al cual convergen todos sus rayos lleva el nombre de *centro* de la radiación.

2. Supongamos que los rayos a y b son paralelos uno al otro en alguna dirección. Sea c un tercer rayo cualquiera que no pertenece al plano de a, b. Sea α el plano que contiene a y c, y β, el que contiene b y c. Como α y β contienen dos rectas paralelas a y b respectivamente, por el lema IV del § 35 la recta c determinada por su intersección es paralela a a y a b en la misma dirección en que éstas lo son entre sí. Sea ahora d un rayo arbitrario del plano de a, b. Como a y c son paralelas, y d no está en el plano de a, c, concluimos, como arriba, que d es paralela a a y a c. En consecuencia, todos los rayos de la radiación son paralelos entre sí en una dirección determinada; una tal radiación se llamará *parabólica*.

3. Supongamos, por último, que los rayos a y b son divergentes. Entonces existe un plano σ perpendicular a ambos. Sea c un tercer rayo arbitrario que no pertenezca al plano de a, b. Sean α el plano que contiene a y b; β, el que contiene b y c. Tanto α como β son perpendiculares al plano σ, pues el primero contiene la recta a, perpendicular a σ, y el segundo, la b, también perpendicular a σ. Pero entonces la recta c de intersección de α y β será, asimismo, perpendicular al plano σ.

Tomemos ahora un rayo arbitrario d del plano de a, b. Como a y c son perpendiculares al plano σ, y d no pertenece al plano de a, c, concluimos, igual que arriba, que también d será perpendicular a σ.

Así, pues, en este caso todos los rayos de la radiación serán perpendiculares a un mismo plano. Una tal radiación se dirá *hiperbólica*: el plano perpendicular a sus rayos lleva el nombre de *base* de la radiación.

Recapitulando lo expuesto, llegamos a la siguiente proposición.

Las esferas, las orisferas y las superficies equidistantes poseen la propiedad común de que las normales de cada una de estas superficies forman una radiación.

---

[*] En este razonamiento es esencial que exista alguna recta c fuera del plano de a, b. Si todas las rectas de la radiación pertenecieran a un plano común, es fácil ver que bien podrían darse los tres casos simultáneamente para distintas rectas de una misma radiación. En este caso, esencialmente plano, la clasificación de las radiaciones habría que hacerla como en el § 39. La misma observación es aplicable también a los razonamientos hechos en los casos 2 y 3, que siguen a continuación (*N. del Tr.*)

Adémas, las normales de la esfera forman una radiación elíptica, las de la orisfera, una parabólica, y las de la superficie equidistante, una hiperbólica.

§ 44. Otra propiedad común de las esferas, las orisferas y las superficies equidistantes, que debemos destacar para nuestra exposición futura, consiste en lo siguiente: *cada una de ellas es una superficie de revolución, con eje en cualquiera de sus normales.*

La demostración de esta suposición es totalmente evidente desde el punto de vista intuitivo; la haremos sólo para la orisfera.

Sea Σ alguna orisfera; A, un punto de ella; a, la normal que pasa por A. Consideraremos todos los giros posibles del espacio alrededor de la recta a (véase el § 19). Debemos mostrar que durante estos giros, desplazándose, todos los puntos de la orisfera Σ quedan en la superficie de Σ, o bien, si utilizamos la terminología introducida en el § 36, que la orisfera Σ es invariante con respecto a los giros alrededor de la recta a. Con tal fin, tomemos sobre Σ un punto arbitrario M, y llamemos M' al punto a donde se lleva M después de algún giro del espacio alrededor de a. Sean, además, m la normal de la orisfera que pasa por M, y m' la recta con la cual coincide m durante el giro considerado; evidentemente, m' pasa por M'. En virtud de las propiedades que ya conocemos de la orisfera, la recta m es paralela a a, y el segmento AM es secante de igual pendiente de estas dos rectas. Pero la figura formada por a, m' y el segmento AM' es congruente a la constituida por a, m y el segmento AM. Por esto, m' es paralela a a y AM' es secante de igual pendiente de las rectas a y m'. De aquí sigue que el punto M' pertenece a la orisfera Σ, quedando así demostrada nuestra proposición.

Para la esfera y la superficie equidistante, esta proposición se demuestra de forma igualmente sencilla.

7. Geometría elemental sobre las superficies del espacio de Lobachevski

§ 45. Desde tiempos remotos son bien conocidos dos sistemas geométricos en variedades bidimensionales del espacio euclidiano: la geometría del plano (planimetría) y la de la esfera. Al elaborar estos sistemas geométricos, la siguiente propiedad resulta fundamental: tanto el plano como la esfera pueden ser desplazadas sobre sí mismas, sin deformarse.

El significado exacto de esta afirmación, de acuerdo con las definiciones del § 19, puede expresarse así: una superficie admite un movimiento sobre sí misma, si para el conjunto de sus puntos son posibles transportes congruentes que dejen todos estos puntos sobre la superficie.

Si nos imaginamos, por ejemplo, la esfera como un modelo liso de madera, recubierta de una funda delgada pero rígida, los movimientos de la funda sobre el modelo fijo darán una idea clara del fenómeno en cuestión.

El plano y la esfera no son las únicas superficies del espacio euclidiano que pueden ser desplazadas sobre sí mismas, pero se distinguen de todas las demás por un mayor grado de libertad en los movimientos admisibles.

Toda superficie de revolución admite también movimientos sobre sí misma, sin embargo, esta propiedad suya, desde el punto de vista de la libertad de elección de

los movimientos, difiere de la propiedad correspondiente de la esfera o del plano. Para esclarecer esta diferencia, comparemos, por ejemplo, una esfera, un cilindro circular y un elipsoide de revolución.

Los únicos movimientos posibles de un elipsoide sobre sí mismo son los giros alrededor de su eje. Cada punto del elipsoide se desplaza en este caso sobre una trayectoria determinada de forma tal que para dos puntos arbitrariamente escogidos no existe, en general, un movimiento que haga coincidir uno con el otro.

El cilindro circular, además de giros, admite también traslaciones a lo largo de su eje; combinando movimientos de estos dos tipos se puede, evidentemente, hacer coincidir cualquier punto del cilindro con cualquier otro.

Diremos que el conjunto de movimientos que admite alguna superficie es *transitivo*, si dos puntos cualesquiera de ella pueden coincidirse uno con el otro mediante algún movimiento.

Así, el cilindro circular admite un conjunto transitivo de movimientos; por el contrario, el conjunto de movimientos de un elipsoide no es transitivo.

Es fácil ver que la colección de movimientos de la esfera es transitiva, igual que en el caso del cilindro circular. Sin embargo, aquí también existe una diferencia importante. A fin de ponerla en claro, consideraremos elementos lineales de la superficie. Se llama *elemento lineal* un punto conjuntamente con una dirección, que debe imaginarse determinada como una cierta flecha que parte del punto dado y está en el plano tangente. Los elementos lineales se consideran idénticos, si sus puntos coinciden y sus flechas apuntan a un mismo lado.

Tomemos dos elementos lineales sobre el cilindro circular, escogiendo los puntos de manera arbitraria y las direcciones de manera que una de ellas sea perpendicular al eje del cilindro y la otra, paralela a éste. Mediante un movimiento podemos hacer coincidir los puntos de estos elementos lineales; sin embargo no será posible hacer coincidir los propios elementos lineales.

Por el contrario, para dos elementos lineales arbitrarios de la esfera siempre existe un movimiento que hace coincidir uno con el otro. Precisamente, girando la esfera alrededor de algún eje, se pueden hacer coincidir primero los puntos de estos elementos; después, mediante un giro alrededor del eje al que pertenecen los puntos identificados, se pueden hacer coincidir también las direcciones.

Diremos que el conjunto de movimientos que admite alguna superficie *es transitivo con respecto a los elementos lineales*, si cualquier par de elementos lineales de esta superficie se puede hacer coincidir.

Podemos, pues, decir que, por ejemplo, el elipsoide de revolución posee un conjunto no transitivo de movimientos, mientras que el conjunto de los movimientos del cilindro circular y la esfera es transitivo, siendo, en el último caso, transitivo también con respecto a los elementos lineales. El conjunto de los movimientos del plano es igualmente transitivo con respecto a los elementos lineales.

En las proposiciones básicas de la planimetría que se refieren a la comparación de magnitudes geométricas, se utiliza esencialmente la posibilidad de un movimiento suficientemente libre de las figuras planas. Por ejemplo, al definir la longitud de un segmento rectilíneo AB, se pone en este segmento, a partir del punto A, un segmento cuya longitud se toma por unidad, tantas veces cuantas sean posibles, sin pasar por el punto B. Queda así determinada la longitud de AB salvo un entero. Deter-

minando de la misma manera cuántas veces cabe en AB la mitad de la unidad de medida, se halla la longitud de AB salvo ½, y así sucesivamente, con cualquier grado de exactitud (véase el § 20). La medición se basa, así, en la posibilidad de desplazar un segmento de manera que su origen quede en cualquier punto prefijado de antemano, y el propio segmento se sitúe sobre una recta arbitraria dada, que pase por este punto. En otras palabras, aquí se utiliza la transitividad de la colección de movimientos del plano con respecto a sus elementos lineales.

En la geometría esférica, el papel que en la geometría plana hacen las rectas lo juegan las circunferencias máximas de la esfera. Esto se debe a tres motivos:

1. Entre todas las líneas que unen dos puntos de la esfera, la más corta es un arco de circunferencia máxima.

2. Por dos puntos cualesquiera de la esfera que no están diametralmente opuestos pasa una circunferencia máxima y sólo una.

3. Una circunferencia máxima queda determinada por cualquiera de sus elementos lineales.

(Llamaremos elemento lineal de una curva a cualquiera que tenga su punto sobre ella y su flecha dirigida por la tangente a la curva.)

Al desarrollar la geometría esférica, podríamos efectuar mediciones de magnitudes geométricas sobre ella, considerándolas como objetos de la geometría del espacio. Por ejemplo, la longitud de arco de una circunferencia máxima puede determinarse haciéndola igual a la cota superior de las longitudes de las quebradas inscritas con vértices dispuestos ordenadamente sobre el arco y con segmentos rectilíneos como componentes. Así se define la longitud de arco de una línea arbitraria del espacio.

Pero también se puede desarrollar la geometría esférica sin operar con objetos geométricos no pertenecientes a la esfera (como los segmentos rectilíneos de las quebradas inscritas). Esto puede hacerse utilizando la analogía con la planimetría. Por ejemplo, para trasladar a la geometría esférica el proceso descrito arriba de medición de un segmento de recta, hay que empezar por escoger una unidad de longitud. Supongamos que la longitud de algún arco de circunferencia maxima se adopta como unidad (para mayor claridad, aconsejamos al lector que imagine este arco pequeño en comparación con las dimensiones de la esfera). Si se pide medir algún arco de circunferencia máxima AB, debe desplazarse la unidad de medida sobre la esfera y aplicarla sobre el arco AB, a partir de A, tantas veces como quepa, sin pasarse del punto B. Queda así determinada la longitud de AB salvo un entero. Determinando de la misma manera cuántas veces cabe en el arco la mitad de la unidad de longitud, se puede hallar la longitud del arco AB salvo ½, y así sucesivamente, con cualquier grado de exactitud. Evidentemente, aquí se utiliza esencialmente la transitividad del conjunto de movimientos de la esfera con respecto a sus elementos lineales.

La medición de otras magnitudes geométricas (ángulos, áreas) se efectúa de manera análoga, superponiendo al objeto esférico dado una unidad prefijada, o bien partes de ella. Aquí no hay necesidad de utilizar objetos del espacio que no pertenecen a la esfera.

Se puede considerar, asimismo, la geometría sobre cualquier superficie. El papel de las rectas lo juegan, en este caso general, las líneas geodésicas. Se puede definir una geodésica como una línea tal que cada arco AB suficientemente pequeño de ella es más corto que cualquier otro arco sobre la superficie, con los mismos extremos

que AB. Sobre una esfera de radio R, por ejemplo, las circunferencias de radio máximo son geodésicas, pues cada arco de éstas de longitud menor que πR es más corto que cualquier otro arco sobre la esfera con los mismos extremos.

Salvo algunas restricciones de carácter analítico impuestas a la superficie, se puede demostrar que cada geodésica queda determinada por alguno de sus elementos lineales, es decir, por un punto y una dirección, al igual que la recta en el plano.

Imaginémonos ahora que en una superficie fue hallado de alguna manera el conjunto de todas las geodésicas. Entonces, si se trata de construir la geometría de la superficie dada, surge naturalmente la pregunta: ¿es posible comparar las longitudes de los segmentos de geodésicas por el mismo método que en la planimetría o en la geometría esférica? Para esto, evidentemente, debe existir la posibilidad de mover la superficie sobre sí misma desplazando un arco de geodésica, escogido como unidad de medida, de modo que su origen pueda situarse en cualquier punto y el arco tome cualquier dirección prefijada. Cuando se pueden comparar las longitudes de geodésicas aplicando una unidad de longitud, diremos que la superficie admite *una geometría elemental.* Para que una superficie admita una geometría elemental, evidentemente, es necesario que el conjunto de sus movimientos sea transitivo con respecto a los elementos lineales.

Se puede demostrar que las únicas superficies del espacio euclidiano con un conjunto de movimientos transitivo con respecto a los elementos lineales son el plano y la esfera. De aquí se desprende que en este espacio puede existir geometría bidimensional elemental sólo en el plano (planimetría) y en la esfera (geometría esférica).

En el espacio de Lobachevski, además del plano y la esfera, existen dos tipos de superficie que admiten geometría elemental; éstas son la superficie equidistante y la orisfera, que ya conocemos.

El hecho de que estas superficies admitan efectivamente movimientos sobre sí mismas que formen un conjunto transitivo con respecto a los elementos lineales, ya fue, en esencia, establecido en el § 44, donde mostramos que cada una de ellas es superficie de revolución alrededor de cualquiera de sus normales. En efecto, si se dan dos elementos lineales arbitrarios en la superficie equidistante, o bien en la orisfera, girando la superficie alrededor de alguna normal pueden hacerse coincidir los puntos de estos elementos lineales, después de lo cual, girando alrededor de la normal que pasa por los puntos ya coincididos, se pueden superponer también los propios elementos lineales.

Podemos, pues, afirmar que *en el espacio de Lobachevski, la geometría elemental, además del plano, se realiza también en la esfera, en la superficie equidistante y en la orisfera.*

La geometría de la esfera en el espacio de Lobachevski no se diferencia de la geometría esférica en el espacio euclidiano, tal geometría (esférica) no será discutida aquí. Por el contrario, intentaremos describir en pocas palabras la geometría sobre la superficie equidistante, y analizaremos con todo detalle la geometría de la orisfera.

§ 46. Sea Σ alguna superficie equidistante, cuya base sea el plano σ. De acuerdo con las ideas generales expuestas en el § 45, debemos considerar las geodésicas de Σ como rectas de la geometría de esta superficie. Estas geodésicas son las equidistantes que se obtienen por intersección de esta superficie con planos perpendiculares al plano σ (dejaremos por ahora sin demostración este hecho).

Por esto, tales equidistantes serán consideradas rectas sobre Σ.

Nuestra finalidad es describir un sistema de proposiciones del cual puedan deducirse de manera lógica todas las propiedades de las posiciones recíprocas entre puntos y equidistantes de la superficie Σ, es decir, dar una fundamentación axiomática de la geometría de la superficie equidistante.

Como mostraremos ahora, esta geometría puede fundamentarse por los axiomas de los cuatro primeros grupos de Hilbert y el axioma de las paralelas de Lobachevski. (Sólo debe tenerse en cuenta que, por tratarse ahora de una geometría bidimensional, de los axiomas de Hilbert deben excluirse los I,4 — I,8, de carácter tridimensional; por esto, trabajaremos únicamente con los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV y el de paralelas.)

A fin de obtener nuestro resultado en la forma más sencilla posible, proyectemos los puntos y las equidistantes de la superficie Σ sobre el plano σ; sus proyecciones serán respectivamente puntos y rectas. Convendremos en llamar correspondientes a dos imágenes Φ y Φ', de los cuales Φ está en Σ, y Φ', en Φ, si Φ' se obtiene proyectando Φ. Es evidente que los puntos y las equidistantes en la superficie Σ se hallan en las mismas relaciones de pertenencia (incidencia) y de orden que sus puntos y rectas correspondientes del plano σ. Por esto, en la geometría de Σ se cumplen los axiomas I,1 — I,3 y II, pues éstos tienen lugar en la geometría del plano.

A continuación, llamaremos congruentes a dos imágenes de la superficie Σ, si pueden superponerse mediante algún movimiento de Σ en sí misma, o si son simétricas con respecto a algún plano. Coordinemos ahora los movimientos posibles de la superficie Σ y del plano σ como si ambos formaran un cuerpo rígido en el espacio. Entonces, cada movimiento de σ que hace coincidir algún par de sus imágenes Φ' y Ψ', determinará un movimiento de Σ que hará coincidir las imágenes Φ y Ψ, correspondientes a Φ' y Ψ'. Dicho de otro modo, las imágenes de la superficie Σ se hallan en las mismas relaciones de congruencia mutua que las imágenes respectivas del plano σ. Podemos concluir de esto que en la geometría de la superficie Σ se satisfacen los axiomas III de congruencia, pues éstos son válidos en la geometría del espacio.

Por el mismo método puede verificarse que en la geometría de la superficie Σ son válidos los axiomas de continuidad IV.

Consideremos ahora sobre Σ una equidistante arbitraria a y algún punto A fuera de esta equidistante. Proyectando a y A sobre el plano σ, obtenemos como sus proyecciones la recta a' y el punto A'. Supongamos que por A' se ha trazado en el plano σ alguna recta b'; ésta es proyección de alguna equidistante b sobre Σ que pasa por A, y si b' no corta a', la equidistante b tampoco tendrá puntos comunes con la equidistante a. Pero en el plano σ tiene lugar la geometría de Lobachevski y, en consecuencia, por A' pasa un número infinito de rectas que no cortan a'. Por esto, en la superficie Σ por el punto A pasa un número infinito de equidistantes que no tienen puntos comunes con la a; esto significa que en la geometría de la superficie Σ se realiza el postulado de las paralelas de Lobachevski.

Así, pues, en la superficie Σ son válidos todos los axiomas de la geometría absoluta, más el de Lobachevski. Por consiguiente, con respecto a los puntos y las equidistantes de Σ valen todos los teoremas existentes en la planimetría no euclidiana.

Podemos, pues, concluir que *la geometría elemental de la superficie equidistante es la de Lobachevski.*

Una observación más, para concluir. Al llamar rectas de Σ a las equidistantes obtenidas por cortes normales de esta superficie, no demostramos al principio que eran sus geodésicas; ahora esto puede establecerse fácilmente. En efecto, como sobre la superficie equidistante valen todos los teoremas de la geometría absoluta, se puede mostrar por los razonamientos habituales que un segmento de equidistante es más corto que cualquier otra línea que una sus extremos en la superficie Σ.

§ 47. Ahora acometeremos el análisis de la geometría elemental en la orisfera. El papel de las rectas de esta geometría lo adjudicaremos a los oriciclos obtenidos cortando la orisfera con cualquier plano que pase por alguno de sus ejes. (Nuevamente dejamos abierto el problema de si tales oriciclos son geodésicas en la orisfera o no; podremos darle una respuesta afirmativa después de concluido el estudio de la geometría de la orisfera.) Nuestra primera finalidad es mostrar que las relaciones mutuas de los puntos y los oriciclos en la orisfera pueden ser caracterizadas por los axiomas de la geometría absoluta. Luego veremos qué teoría de paralelas corresponde a la orisfera: la de Euclides o la de Lobachevski.

La verificación de los axiomas del grupo I,1 — I,3 se hace en dos palabras. Sean A y B dos puntos arbitrarios de la orisfera, a y b, los ejes que pasan por ellos. Como dos ejes cualesquiera de la orisfera están en un mismo plano, las rectas a y b determinan exactamente un plano α que contiene ambas. Por intersección de α y la orisfera considerada (que denotaremos con Ω en lo sucesivo) queda determinado exactamente un oriciclo u, que pasa por los puntos A y B. Así, cualesquiera que sean dos puntos A y B de la orisfera Ω, éstos determinan un oriciclo que pasa por ellos, y sólo uno.

Hemos establecido con esto que en la geometría de la orisfera tienen lugar los axiomas I,1 — I,2. El hecho de que todo oriciclo tiene no menos de dos puntos y la orisfera, no menos de tres que no están sobre un mismo oriciclo (de hecho tanto en uno como en otro caso hay incluso un número infinito de puntos), es decir, que en la geometría de la orisfera se cumple el axioma I,3, sigue directamente de la definición del oriciclo y la orisfera y de los teoremas elementales de la estereometría de Lobachevski (en nuestra descripción del oriciclo y la orisfera no mencionamos estas propiedades tan evidentes a fin de no distraer la atención del lector con detalles superfluos).

Ahora hay que probar si se cumplen en la orisfera los axiomas de orden II,1 — II,4. Ante todo conviene determinar las condiciones a las que consideraremos que un punto de un oriciclo está entre otros dos de éste. Sea u un oriciclo perteneciente al plano α, y sean A, B, C tres puntos sobre éste. Diremos que el punto B está en este oriciclo entre los puntos A y C, si su eje b, que pasa por B, está en el plano α entre los ejes a y c, los cuales pasan por A y C respectivamente (es decir, si en el plano α los puntos de las rectas a y c están a distintos lados de b). Puede verificarse sin dificultad que en este caso se satisfacen los axiomas de orden lineal II,1 — II,3. Es un tanto más difícil verificar la proposición de Pasch II,4. Para comprobar que también ésta se cumple en la geometría de la orisfera, procederemos como sigue. Considerando en la orisfera Ω un triángulo arbitrario ABC (fig. 61), formado por los arcos de tres oriciclos, tracemos por sus vértices A, B, C los tres ejes de Ω, que llamaremos a, b, c respectivamente. Fijemos, ahora, un punto A', B', C' en cada una de estas rectas, y tracemos por ellos el plano σ. La proposición de Pasch II,4

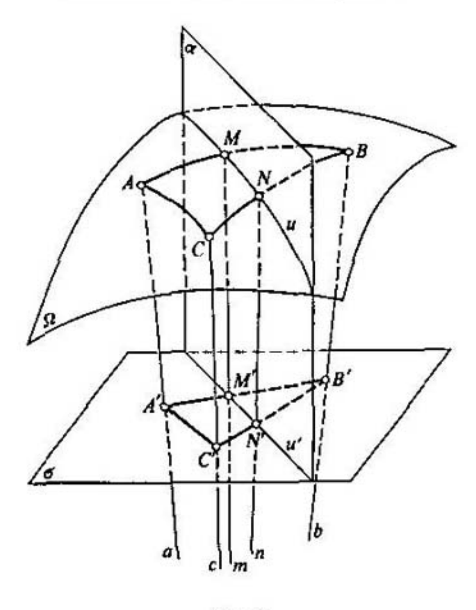


Fig. 61

tiene lugar para cualquier triángulo rectilíneo, en particular, para el triángulo $A'B'C'$ en el plano σ. De aquí deduciremos su validez para el triángulo ABC sobre Ω. Sea u algún oriciclo situado en Ω y que no pasa por ninguno de los puntos A, B, C. Debemos mostrar que si u pasa por algún punto interior del segmento de oriciclo AB, también pasará por algún punto interior del segmento de oriciclo BC, o bien del AC. Obsérvese que el plano α que contiene el oriciclo u y el plano $ABB'A'$ se intersecan por el eje m de la orisfera Ω, que pasa por el punto M. Este eje m está situado entre los ejes a y b en el plano $ABB'A'$, pues el punto M está entre A y B. Por esto, m deberá cortar al segmento de recta $A'B'$ en algún punto interior M'. Entonces, en virtud del axioma de Pasch II,4, la recta u' de intersección de los planos α y σ pasa por un punto interior de alguno de los segmentos $B'C'$, o bien $A'C'$. Supongamos, para precisión, que la recta u' contiene un punto interior N' del segmento $B'C'$. Entonces los planos α y $BCC'B'$, al tener un punto común N', se intersecarán por alguna recta n. Pero los planos α y $BCC'B'$ pasan por las dos rectas paralelas m y b respectivamente; en virtud del lema III del § 35, la recta n de intersección de estos planos es paralela tanto a m como a b, por lo cual es, asimismo, paralela a la recta c. Como el punto N' está entre B' y C', la recta n, paralela a b y c, estará ubicada entre ellas. Por otra parte, al igual que toda recta paralela a los ejes del oriciclo BC y que se encuentra en el plano de éste, es también eje de este oriciclo, razón por la cual lo cortará en algún punto N (véase el § 38). Como n

está entre las rectas b y c, también el punto N del oriciclo BC estará entre los puntos B y C.

Como la recta n está en el plano α, este plano contendrá el punto N. Así, pues, entre los puntos de intersección del plano α y la orisfera Ω, es decir, entre los puntos del oriciclo u, hay algún punto interior del segmento de oriciclo BC. Queda así demostrada la proposición de Pasch en la geometría de la orisfera.

Pasemos a los axiomas de congruencia III,1 — III,5.

El axioma III,1 requiere que sobre cualquier oriciclo de la orisfera Ω, a partir de cualquiera de sus puntos y en cualquier sentido, se pueda aplicar de manera unívoca un segmento congruente a cualquier segmento de otro oriciclo; el axioma III,4 exige que sobre Ω a cualquier lado de un oriciclo dado se pueda aplicar a este oriciclo un ángulo congruente a otro ángulo arbitrario prefijado; además, la posición del vértice puede escogerse arbitrariamente y, una vez indicada ésta, la construcción debe ser posible de manera unívoca.

Ambos axiomas se cumplen en la geometría de la orisfera, como consecuencia de que ésta admite desplazamientos sobre sí misma, cuyo conjunto es transitivo con respecto a los elementos lineales. La univocidad de las construcciones requeridas se desprende del teorema B del § 19.

Prosiguiendo, el axioma III,2 se verifica como consecuencia de la propiedad de grupo de los movimientos (véase el § 19).

Para demostrar en la geometría de la orisfera Ω la proposición III,3, consideremos sobre esta superficie dos oriciclos u, u'. Fijemos sobre u tres puntos A, B, C situados de manera que B está entre A y C; sean A', B', C' tres puntos del oriciclo u' que están en posición análoga. Si $AB \equiv A'B'$, existe un movimiento de la orisfera sobre sí misma que hace coincidir el punto A' con el punto A, y el B', con el B. Si además es $BC \equiv B'C'$, del teorema B del § 19 sigue que el punto C' coincidirá con el C en este movimiento. Así, en el movimiento considerado el segmento $A'C'$ se superpondrá al AC, es decir, de $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$ sigue $AC \equiv A'C'$.

La proposición III,5 se demuestra con razonamientos igualmente sencillos.

Falta verificar la validez de los axiomas de continuidad IV,1 y IV,2. Al estudiar la geometría de la orisfera, en lugar de verificar por separado el axioma de Arquímedes IV,1 y el de Cantor IV,2, resulta más cómodo comprobar que se cumple el principio de Dedekind. Hecho esto, entonces, si se cumplen las proposiciones I — III, las proposiciones IV,1 y IV,2 también serán verdaderas para la orisfera, en virtud del teorema 41 del § 23.

Tomemos sobre la orisfera un oriciclo arbitrario u y denotemos su plano con α. Supongamos que en el conjunto de puntos de este oriciclo se ha efectuado una cortadura de Dedekind. Tomemos en la primera clase de la cortadura un punto arbitrario A, y en la segunda, un punto B; tracemos por estos puntos los ejes correspondientes a y b del oriciclo. Escogiendo en la primera recta un punto arbitrario A', y en la segunda, un punto B', tracemos la recta u' determinada por los puntos A' y B'. Obsérvese ahora que por cada punto M' de la recta u', al igual en general por cada punto del plano α, pasa exactamente un eje del oriciclo u, que lo interseca en algún punto M. Así, a cada punto M' de la recta u' nuestra construcción le pone en correspondencia un punto determinado M del oriciclo u. Distribuyamos todos los puntos de la recta u' en dos clases de acuerdo con la siguiente regla: el punto M' de

esta recta se adjudicará a la primera clase, si el punto M correspondiente a M' del oriciclo u pertenece a la primera clase de la cortadura de Dedekind dada en este oriciclo, y se adjudicará a la segunda, si el punto correspondiente del oriciclo pertenece a la segunda clase. Evidentemente, esta distribución de puntos de la recta u' es una cortadura de Dedekind. Como para las rectas del espacio de Lobachevski tiene lugar el principio de Dedekind, podemos afirmar que en una de las clases de la cortadura de Dedekind obtenida en la recta u' existe un elemento de clausura.

Sea este elemento el punto X'. Supongamos, para precisión, que X' es el primer punto de la segunda clase. Como A' y B' están en clases diferentes, X' tendrá que estar entre ellos, o, a lo sumo, coincidir con el punto B'. El punto X del oriciclo, correspondiente a X', está en la segunda clase de la cortadura de Dedekind en este oriciclo, y está entre A y B, o a lo mas coincide con B. Si X no clausura la segunda clase en el oriciclo, entre A y X existe algún punto Y, perteneciente, asimismo, a la segunda clase. El eje y del oriciclo que pasa por el punto Y está entre los ejes AA' y XX'; por esto, tendrá que intersecar el segmento $A'X'$ en algún punto Y'; este punto figura en la segunda clase en la recta u', pues Y pertenece a la segunda clase en el oriciclo u. Pero además Y', por su construcción, está sobre la recta u' más cerca de los puntos de la primera clase que el punto X'. Esto es imposible, pues X' es el primer punto de la segunda clase. La contradicción obtenida muestra que X necesariamente clausura la segunda clase. Si supusiésemos que X' clausura la primera clase en u', un razonamiento análogo mostraría que el punto X correspondiente a X' clausura la primera clase del oriciclo.

Así, entonces, cualquiera que sea una cortadura de Dedekind en un oriciclo, una de las clases de ésta posee necesariamente un elemento de clausura. Hemos mostrado con esto que en la geometría de la orisfera tiene lugar el principio de Dedekind. Del teorema 41 del § 23 se deriva, entonces, que en la orisfera son válidos los axiomas de continuidad IV,1 y IV,2.

El análisis hecho nos permite concluir que en la orisfera tienen lugar todas las proposiciones de la geometría absoluta. En efecto, todas ellas pueden obtenerse por razonamientos lógicos, a partir de los axiomas I — IV, cuya validez hemos establecido.

Ahora debemos responder a la pregunta: ¿cuál teoría de paralelas tiene lugar en el sistema geométrico de la orisfera, la de Euclides o la de Lobachevski?

No es difícil responderla.

Tomemos sobre la orisfera Ω algún oriciclo a, cuyo plano denotaremos con α. Sea P un punto arbitrario de Ω, que no pertenece a a. Tracemos por el punto P el eje p de la orisfera. Del teorema XII del § 35 sigue que la recta p es paralela al plano α.

Imaginémonos ahora que por P se ha trazado un oriciclo arbitrario b. Su plano β pasará por la recta p. El oriciclo b no tendrá puntos comunes con el a sólo si el plano β no corta el α. Pero como la recta p es paralela a α, de acuerdo con el teorema XIV del § 35 por está recta pasará exactamente un plano β que no interseca el plano α.

En consecuencia, por el punto P en la orisfera Ω pasa exactamente un oriciclo que no corta a. Así, *en la orisfera tiene lugar el postulado euclidiano de paralelas.*

Podemos ahora asegurar que *la geometría elemental de la orisfera es la geometría de Euclides.*

Este resultado notable juega un papel importante en el desarrollo de la geometría de Lobachevski. Pero, aparte de su aplicación, resulta de gran interés por sí mismo. Resulta ser que al descartar el V postulado de Euclides en la geometría bidimensional de cada plano, de todas formas lo reencontramos en la geometría bidimensional de otra superficie.

Es interesante comparar las geometrías de la superficie equidistante, la orisfera y la esfera ordinaria, considerando en ellas la proposición sobre la suma de los ángulos de un triángulo.

Como en la superficie equidistante tiene lugar la geometría de Lobachevski, todo triángulo formado por arcos de geodésicas (es decir, arcos de equidistantes) tiene suma de ángulos internos menor que dos rectos.

Sobre la orisfera, por cuanto allí tiene lugar la geometría de Euclides, todo triángulo geodésico (formado por arcos de oriciclos) tiene su suma de ángulos igual a dos rectos.

Un triángulo esférico, cuyos lados son arcos de circunferencias máximas (es decir, líneas geodésicas de la esfera) tiene suma de ángulos mayor que dos rectos. En la esfera existe, inclusive, un triángulo geodésico con tres ángulos rectos.

En la geometría esférica vale, pues, justamente la proposición cuya falsedad en la geometría absoluta fue probada por muchos geómetras (Legendre, Saccheri, Lambert; estos últimos, a título de la hipótesis del ángulo obtuso).

Por supuesto, esto se explica por que la geometría de la esfera es aún más disímil de la del plano euclidiano que la geometría del plano de Lobachevski.

En efecto, en la geometría de la esfera no vale no sólo el axioma euclidiano de paralelas, sino tampoco la mayoría de los axiomas de la geometría absoluta (por ejemplo, dos líneas geodésicas de la esfera se cortan siempre en dos puntos; a los puntos de una geodésica no se les puede aplicar el concepto de «estar entre» etc.).

Para concluir, digamos que el espacio de Lobachevski en algún sentido es más rico que el de Euclides; precisamente, mientras en el último existen sólo dos geometrías elementales de variedades bidimensionales, la esférica y la euclidiana, en el espacio de Lobachevski se realizan, en distintas superficies, los tres sistemas geométricos que conocemos.

8. Área de un triángulo

§ 48. En la sección precedente consideramos únicamente magnitudes angulares y lineales. Ahora nos ocuparemos del problema de definir el área de figuras en el plano de Lobachevski.

Al definir el área utilizaremos el concepto de equicomposición de figuras: dos figuras se llaman *equicompuestas*, si se las puede partir en igual número de triángulos congruentes dos a dos. Por algún tiempo nos limitaremos a considerar únicamente triángulos.

Tiene lugar la siguiente proposición: *la condición necesaria y suficiente de equicomposición de dos triángulos es la igualdad de sus defectos.*

Recuérdese que se llama defecto del triángulo Δ la diferencia

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta),$$

siendo $S(\Delta)$ la suma de los ángulos internos del triángulo; en virtud del teorema de Legendre (proposición III del § 8), en la geometría no euclidiana $S(\Delta) < \pi$ y $D(\Delta) > 0$.

La demostración de la necesidad del criterio enunciado se basa en los dos lemas que siguen.

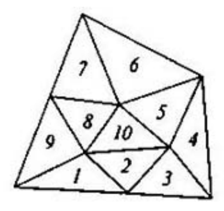


Fig. 62

LEMA 1. *Sea dada una partición de algún dominio simplemente conexo, delimitado por una quebrada cerrada, en triángulos de forma que se verifica la siguiente condición: cada par de triángulos de la partición o bien no tienen puntos comunes, o bien tienen un vértice común, o bien un lado común. Entonces, si α^2 denota el número de todos los triángulos de la partición, α_i^0, el número de vértices de estos triángulos que están en el interior del dominio y α_e^0, el de vértices en la frontera, tiene lugar la igualdad*

$$\alpha^2 - 2\alpha_i^0 - \alpha_e^0 = -2. \tag{A}$$

(En la fig. 62, $\alpha^2 = 10$, $\alpha_i^0 = 3$, $\alpha_e^0 = 6$.)

En la demostración supondremos conocida la fórmula de Euler

$$\alpha^2 - \alpha^1 - \alpha^0 = 1,$$

donde α^1 es el total de los lados de los triángulos de la partición, α^0, el total de los vértices *).

Numeremos de alguna manera los vértices de los triángulos de la partición y sea p_{ik}^2 el número de todos los triángulos que tienen un vértice interior común con número k, y p_{er}^2, el de todos los triángulos con vértice común en la frontera numerado r. Sean p_{ik}^1 y p_{er}^1 los números de lados que salen de estos vértices. Entonces, evidentemente,

$$\left.\begin{aligned} p_{ik}^2 &= p_{ik}^1, \\ p_{er}^2 &= p_{er}^1 - 1. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Por otra parte, sumando con respecto a todos los vértices interiores y exteriores, hallamos que

$$\sum_k p_{ik}^2 + \sum_r p_{er}^2 = 3\alpha^2,$$

$$\sum_k p_{ik}^1 + \sum_r p_{er}^1 = 2\alpha^1.$$

Restando la igualdad superior de la inferior, y tomando en consideración (B), tendremos que

$$\alpha_e^0 = 2\alpha^1 - 3\alpha^2.$$

Eliminando de aquí y de la identidad de Euler

$$\alpha^2 - \alpha^1 + \alpha^0 = 1$$

---

*) Véase, por ejemplo, П. С. Александров и В. А. Ефремович, Очерк основных понятий топологии, ОНТИ, 1936. (*P. S. Aleksandrov* y *V. A. Efremovich*, Esbozo de los conceptos básicos de la topología) (El lector de habla hispana puede consultar, por ejemplo, el libro de Courant y Robbins «Qué es la Matemática», ed. Aguilar, Madrid, 1962. *N. del Tr.*)

la magnitud α^1, obtenemos:

$$\alpha^2 - 2\alpha^0 + \alpha^0_e = -2.$$

Pero $\alpha^0 = \alpha^0_i + \alpha^0_e$; sustituyendo esta expresión en la igualdad precedente, hallaremos el resultado que deseábamos:

$$\alpha^2 - 2\alpha^0_i - \alpha^0_e = -2.$$

En topología, la partición de un dominio en triángulos sujetos a las condiciones expresadas en el enunciado del lema I, se llama *triangulación* de este dominio.

LEMA II. *Si el triángulo Δ está compuesto por los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, entonces*

$$D(\Delta) = D(\Delta_1) + \ldots + D(\Delta_n).$$

Este lema generaliza, evidentemente, el lema 1 del § 8, en virtud del cual al dividir un triángulo ABC por una secante BD en dos triángulos ABD y BDC, tiene lugar la igualdad

$$D(ABC) = D(ABD) + D(BDC).$$

A su vez, del lema citado sigue que en la demostración del lema II todo se puede reducir al caso en que la partición del triángulo Δ sea una triangulación.

En efecto, el pegado de los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ uno al otro, no satisface las condiciones de una triangulación si los vértices de algunos triángulos Δ_i coinciden con los puntos interiores de los lados de algunos de los triángulos Δ_i. Pero entonces, uniendo sucesivamente los vértices de los triángulos Δ_i, que están en los lados de los triángulos vecinos, con los vértices de estos últimos opuestos a dichos lados, obtenemos un nuevo sistema de triángulos $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$, la partición de Δ en estos nuevos triángulos será ya una triangulación. Pero la suma de los defectos de los triángulos $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ será igual a la de los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, pues al dividir cada vez un triángulo Δ_i por una transversal se obtienen dos triángulos nuevos cuya suma de defectos, por el lema 1 del § 8, es igual al defecto del triángulo Δ_i.

Entonces, para demostrar nuestro lema basta establecer la igualdad

$$D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m) = D(\Delta).$$

Sea l el número de vértices de los triángulos $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ que están en el interior de Δ, y p, el de vértices situados en los lados del triángulo Δ (no se toman en consideración los tres vértices del propio Δ). Entonces vale la relación

$$m - 2l - p = 1.$$

Esta igualdad se obtiene con un pequeño cambio de la fórmula (A) del lema precedente. En efecto, aplicando el lema I a la partición del triángulo Δ en los triángulos $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$, obtendremos:

$$\alpha^2 = m, \qquad \alpha^0_1 = l, \qquad \alpha^0_e = p + 3.$$

Introduciendo estas expresiones en la igualdad (A), obtenemos la (B).

Consideremos, ahora, la suma $D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m)$. Evidentemente,

$$D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m) = m\pi - [S(\Delta'_1) + \ldots + S(\Delta'_m)].$$

La suma de los ángulos de los triángulos $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ que rodean cada vértice común en el interior de Δ es igual a 2π; los ángulos adjuntos a cada vértice situado en un lado del triángulo Δ dan una suma de π; por último, la suma de los ángulos de los triángulos $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ cuyos vértices coinciden con los de Δ es igual a $S(\Delta)$. Por esto,

$$S(\Delta'_1) + \ldots + S(\Delta'_m) = 2l\pi + p\pi + S(\Delta).$$

De aquí se deriva que

$$D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m) = (m - 2l - p)\pi - S(\Delta)$$

y, en virtud de (C),

$$D(\Delta'_1) + \ldots + D(\Delta'_m) = \pi - S(\Delta) = D(\Delta).$$

Pero como

$$D(\Delta_1') + \dots + D(\Delta_m') = D(\Delta_1) + \dots + S(\Delta_n),$$

entonces

$$D(\Delta_1) + \dots + D(\Delta_n) = D(\Delta).$$

El lema II queda demostrado.

El teorema que sigue expresa la necesidad del criterio indicado arriba de equicomposición de triángulos.

TEOREMA I. *Triángulos equicompuestos tienen iguales defectos.*

Supongamos que los triángulos Δ y Δ' están descompuestos en igual número de triángulos congruentes dos a dos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ y $\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_n'$. Supongamos que los triángulos se han numerado de tal forma que Δ_i y Δ_i' son congruentes si tienen números iguales. Por el lema II,

$$D(\Delta) = D(\Delta_1) + \dots + D(\Delta_n)$$

y

$$D(\Delta') = D(\Delta_1') + \dots + D(\Delta_n').$$

Pero como triángulos congruentes tienen, evidentemente, defectos iguales, será

$$D(\Delta_i) = D(\Delta_i').$$

De aquí y de las igualdades precedentes concluimos que

$$D(\Delta) = D(\Delta').$$

La suficiencia del criterio de equicomposición de triángulos la expresa el

TEOREMA II. *Si dos triángulos tienen defectos iguales, son equicompuestos.*

Reduciremos de demostración de este teorema a la prueba de una serie de lemas *).

LEMA α. *Dos figuras equicompuestas con una tercera son equicompuestas entre sí.*

Supongamos que las figuras A y B son equicompuestas con la figura C. Imaginémonos que tanto en A como en B se han trazado las rectas que las dividen en partes congruentes con partes de la figura C. Dibujemos sobre C las rectas que la dividen en partes correspondientemente congruentes a partes de la figura A, y después, las rectas que la dividen en partes correspondientemente congruentes a partes de B. Entonces, evidentemente, todas las rectas juntas dividirán a C en partes con las que se pueden formar tanto la figura A como la B.

LEMA β. *Si E y F son los pies de las perpendiculares bajadas de los vértices B y C de un triángulo ABC a la recta que une los puntos medios P y Q de sus lados AB y AC, entonces $BCFE$ es un cuadrilátero de Saccheri y el triángulo ABC es equicompuesto con este cuadrilátero.*

Demostremos, ante todo, que $BCFE$ es un cuadrilátero de Saccheri. Bajemos de A la perpendicular AD a la recta PQ; evidentemente, tienen lugar las igualdades de triángulos: $\Delta BEP = \Delta ADP$ y $\Delta CFQ = \Delta ADQ$, de donde $BE = AD$ y $CF = AD$. Por lo tanto, $BE = CF$, de forma que $BCFE$ es, efectivamente, un cuadrilátero de Saccheri. Para establecer la equicomposición del triángulo ABC con este cuadrilátero, habrá que considerar dos casos.

1) El segmento PQ es parte del segmento EF (figs. 63 a y b).

En este caso, la equicomposición de las figuras ABC y $BCFE$ se ve directamente de las figs. 63 a y b, donde los triángulos iguales están marcados con las mismas cifras (la fig. 63b corresponde al caso en que F y Q coinciden).

---

*) Los lemas que siguen fueron tomados, en parte, del libro de Baldus «Geometría no Euclidiana» (*R. Baldus, F. Löbell*, «Nichteuklidische Geometrie», Berlín, Sammlung Göschen, vol. 970, 3ª. ed., 1953).

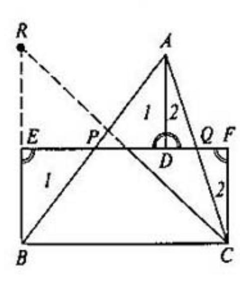


*Fig. 63*a

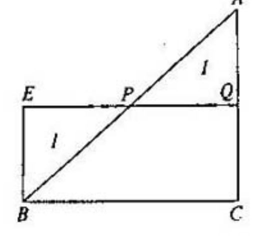


*Fig. 63*b

2) El segmento PQ está, al menos parcialmente, fuera de EF (fig. 64). En este caso, comenzaremos observando que $PQ = \frac{1}{2} EF$. En efecto, de las igualdades evidentes de triángulos

$$\Delta BEP = \Delta ADP \quad \text{y} \quad \Delta CFQ = \Delta ADQ$$

sigue que $EP = PD$ y $FQ = QD$, de donde $EP - FQ = PD - QD$, o bien $EF - PQ = PQ$, es decir, $2PQ = EF$ y $PQ = \frac{1}{2} EF$.

Unamos, ahora, el punto C con el P y determinemos sobre la recta de unión un segmento $PA' = PC$. Unamos luego el punto A' con el B. Sea P' el punto en que la recta EF corta el lado BA' del triángulo $A'BC$. No es difícil ver que P' es el punto medio del lado $A'B$. Efectivamente, si $A'D'$ es la perpendicular bajada desde A' a EF, entonces $A'D' = CF = BE$, por lo cual $\Delta P'A'D' = \Delta P'BE$, de donde $BP' = P'A'$. Además, el triángulo $A'BC$ es equicompuesto con el ABC, pues ambos tienen como parte común al BPC, y los triángulos BPA' y CPA son iguales, pues contienen ángulos iguales entre lados respectivamente iguales. Partiendo, pues, del triángulo ABC, podemos construir el $A'BC$ en la forma que acabamos de indicar; análogamente, partiendo del $A'BC$, determinamos el nuevo triángulo $A''BC$, etc. (fig. 64).

Todos los triángulos $ABC, A'BC, A''BC, \ldots$ tienen una mediana común y, por lo dicho arriba a base del lema α, son equicompuestos entre sí. Además, tienen lugar las igualdades entre segmentos:

$$QP = PP' = P'P'' = \ldots = \frac{1}{2} EF.$$

En virtud del axioma de Arquímedes, alguno de estos triángulos está ubicado como lo prevé el primer caso de la demostración de este lema y, por ende, es equicompuesto con el cuadrilátero de Saccheri $BCFE$; de este modo se establece la equicomposición con el cuadrilátero $BCFE$ del triángulo inicial ABC. El lema queda probado.

LEMA γ. *Si dos triángulos tienen defectos iguales y algún lado de uno de ellos es igual a un lado del otro, los cuadriláteros de Saccheri correspondientes a estos lados son congruentes.*

Efectivamente, $\angle B$ y $\angle C$ del cuadrilátero $BCFE$ son iguales entre sí y, como se ve fácilmente de la fig. 63 o bien de la fig. 64, la magnitud de cada uno es igual a $S/2$, donde S es la suma de los ángulos del triángulo ABC. Pero un cuadrilátero de Saccheri queda totalmente determinado por la base superior y un ángulo de esta base, de donde se deriva la justeza del lema.

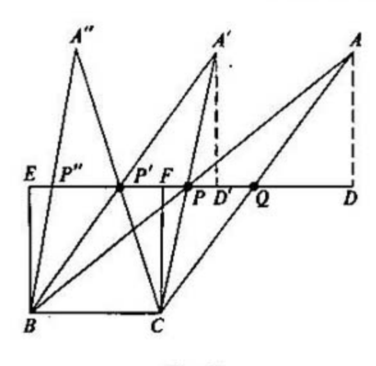


Fig. 64

Fig. 65

De los lemas α, β y γ se desprende inmediatamente el

LEMA δ. *Si dos triángulos tienen defectos iguales y un lado de uno de ellos es igual a algún lado del otro, los triángulos son equicompuestos.*

Si en la fig. 63 continuamos el segmento BE hasta el punto R, de forma que $BE = ER$, el punto medio del lado RC del triángulo BRC estará sobre la recta EF, cosa que se ve de inmediato. Por el lema β, los triángulos BRC y BAC son equicompuestos con el cuadrilátero $BCEF$. Por consiguiente, en virtud del lema α son equicompuestos entre sí. El ángulo $EBC = S/2$. Hemos demostrado, así, el lema siguiente.

LEMA ε. *Si la suma de los ángulos del triángulo ABC es igual a S, es posible construir un triángulo equicompuesto con éste que tenga un ángulo de magnitud $S/2$.*

Tomemos ahora dos triángulos con defectos iguales y, por ende, con sumas iguales S de ángulos. En virtud del lema ε, podemos construir dos nuevos triángulos respectivamente equicompuestos con los triángulos dados, además cada uno de ellos tenga un ángulo igual a $S/2$. Superpongamos estos triángulos uno al otro de manera que sus ángulos iguales coincidan (fig. 65). Si los vértices C y C_1 coinciden, tendrán que coincidir, asimismo, los vértices A y A_1, pues en caso contrario un triángulo resultaría ser parte del otro y, por el lema 1 del § 8, tendría defecto menor, lo que contradiría nuestra hipótesis. En este caso, todos los vértices de los triángulos coinciden, y los triángulos resultan ser congruentes. Si esta coincidencia no se da, por la misma razón ninguno de los triángulos puede estar enteramente contenido en el otro, y los triángulos estarán dispuestos como en la fig. 65.

Trazando la línea AC_1, comprobamos, utilizando el lema I del § 8, que los triángulos AC_1A_1 y AC_1C tienen defectos iguales y, consecuentemente, por el lema δ, son equicompuestos. Por esto, los triángulos ABC y A_1BC_1 también lo son.

Con esto queda completamente demostrado el teorema 11.

Consideremos ahora un triángulo arbitrario ABC. Tomemos en su lado BC un punto D, y hagamos $BC = a$, $BD = x$. El defecto del triángulo BAD es, evidentemente, una función de x:

$$D(ABD) = D(x)^{*)}$$

*) El autor utiliza la misma letra D para denotar esta función, pero debe quedar bien claro que se trata de una función distinta, cuyo dominio es ahora el conjunto de los reales entre 0 y a, y no el de los triángulos del plano. (*N. del Tr.*)

Si convenimos en considerar que $D(0) = 0$, la función $D(x)$ estará definida para todo valor de x, $0 \leqslant x \leqslant a$.

Demostraremos que $D(x)$ es continua para todo x, $0 \leqslant x \leqslant a$.

Sea $\alpha(x)$ la magnitud de $\angle BAD$, y $\beta(x)$, la de $\angle BDA$. Nos bastará demostrar la continuidad de las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$. Como ambas son monótonas, su continuidad quedará establecida una vez que demostremos que toman todos los valores intermedios entre dos valores cualesquiera de éstas.

Para la función $\alpha(x)$ esto resulta evidente, pues la recta AD puede ser trazada formando un ángulo cualquiera con la recta AB. Es fácil ver, asimismo, que el ángulo entre las rectas AD y BC también toma todos los valores posibles (entre 0 y π, si no se restringe la posición del punto D sobre la recta BC). Efectivamente, tomemos $\angle MON$ de magnitud arbitraria β_0 y desde un punto variable M^* sobre el lado OM de este ángulo bajemos la perpendicular M^*N^* sobre el lado ON. Pongamos $OM^* = x^*$, $M^*N^* = y^*$. En virtud del lema II del § 30,

$$y^* = f(x^*)$$

es una función continua creciente indefinidamente. De aquí se desprende que existe algún valor y_0^* de ésta, igual a la longitud de la altura del triángulo ABC correspondiente al lado BC. Sean M_0^* y N_0^* las posiciones correspondientes de los puntos M^* y N^*. Ubiquemos ahora el triángulo $OM_0^*N_0^*$ de forma que el punto M_0^* coincida con A, y el lado $M_0^*N_0^*$ se sitúe sobre la altura bajada del vértice A al lado BC del triángulo ABC. Evidentemente, en este caso los puntos O y N_0^* quedarán sobre la recta BC. Denotemos con D_0 el punto con el cual coincida el punto O y con x_0, la longitud de BD_0. Por construcción, $\beta(x_0)$ tendrá la magnitud β_0 prescrita, demostrando así nuestra afirmación: la función $D(x)$ es continua para $0 \leqslant x \leqslant a$.

Una vez demostrada la continuidad del defecto $D(x)$, podemos enunciar el siguiente

TEOREMA III. *Cualquiera que sea el número α, que satisface las desigualdades $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n} D(ABC)$, en el lado BC del triángulo ABC existe un sistema de puntos $D_1, D_2, \ldots, D_n$ tal que cada triángulo $BAD_1, D_1AD_2, \ldots, D_{n-1}AD_n$ tenga defecto igual a α.*

La demostración sigue de la continuidad del defecto, que acabamos de establecer.

Después de todo lo que expusimos, resulta posible definir el área de un triángulo.

En la geometría euclidiana el área de un triángulo se define de forma que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

1) triángulos congruentes tienen igual área;

2) si el triángulo Δ está compuesto de los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, el área del triángulo Δ es igual a la suma de las áreas de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Utilizaremos estas mismas dos condiciones como base para definir el área de un triángulo en la geometría no euclidiana.

Precisamente, supongamos que a cada triángulo del plano de Lobachevski se ha puesto en correspondencia cierto número positivo $f(\Delta)$; dicho de otro modo, se ha dado cierta función $f(\Delta)$, cuyo dominio es el conjunto de todos los triángulos y cuyos valores son todos positivos. En este caso, además, se satisfarán las dos condiciones que siguen:

1) si el triángulo Δ_1 es igual al Δ_2, entonces $f(\Delta_1) = f(\Delta_2)$;

2) si el triángulo Δ está compuesto por los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, entonces

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + \ldots + f(\Delta_n).$$

Entonces llamaremos a $f(\Delta)$ área del triángulo Δ.

A fin de que esta definición tenga sentido, hay que demostrar que existe una función $f(\Delta)$ que posea las propiedades 1 y 2. Demostraremos que una tal función existe y es, además, «única», en el sentido de que queda bien determinada si se da su valor para algún triángulo; dicho de otro modo, si a un triángulo se le adscribe un área prefijada, el área de cada triángulo quedará bien determinada.

En cuanto al problema de existencia, éste ha sido resuelto por toda la exposición precedente: el defecto $D(\Delta)$ de un triángulo posee las propiedades 1 y 2. El problema de unicidad del valor del área queda resuelto por el siguiente

TEOREMA IV. *Toda función $f(\Delta)$ que satisface las condiciones 1 y 2 es de la forma*

$$f(\Delta) = kD(\Delta) \qquad (*)$$

donde k es una constante positiva, es decir, un número positivo que no depende de Δ.

En efecto, si este teorema es válido, fijando el valor de la función $f(\Delta)$ para algún triángulo Δ_0, determinaremos completamente esta función, pues la igualdad

$$f(\Delta_0) = kD(\Delta_0)$$

determina por completo el valor de la constante k.

Se puede decir que la elección de una de las funciones $f(\Delta)$ como área del triángulo, o, lo que es lo mismo, la elección de la constante k en la igualdad (*), corresponde a la elección de una determinada medida de áreas. Es necesario únicamente tener en cuenta que si se escoge la función $f(\Delta)$ como área arbitrariamente, puede no haber ningún triángulo de área igual a la unidad. Así, si se toma $k < \frac{1}{\pi}$, para todo triángulo será $f(\Delta) < 1$, pues el defecto de cada triángulo es menor que π.

Pasemos a la demostración del teorema IV.

Es suficiente demostrar que para dos triángulos cualesquiera Δ y $\bar{\Delta}$ será

$$\frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})} = \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})}.$$

En efecto, en este caso, fijando el triángulo $\bar{\Delta}$ y haciendo $\frac{f(\bar{\Delta})}{D(\bar{\Delta})} = k$, obtenemos la ecuación (*).

Fijemos algún entero positivo n y dividamos el triángulo $\bar{\Delta}$ por transversales que partan de alguno de sus vértices en triángulos $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \ldots, \bar{\Delta}_n$ de manera que los defectos de cada uno de ellos sean iguales entre sí; entonces,

$$D(\bar{\Delta}_i) = \frac{D(\bar{\Delta})}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Denotemos ahora los vértices del triángulo Δ por A, B, C y determinemos sobre el lado AC un sistema de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ de forma que se satisfaga la siguiente condición: si Δ_1 es el triángulo ABA_1; Δ_2, el A_1BA_2, etc., entonces

1) los defectos de todos los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ deben ser iguales a $\frac{D(\bar{\Delta})}{n}$;

2) o bien el punto A_m coincide con el C, o bien

$$D(A_mBC) < \frac{D(\bar{\Delta})}{n}.$$

El teorema III garantiza la posibilidad de esta construcción.

En efecto, sea m el mayor número natural que satisfaga la desigualdad

$$mD(\bar{\Delta}) \leqslant nD(\bar{\Delta}).$$

Entonces, si hacemos

$$\alpha = \frac{D(\bar{\Delta})}{n},$$

será

$$\alpha \leqslant \frac{D(\Delta)}{m}.$$

Por el teorema III, en el lado AC del triángulo ABC existirán los puntos $A_1, A_2, \dots, A_m$ a los cuales corresponderán triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ con defectos iguales a α. El punto A_m coincidirá con C, si $\alpha = \dfrac{D(\Delta)}{m}$, y precederá a C, si $\alpha < \dfrac{D(\Delta)}{m}$; evidentemente, en el último caso el defecto del triángulo A_mBC será menor que α, pues de lo contrario tendríamos que $(m+1)D(\bar{\Delta}) \leqslant nD(\Delta)$, contra la hipótesis.

Es evidente que tienen lugar las relaciones

$$\frac{m}{n} D(\bar{\Delta}) \leqslant D(\Delta) < \frac{m+1}{n} D(\bar{\Delta}),$$

o bien

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})} < \frac{m+1}{n},$$

de donde

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})}.$$

Obsérvese, ahora que como los triángulos $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \dots, \bar{\Delta}_n, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ tienen defectos iguales, son todos equicompuestos con alguno de ellos, en virtud del teorema II. De aquí y de las condiciones 1 y 2 siguen las igualdades

$$f(\bar{\Delta}_1) = \dots = f(\bar{\Delta}_n) = f(\Delta_1) = \dots = f(\Delta_m),$$

o bien

$$f(\bar{\Delta}_i) = \frac{f(\bar{\Delta})}{n} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$f(\Delta_j) = \frac{f(\bar{\Delta})}{n} \qquad (i = 1, 2, \dots, m). \qquad (^{**})$$

Ahora bien, en virtud de la condición 2,

$$mf(\Delta_j) \leqslant f(\Delta) < (m+1)f(\Delta_j).$$

De aquí y de las igualdades (**) siguen las relaciones

$$\frac{m}{n} f(\bar{\Delta}) \leqslant f(\Delta) < \frac{m+1}{n} f(\bar{\Delta}),$$

o bien

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})} < \frac{m+1}{n},$$

de donde

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = \frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})}. \qquad \text{(B)}$$

Comparando (A) y (B), nos queda:

$$\frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})} = \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})}.$$

El teorema IV queda demostrado.

Hemos demostrado así que las condiciones 1 y 2 determinan el área $f(\Delta)$ salvo un factor constante:

$$f(\Delta) = kD(\Delta). \qquad \text{(I)}$$

Más adelante (en el § 182) estableceremos una dependencia entre la elección de la medida de área y la de longitud (en la geometría euclidiana esta dependencia se establece escogiendo como unidad de área la superficie de un cuadrado que tiene por lado la unidad de longitud). Con esto quedará fijada la constante k al escoger la escala lineal.

Una vez definida el área de un triángulo, la definición de área de un polígono arbitrario es sugerida por razonamientos enteramente naturales: suponiendo que un polígono arbitrario P está dividido en triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, llamaremos área de P al número σ igual a la suma de las áreas de estos triángulos.

El lector puede demostrar fácilmente que el número σ no depende de la partición del polígono en componentes triangulares.

Es esencial hacer algunas observaciones con respecto a lo expuesto arriba.

Por cuanto el defecto de un triángulo, por su propia definición, es menor que π, el área de cada triángulo será menor que $k\pi$. Se puede, pues, enunciar un teorema: en la geometría absoluta, suponer que existe un triángulo de área arbitrariamente grande equivale al V postulado de Euclides. En efecto, como se ve de lo que acabamos de exponer, esta suposición no tiene lugar en el sistema de Lobachevski.

Por otra parte, como existen polígonos formados por un número arbitrario de triángulos iguales, las áreas de los polígonos pueden ser tan grandes como se desee. Además, de la continuidad del defecto sigue que existe algun polígono cuya área sea igual a cualquier número positivo prefijado. En particular, existe un polígono de área unidad.

Para concluir, comparemos la medición de áreas en la geometría de Lobachevski con la medición de áreas en la esfera. Se sabe que el área de un triángulo esférico se da por la fórmula

$$\sigma(\Delta) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \tag{II}$$

donde R es el radio de la esfera y α, β, γ son los ángulos del triángulo. Pero la fórmula (I) puede escribirse así:

$$\sigma(\Delta) = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma). \tag{I'}$$

Podemos ver que (I′) se obtiene de (II) si sustituimos el radio R de la esfera por la magnitud imaginaria $i\sqrt{k}$. Este resultado fue observado ya por Lambert.

9. Demostración de la consistencia lógica de la geometría de Lobachevski

§ 49. Hemos entablado conocimiento con los resultados básicos de la teoría de las paralelas de Lobachevski. A pesar de que muchos de estos resultados contradicen decididamente nuestras ideas habituales sobre las propiedades de las rectas, sería imposible, aún con el análisis más minucioso, descubrir algún error LÓGICO en lo que hemos expuesto hasta ahora. Por el contrario, la geometría no euclidiana, al menos en la parte que ya conocemos, se presenta como una teoría muy esbelta desde el punto de vista lógico.

Sin embargo, ¿quién garantiza que la geometría no euclidiana no conduzca a contradicciones lógicas al continuar desarrollándola? El propio Lobachevski comprendía perfectamente que para demostrar la independencia del V postulado de Euclides de los demás postulados geométricos, no basta limitarse a exhibir un grupo de teoremas obtenidos bajo la hipótesis de que el postulado de Euclides no es válido y remitirse a la ausencia de contradicciones lógicas en *ese* grupo. Para él estaba claro que aquí es necesario algún razonamiento que muestre que las premisas aceptadas

por él *nunca* conducirán a una contradicción, es decir, que la demostración del postulado de Euclides por el método de reducción al absurdo es imposible.

Habiendo obtenido las ecuaciones básicas de su geometría, Lobachevski le dio una interpretación analítica, con lo cual, en principio, demostró su consistencia. Más adelante (a fines del siglo XIX), cuando se consolidaron enfoques suficientemente amplios de los objetos y los axiomas geométricos, la consistencia de la geometría de Lobachevski fue demostrada con un rigor meticuloso y a la vez de manera extremadamente sencilla. Una de estas demostraciones, pertenecientes a H. Poincaré, será reproducida en las páginas que siguen.

A fin de no oscurecer la exposición con dificultades técnicas, consideraremos únicamente la geometría bidimensional.

En este caso, el problema planteado puede enunciarse así: demostrar que los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV y el axioma no euclidiano sobre las paralelas son lógicamente compatibles, es decir, que de estos axiomas no se puede deducir dos afirmaciones tales que una niegue a la otra.

La idea general de resolución de este problema es sugerida por la concepción moderna de los axiomas geométricos. Regresemos al § 11, donde se introducen los objetos geométricos. Allí no hay la más mínima alusión a una descripción de los objetos geométricos: los puntos, las rectas y los planos; únicamente se supone *la existencia* de algunos objetos que son denominados con estas palabras. Después se dice que entre los elementos existen determinadas relaciones, expresadas por los términos «está en...», «entre», «congruentes». Tampoco se hace una descripción de estas relaciones; sólo se supone que éstas poseen algunas, muy escasas, propiedades, que son enumeradas en los axiomas.

Por esto, al estudiar, digamos, la planimetría de Euclides, podemos llamar «punto» y «recta» a objetos concretos arbitrarios, y denotar con los términos «está en...», «entre», «congruentes» a relaciones cualesquiera entre ellos, con la única condición de que concuerden con lo que piden los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV, V. Cada proposición que siga lógicamente de los axiomas I,1 — I,3, II — V, expresará entonces un resultado determinado que corresponderá a los objetos escogidos. Claramente, el significado concreto de cada proposición geométrica abstracta dependerá de cuál sistema de objetos ha sido escogido. Eligiendo determinados objetos cuyas relaciones satisfagan el sistema dado de axiomas, obtenemos UN MODELO del esquema abstracto determinado por estos axiomas.

En la sección precedente nos encontramos con ejemplos de distintos modelos del mismo sistema abstracto de la planimetría de Lobachevski, al estudiar la geometría elemental en las superficies equidistantes. En efecto, como sabemos, las relaciones entre puntos y equidistantes sobre cualquier superficie equidistante y las relaciones entre puntos y rectas en cada plano del espacio de Lobachevski corresponden en igual medida a los axiomas de la geometría no euclidiana del plano. Es verdad que todavía no sabemos si existen los objetos en cuestión, pues el problema de la existencia del espacio de Lobachevski es precisamente el objeto de nuestra discusión.

La demostración de la consistencia del esquema lógico de Lobachevski consiste, precisamente, en la construcción de un modelo concreto de éste.

Resulta más fácil explicar la idea de tal tipo de demostración considerando un problema opuesto al que tenemos por delante. Imaginémonos que de alguna mane-

ra ya hemos comprobado la consistencia de la geometría de Lobachevski, y nos planteamos establecer la consistencia de la planimetría de Euclides. Tal problema podríamos resolverlo fácilmente; bastaría considerar la orisfera. En efecto, sobre ésta los puntos y los oriciclos se encuentran precisamente en las relaciones mutuas requeridas por los axiomas de la planimetría euclidiana (véase el § 47). Por esto, si los axiomas de la geometría euclidiana del plano pudiesen conducir a dos consecuencias mutuamente excluyentes, se obtendría con esto una contradicción en la geometría elemental de la orisfera, es decir, en la geometría de Lobachevski, pues la orisfera es un objeto de esta geometría.

Entonces, por cuanto en el espacio de Lobachevski puede construirse un modelo de la planimetría de Euclides, la consistencia de la geometría de Lobachevski implica la de la planimetría de Euclides.

Nuestra finalidad es demostrar la consistencia de la geometría de Lobachevski. Convendremos, al resolver este problema, en suponer consistente la geometría euclidiana (el problema de la consistencia de la geometría euclidiana será considerado en el próximo capítulo). Aunque en el espacio euclidiano no hay superficies cuya geometría elemental coincida con la planimetría de Lobachevski, podremos, de todas formas, construir un modelo de planimetría no euclidiana con objetos del espacio de Euclides. Unicamente nos veremos obligados, al hablar de puntos y rectas, abstraernos aún más de las ideas intuitivas que nos evocan estos términos, que al estudiar la geometría elemental de alguna superficie.

Es más, se puede construr un modelo de la planimetría no euclidiana en el plano euclidiano, y deducir, así, la consistencia de la planimetría de Lobachevski partiendo de la consistencia de la geometría euclidiana del plano.

El resultado preciso que obtendremos se enuncia así: si el sistema de axiomas de la planimetría euclidiana I,1 — I,3, II, III, IV, V es consistente, el sistema constituido por los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV y el axioma sobre las paralelas de Lobachevski tampoco puede conducir a contradicciones lógicas.

Con esto quedará probado que el axioma euclidiano sobre las paralelas no es consecuencia necesaria de los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV.

Más abajo se expone la construcción del modelo o, como también se dice, la interpretación de la planimetría no euclidiana en el plano de Euclides, perteneciente a H. Poincaré.

§ 50. Tomemos en el plano euclidiano una recta x, que, por comodidad, la imaginaremos horizontal. La recta x determina dos semiplanos; uno de ellos se convendrá en llamar «superior». Llamaremos *puntos no euclidianos* a los puntos del semiplano superior (sin incluir los puntos de la recta x) y *rectas no euclidianas*, a las semicircunferencias euclidianas que se encuentran en el semiplano superior y son ortonogales a la recta x (es decir, con centro en la recta x), así como también las semirrectas euclidianas del semiplano superior que parten de x y forman ángulo recto con ella. Para simplificar los enunciados necesarios en el futuro, convendremos en llamar a estas semirrectas, semicircunferencias de radio infinitamente grande.

Entre los puntos y las rectas no euclidianas estableceremos determinadas relaciones, de manera que se cumplan los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV, es decir, los axiomas de la geometría absoluta. Después comprobaremos que en el sistema de objetos así construido se realiza el axioma de las paralelas de Lobachevski.

Las relaciones entre los objetos se irán estableciendo gradualmente, a medida que sean necesarias en el estudio ulterior de los axiomas.

Comencemos con los axiomas del grupo I. A dicho grupo le precede la hipótesis de que los objetos geométricos se encuentran en determinadas relaciones, expresadas por los términos «el punto está en la recta», «la recta pasa por el punto», etc.

Debemos establecer cómo interpretar estas expresiones para los puntos y rectas no euclidianos.

Sea A un punto no euclidiano, y a, una recta no euclidiana, representada por alguna semicircunferencia (esta última se denotará, asimismo, con a). Diremos que el punto A se encuentra en la recta (no euclidiana) a, si este punto se encuentra sobre la semicircunferencia euclidiana a, en el sentido de las relaciones establecidas en la geometría euclidiana.

La validez de los axiomas I,1 — I,3 para los puntos y rectas no euclidianos se verifica fácilmente con los métodos de la geometría euclidiana.

En efecto, el axioma I,1 se cumple, pues por dos puntos A y B del semiplano superior siempre se puede trazar una semicircunferencia ortogonal a la recta x.

El axioma I,2 se verifica, pues dos semicircunferencias, representantes de rectas no euclidianas, pueden tener no más de un punto común.

El axioma I,3 se cumple, porque sobre una semicircunferencia existe un número infinito de puntos y en el semiplano superior hay un número infinito de puntos que no están sobre una semicircunferencia.

Pasemos a analizar los axiomas de orden del grupo II. Ante todo debemos convenir en el significado exacto que daremos al término «está entre...» con respecto a puntos no euclidianos sobre una recta no euclidiana.

Sean A, B, C tres puntos de una recta no euclidiana, representada por una semicircunferencia a. Diremos que el punto B (en el sentido no euclidiano) está entre A y C, si sobre la semicircunferencia a el punto B está entre A y C en el sentido de la geometría euclidiana. Dicho de otro modo, el orden de puntos sobre una recta no euclidiana coincide con el orden de puntos sobre la semicircunferencia euclidiana que la representa en el semiplano superior.

Con más detalle, la definición del orden de los puntos de una recta no euclidiana cuando la semicircunferencia que la representa no degenera en una semirrecta euclidiana, puede enunciarse como sigue. Supongamos que alguna recta no euclidiana está representada por la semicircunferencia a, de centro O (el punto O no es un objeto de nuestro sistema). Tomemos alguna recta euclidiana u, paralela a la recta x. Cada recta euclidiana que pasa por O, a excepción de x, corta la semicircunferencia a en un punto M y la recta u en un punto M', que llamaremos correspondiente al punto M.

Entonces, si A, B, C son tres puntos de la recta no euclidiana representada por la semicircunferencia a, el punto B, como objeto de la geometría no euclidiana, está entre A y C, si en el sistema de puntos A', B', C' que en la recta euclidiana u corresponden a los puntos A, B, C, el punto B' está entre A' y C'.

De aquí sigue inmediatamente que para una recta no euclidiana valen los axiomas II,1 — II,3, por cuanto éstos son válidos para cada recta euclidiana.

Observemos, de paso, un resultado importante: *en el conjunto ordenado de puntos de la recta no euclidiana tiene lugar el principio de Dedekind.*

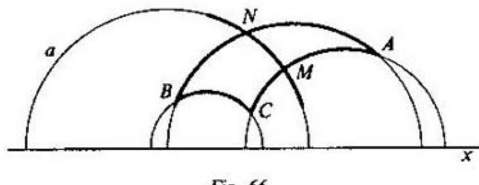


Fig. 66

En efecto, dicho principio tiene lugar en la geometría euclidiana. Pero, como hemos visto, entre los puntos de una recta euclidiana y los de una recta no euclidiana se puede establecer una correspondencia biyectiva de manera que los puntos correspondientes se encuentren en iguales relaciones de orden. Esto demuestra, en esencia, la afirmación enunciada.

Además de los axiomas II,1 — II,3, cuya validez hemos establecido, el grupo II contiene el axioma de Pasch II,4. A fin de comprobar que la proposición de Pasch tiene lugar en nuestro esquema, es necesario demostrar el siguiente teorema euclidiano: sea ABC un triángulo curvo (fig. 66), formado por arcos de semicircunferencia, y a, una semicircunferencia que no pasa por ninguno de los puntos A, B, C; entonces, si a pasa por algún punto interior del arco AC, pasará o bien por un punto del arco AB, o bien por un punto de BC. La demostración de este teorema, totalmente evidente desde el punto de vista intuitivo, no representa interés alguno, y la omitiremos.

La verificación de los axiomas de los dos primeros grupos se redujo a establecer una serie de proposiciones triviales en la geometría de Euclides. El problema es más complejo con los axiomas de congruencia III,1 — III,5, cuyo estudio atacaremos ahora. El significado del método que se utiliza consiste, precisamente, en la definición adecuada de figuras congruentes.

§ 51. El instrumento básico de nuestras construcciones futuras será una aplicación especial del plano euclidiano sobre sí mismo, bien conocida en la geometría elemental, en la teoría de funciones analíticas y en la física matemática bajo el nombre de *inversión*, o bien simetría con respecto a una circunferencia.

Sea dada una circunferencia k con centro en el punto A (fig. 67) y radio r. Sea M un punto arbitrario del plano. Dado el punto M, si éste no coincide con A, siempre se puede determinar de manera unívoca un nuevo punto M', que esté sobre la semirrecta AM y cumpla la condición

$$AM' \cdot AM = r^2 \qquad (*)$$

(uno de los casos de la construcción se muestra en la fig. 67). El punto M' se llama *imagen del punto M* en la inversión con respecto a la circunferencia k o, más sencillamente, *inversión del punto M*.

Convendremos, además, en llamar al punto M' *inversión del punto M con respecto a la recta u*, si M' es simétrico al punto M con respecto a esta recta. En los enunciados que siguen, por regla general no distinguiremos entre la inversión con respecto a una circunferencia y a una recta, considerando a esta última como una circunferencia de radio infinito. La demostración de los teoremas referentes a inversiones la haremos frecuentemente en la hipótesis de que la circunferencia de inver-

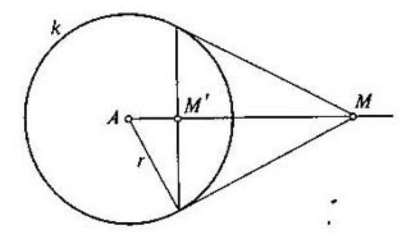


Fig. 67

sión es ordinaria. El caso particular en que ésta tenga radio infinito (es decir, sea una recta) a veces requiere razonamientos complementarios, aunque totalmente triviales; el lector puede fácilmente reproducirlos.

Las siguientes propiedades de la inversión son totalmente evidentes:

1. *Si M' es la inversión de un punto M, M será la inversión de M'. La inversión coincide, pues, con su aplicación inversa.*

2. *En una inversión, el dominio del plano exterior con respecto a la circunferencia k se aplica sobre el interior, y recíprocamente* [*]).

3. *Cada punto de la circunferencia k coincide con su inversión.*

Estableceremos otras propiedades de la inversión mediante unos pequeños cálculos. Introduzcamos en el plano un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal y pongamos en correspondencia a cada punto M el número complejo $z = x + iy$, siendo x, y las coordenadas de M. Como de costumbre, denotaremos con una raya encima de z al número complejo conjugado de z: $\bar{z} = x - iy$. Evidentemente, cualquiera de los números z o $\bar{z}$ determina el punto M.

Ubiquemos el centro de la circunferencia con respecto a la cual se determina la inversión, en el origen de coordenadas. Entonces, si dos puntos, determinados por los números z y z', son inversiones uno del otro, entonces, como consecuencia de la condición (*), subsistirá la siguiente relación entre z y z':

$$\bar{z}z' = r^2.$$

Obtenemos, de aquí, la representación analítica de la inversión:

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}},$$

o, en coordenadas,

$$x' = r^2 \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$y' = r^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

---

*) Si aquí k tiene radio infinito, es decir, es una recta, cualquiera de los dos semiplanos determinados por ella se puede considerar dominio interior, y entonces el otro será considerado exterior.

Utilizando estas fórmulas, es fácil demostrar la llamada propiedad circular de la inversión: si el punto z describe una circunferencia o una recta, su inversión z' describirá, asimismo, una circunferencia o una recta.

Considerando una recta como una circunferencia de radio infinito, la propiedad precedente se enuncia de manera más concisa:

4. *La inversión de una circunferencia es una circunferencia.*

Para probarlo, consideremos una circunferencia arbitraria; supongamos que ésta tiene ecuación

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

Sustituyendo en esta ecuación las coordenadas corrientes x, y por las expresiones

$$x = r^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2},$$

$$y = r^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2},$$

nos queda:

$$Ar^4 + Br^2x' + Cr^2y' + D(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Entonces, las coordenadas de los puntos que son inversiones de los puntos de la circunferencia satisfacen asimismo la ecuación de una circunferencia (o una recta, si $D = 0$); queda así demostrada nuestra afirmación.

En nuestro análisis jugarán un papel central las aplicaciones obtenidas como producto de varias inversiones sucesivas.

Sea dada una tal aplicación, que lleva un punto arbitrario z en otro, z'. No es difícil mostrar que si esta aplicación es producto de un número par de inversiones, z' se expresa en función de z por la fórmula

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{I}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes complejas. Si, en cambio, la aplicación dada se compone de un número impar de inversiones, la dependencia de z' de z es de la forma

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}. \tag{II}$$

Mostremos primero que la inversión con respecto a una circunferencia de centro ARBITRARIO a y radio r se representa analíticamente por una dependencia tipo (II). Introduzcamos, con este fin, un sistema auxiliar de coordenadas con origen en el punto a, cuyos ejes sean paralelos a los del sistema original. Sean M y M' dos puntos que corresponden uno al otro en la inversión con respecto a la circunferenica dada. Si Z y Z' son los números complejos que los determinan en el sistema auxiliar de coordenadas, será

$$Z' = \frac{r^2}{\bar{Z}}.$$

Sean z y z' los números complejos que determinan estos mismos puntos en el sistema inicial. Evidentemente, $z = Z + a$, $z' = Z' + a$. Sustituyendo en la relación

precedente Z y Z' por sus expresiones en función de z y z', obtenemos:

$$z' - a = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}},$$

de donde

$$z' = \frac{a\bar{z} + (r^2 - a\bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}},$$

o bien, si hacemos $a = \alpha$, $r^2 - a\bar{a} = \beta$, $1 = \gamma$, $-\bar{a} = \delta$,

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}.$$

Hemos hecho esta discusión en la hipótesis de que la circunferencia de inversión era ordinaria. No es difícil obtener la dependencia entre z y z' para una inversión con respecto a una recta. En efecto, la inversión con respecto al eje real se caracteriza por la ecuación $z' = \bar{z}$. En consecuencia, la inversión con respecto a una recta por el origen se determina analíticamente por la igualdad $e^{i\varphi}z' = \overline{(e^{i\varphi}z)}$ o $z' = e^{-2i\varphi}\bar{z}$; de aquí, con una traslación, se halla la dependencia entre z y z' cuando la recta respecto a la cual se efectúa la inversión ocupe una posición arbitraria; precisamente:

$$z' = e^{-2i\varphi}\bar{z} + \text{const}.$$

Esta dependencia se obtiene de (II) si $\gamma = 0$.

Así, pues, con la relación $z' = \dfrac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma z + \delta}$, escogiendo adecuadamente las constantes α, β, γ, δ, se puede determinar cualquier inversión, ya sea con respecto a una circunferencia ordinaria, ya sea con respecto a una circunferencia de radio infinito.

Supongamos, ahora, que se efectúan dos inversiones sucesivas con respecto a circunferencias arbitrarias. Si la primera aplica z en z', y la segunda, z' en z'', de acuerdo con lo expuesto será

$$z' = \frac{\alpha_1\bar{z} + \beta_1}{\gamma_1\bar{z} + \delta_1}$$

y

$$z'' = \frac{\alpha_2\bar{z}' + \beta_2}{\gamma_2\bar{z}' + \delta_2}.$$

La primera igualdad nos da:

$$\bar{z}' = \frac{\bar{\alpha}_1 z + \bar{\beta}_1}{\bar{\gamma}_1 z + \bar{\delta}_1}.$$

Si sustituimos esta expresión en la segunda igualdad, después de algunas transformaciones nos queda, introduciendo notaciones adecuadas:

$$z'' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

es decir, una dependencia tipo (I). Evidentemente, si efectuamos otra inversión que aplica z'' en z''', la dependencia de z''' de z tendrá la forma (II); si efectuamos una nueva inversión con z''' nuevamente obtenemos (I), etc.

Demostremos ahora las propiedades, que necesitaremos más adelante, del producto de inversiones.

5. *Si una aplicación que representa el producto de un número par de inversiones deja fijos tres puntos del plano, todos los demás puntos en este caso quedarán fijos y la aplicación será en consecuencia, idéntica.*

Como sabemos, una aplicación del tipo indicado de z en z' se caracteriza por la igualdad

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Todos los puntos fijos de esta aplicación se determinan por la ecuación $z' = z$, es decir,

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

o bien

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0.$$

Por hipótesis, la ecuación obtenida debe tener tres soluciones, lo cual es posible únicamente si ésta se reduce a una identidad, es decir, si

$$\gamma = 0, \qquad \delta - \alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

Por consiguiente,

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z.$$

Claramente, $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$, todo punto z se aplica en el mismo punto $z' = 0$, cosa imposible para el producto de inversiones, pues cada una de ellas aplica puntos distintos en puntos distintos). La igualdad $\delta - \alpha = 0$, para $\alpha \neq 0$, nos da $z' = z$, demostrando así nuestra afirmación.

6. *Si una aplicación obtenida como producto de un número impar de inversiones deja fijos tres puntos del plano, será una inversión con respecto a la circunferencia que pasa por estos puntos.*

Sea $z' = f(z)$ la aplicación dada. Si $z'' = \varphi(z')$ es una inversión con respecto a la circunferencia indicada, $z'' = \varphi(f(z))$ es una aplicación obtenida ya por un número par de inversiones, además, deja fijos los mismos tres puntos que la aplicación dada $z' = f(z)$. Según lo visto, $z'' = \varphi(f(z))$ debe ser entonces la aplicación idéntica, es decir, $z'' = z$. Así, $\varphi(z') = z$ y, consecuentemente, z y z' corresponden uno al otro en la inversión con respecto a la circunferencia que pasa por los tres puntos en cuestión; esto era lo que había que demostrar.

Por último, daremos sin demostración otra proposición respecto de las inversiones.

7. *Si dos circunferencias se cortan, entonces bajo cualquier inversión el ángulo que forman en su punto común es igual al ángulo que forman las circunferencias obtenidas como resultado de su aplicación.*

La invariación del ángulo con respecto a las inversiones se demuestra en la teoría elemental de las aplicaciones conformes *).

---

*) Véase, por ejemplo, *A. I. Markushevich*, Elementos de la teoría de funciones analíticas. (*А. И. Маркушевич*, Элементы теории аналитических функций, 1941) (Puede consultarse la traducción de una obra más completa del mismo autor, *A. I. Markushevich*, Teoría de las funciones analíticas, Editorial Mir, Moscú, 1978.

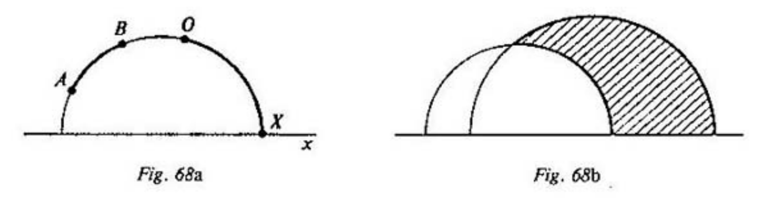


*Fig. 68*a *Fig. 68*b

Ahora podemos regresar a la construcción de un modelo de la geometría no euclidiana.

§ 52. Según la definición dada en el § 50 para el concepto «entre», el orden de los puntos sobre una recta no euclidiana coincide con el de los puntos en la semicircunferencia euclidiana que representa esta recta en el semiplano superior. Por esto, un segmento no euclidiano AB se representa por un arco de semicircunferencia de extremos A, B; una semirrecta no euclidiana con origen en el punto O se representa por un arco OX, cuyo extremo X está sobre la recta x (fig. 68a). Naturalmente, aquí el punto X no debe incluirse entre los puntos de la semirrecta no euclidiana.

Llamaremos *ángulo no euclidiano*, naturalmente, al conjunto de dos semirrectas no euclidianas con origen en un mismo punto (fig. 68b).

Daremos ahora la definición de congruencia de segmentos y ángulos en nuestro modelo de geometría no euclidiana.

Aquí habrá que utilizar fuertemente la inversión. Convendremos en considerar únicamente inversiones que se efectúan con respecto a circunferencias ortogonales a la recta x. Evidentemente, en cada una de estas inversiones los puntos situados en el semiplano superior se aplican en puntos del mismo semiplano. Efectuando, pues, inversiones de figuras del semiplano superior, no nos saldremos de este semiplano.

Diremos que un segmento no euclidiano AB es congruente al segmento no euclidiano $A'B'$, si existe una sucesión de inversiones tal que su producto aplica el arco de circunferencia euclidiano AB sobre el arco de circunferencia $A'B'$.

Análogamente, diremos que el $\angle(h, k)$ no euclidiano es congruente con el $\angle(h', k')$, si existe una sucesión de inversiones tal que su producto aplica los lados del primer ángulo sobre los del segundo *).

En virtud de la proposición 7 del § 51, los ángulos congruentes en el sentido de esta definición son iguales entre sí tambien en el sentido que se entiende en la geometría euclidiana con respecto a ángulos curvos. Por el contrario, los arcos circulares que representen segmentos no euclidianos congruentes, no serán, en general, congruentes desde el punto de vista enclidiano, pues las inversiones, si bien conservan las magnitudes de los ángulos, deforman las dimensiones lineales de las figuras.

En nuestro modelo de geometría no euclidiana, las inversiones con respecto a circunferencias ortogonales a la recta x representan desplazamientos congruentes. Estudiemos con más detalle sus particularidades.

Consideremos alguna semicircunferencia del plano superior, ortogonal a la recta x. Bajo una inversión, esta semicircunferencia, según la proposición 4 del § 51, se

---

*) Las relaciones establecidas de congruencia de segmentos y ángulos son recíprocas. Esto sigue de que la aplicación inversa de una inversión es también una inversión.

transforma en algún arco de circunferencia (situado, asimismo, en el semiplano superior). La propia recta x se aplica sobre sí misma en esta inversión. Como la inversión conserva las magnitudes de los ángulos, el arco obtenido mediante la inversión de la semicircunferencia considerada tendrá que ser ortogonal a la recta x y, consecuentemente, también será una semicircunferencia. Entonces, la inversión del tipo admitido por nosotros siempre aplica semicircunferencias del plano superior, ortogonales a la recta x, en semicircunferencias del mismo tipo. Esto es un resultado muy importante, pues las semicircunferencias del semiplano superior, ortogonales a la recta x, representan rectas de nuestro modelo de geometría no euclidiana.

Sea, ahora, AB un arco de circunferencia que representa un segmento no euclidiano (fig. 69). Sea S el punto de intersección de la recta euclidiana AB con la recta x (suponiendo que éstas se corten); tracemos por S la tangente SC al arco AB. Por un conocido teorema de la geometría euclidiana, tiene lugar la igualdad $SA \cdot SB = SC^2$. Por esto, si llamamos u a la semicircunferencia de centro S y radio SC, la inversión con respecto a u aplicará el punto A en el B, y el B, en el A. El punto C queda fijo en esta inversión. De aquí sigue que el arco AB se aplica sobre si mismo, de forma que su parte AC se aplica sobre BC, y BC, sobre AC. Los arcos AC y CB, por ser cada uno la inversion del otro, representan segmentos no euclidianos congruentes; el punto C es, en consecuencia, el punto medio no euclidiano del arco AB. Obsérvese, además, que el arco AB es ortogonal a la semicircunferencia u; esta semicircunferencia representa, pues, la perpendicular en el punto medio del segmento no euclidiano AB. Dicho de otro modo, los puntos A y B son simétricos, en el sentido no euclidiano, con respecto a la recta no euclidiana representada por la semicircunferencia u.

Podemos concluir, de aquí, que *la inversión, considerada desde el punto de vista no euclidiano, no es otra cosa que una simetría con respecto a una recta.*

Toda esta construcción fue efectuada suponiendo que existe el punto S. Si la recta euclidiana AB no corta a la recta x, hay que pensar que el punto S está en el infinito, trazar la tangente al arco AB paralela a x, y sustituir la semicircunferencia u por una semirrecta. En este caso la inversión se transforma en una simetría habitual con respecto a la perpendicular euclidiana a la recta x por el punto medio euclidiano C del arco AB.

Después de esto queda claro el significado de la definición dada arriba de congruencia de imágenes en nuestro esquema: la imagen A es congruente a la imagen A', si A' puede obtenerse de A por medio de cierto número de reflexiones especulares, en el sentido convencional (no euclidiano) que acabamos de describir.

Nuestra próxima finalidad es mostrar que la relación de congruencia que acabamos de establecer satisface todos los axiomas III,1 — III,5.

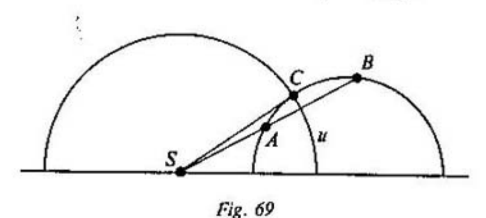


Fig. 69

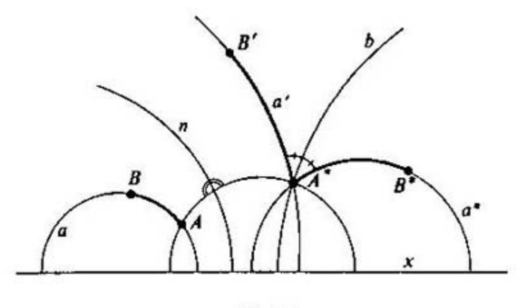


Fig. 70

Consideraremos estos axiomas uno tras otro. El axioma III,1 requiere que en cada recta, por cada uno de sus puntos y a un lado cualquiera se pueda trazar un segmento congruente a otro segmento arbitrariamente dado de alguna recta.

Esto se satisface en nuestro esquema. En efecto, sean a y a^* dos rectas no euclidianas; tomemos en la primera un segmento AB, y en la segunda, un punto A^* (fig. 70). Fijemos, además, una de las dos semirrectas determinadas por el punto A^* en la recta a^*. Tracemos, en la forma indicada antes, la perpendicular (no euclidiana) n en el punto medio del segmento AA^*. Empleando la reflexión especular (no euclidiana) con respecto a esta perpendicular, podemos aplicar la recta a sobre alguna recta a'; el punto A se aplicará, entonces, en el punto A^*, y el segmento AB de la recta a tendrá por imagen un segmento A^*B' de la recta a'. Tracemos ahora la bisectriz (no euclidiana) b del ángulo formado por las dos semirrectas (no euclidianas), una de las cuales va del punto A^* al B', y la otra es la semirrecta fijada de la recta a^*. La reflexión especular con respecto a b (en el sentido no euclidiano) lleva la recta (no euclidiana) a' en la a^*, y el segmento A^*B' de la recta a', en algún segmento A^*B^*. Así, sobre la recta (no euclidiana) a^*, a un lado prefijado de su punto A^* existe un punto B^* tal que el segmento A^*B^* se obtiene por medio de dos reflexiones especulares (no euclidianas) del segmento AB y, en consecuencia, $AB \equiv A^*B^*$ en el sentido adoptado arriba; esto, precisamente, constituye lo que había que probar.

El axioma III,1 exige, además, que entre los puntos de la recta a^* al lado prefijado de A^*, sólo uno determine con A^* un segmento congruente al AB. Demostremos que esto se satisface según nuestra definición de congruencia.

Supongamos que en la recta (no euclidiana) a^*, a un mismo lado de A^*, hay dos puntos diferentes B_1^* y B_2^* tales que se observan las condiciones $AB \equiv A^*B_1^*$ y $AB \equiv A^*B_2^*$. Esto significa que existe alguna sucesión de inversiones cuyo producto aplica el arco de circunferencia AB sobre el arco de circunferencia $A^*B_1^*$, y otra sucesión de inversiones cuyo producto aplica el arco AB sobre el arco $A^*B_2^*$. Sea X_2 el punto de corte de la prolongación del arco AB en la dirección desde A hacia B con la recta x, y X_1 el punto de encuentro con x del arco AB prolongado en sentido opuesto. Denotemos con X_2^* y X_1^* los extremos, determinados análogamente, de la semicircunferencia representante de la recta no euclidiana a^*. Evidentemente, los productos de cada una de las sucesiones de inversiones antedichas aplica X_1 sobre

X_1^* y X_2 sobre X_2^*. Imaginémonos que las inversiones de la primera sucesión se efectúan en orden inverso, y luego se efectúan las inversiones de la segunda sucesión. Como resultado se obtiene una aplicación que denotaremos con f. Evidentemente, al realizar la aplicación f el punto X_1^* coincidirá primero con X_1 y después regresará a la posicion X_1^*; este punto es, pues, un punto fijo de la aplicación f. Análogamente, A^* y X_2^* son puntos fijos de f. En cuanto al punto B_1^*, irá a parar en el punto B_2^* por la aplicación f. De este modo, f tiene tres puntos fijos X_1^*, A^* y X_2^*. En virtud de las proposiciones 5 y 6 del § 51, de aquí sigue que f es o bien la aplicación idéntica, o bien una inversión con respecto a la circunferencia que pasa por los puntos X_1^*, A^*, X_2^*, B_1^* y B_2^*. En ambos casos todos los puntos de esta circunferencia serán puntos fijos de f. En consecuencia, B_1^* y B_2^* no pueden ser diferentes. Esto demuestra la unicidad de la operación de aplicación congruente de un segmento.

Por último, el axioma III,1 requiere que el segmento AB sea congruente al BA. Para verificar esto en el modelo considerado de la geometría no euclidiana, basta efectuar una reflexión especular no euclidiana con respecto al punto medio del segmento AB.

Así, pues, todo lo que pide el axioma III,1 se cumple.

Consideremos el axioma III,2, según el cual si los segmentos $A'B'$ y $A''B''$ son congruentes al AB, entonces $A'B'$ debe ser congruente a $A''B''$.

Esto se cumple evidentemente en nuestro modelo de geometría no euclidiana. Efectivamente, las relaciones $A'B' \equiv AB$ y $A''B'' \equiv AB$ significan que existe una serie de reflexiones especulares no euclidianas como resultado de las cuales $A'B'$ se superpone sobre AB, y existe otra serie que superpone $A''B''$ también sobre AB. Efectuemos las reflexiones especulares de la primera serie y, a continuación, las de la segunda, en orden inverso. Como resultado, $A'B'$ se aplicará sobre $A''B''$, de donde seguirá, precisamente, la congruencia de estos segmentos.

Consideremos, ahora, el axioma III,3.

Sean AB y $A'B'$ segmentos no euclidianos, C, un punto interior del segmento AB y C', un punto interior de $A'B'$. Debemos demostrar que según nuestra definición de congruencia, de $AC \equiv A'C'$ y $CB \equiv C'B'$ sigue que $AB \equiv A'B'$.

Como $AC \equiv A'C'$, existirá una serie de reflexiones especulares no euclidianas cuyo producto aplica AC sobre $A'C'$. El punto B se aplicará simultáneamente en el punto B^* sobre la recta $A'B'C'$; además, B^* estará del mismo lado de C' que B'. Los segmentos $C'B'$ y $C'B^*$ están del mismo lado de C' y, siendo congruentes a CB($C'B'$, por hipótesis, y $C'B^*$, por construcción), tienen que serlo entre sí (por el axioma III,2, ya verificado). Pero entonces, por el axioma III,1, los puntos B^* y B' no pueden ser diferentes. Por lo tanto, el producto de las reflexiones especulares no euclidianas indicadas aplica AB sobre $A'B'$, de donde $AB \equiv A'B'$.

La verificación del axioma III,4 tampoco presenta dificultades. Este axioma exige que a cada semirrecta, de un lado cualquiera, se pueda aplicar un ángulo congruente a un ángulo arbitrario dado, y que esta construcción sea unívoca.

La posibilidad y la univocidad de esta construcción se establecen por razonamientos análogos a los efectuados al verificar el axioma III,1. Precisamente, sea $\angle(h, k)$ un ángulo no euclidiano de vértice O, y h', una semirrecta no euclidiana de origen O'. Ante todo, mediante una reflexión especular no euclidiana con respecto a la perpendicular en el punto medio del segmento OO', aplicamos $\angle(h, k)$ sobre el $\angle(h'', k'')$, cuyo vértice coincida con O'. Luego de esto, una reflexión especular

no euclidiana con respecto a la bisectriz de $\angle(h', h'')$ transforma $\angle(h'', k'')$ en $\angle(h', k')$; este ángulo es, por construcción, congruente al $\angle(h, k)$ y está aplicado a algún lado de la semirrecta h'. Si, por casualidad, el lado prefijado era el opuesto, basta aplicar una reflexión especular más con respecto a h'. Ahora hay que demostrar la univocidad de la operación de aplicación de un ángulo a una semirrecta dada a un lado determinado de ésta. Supongamos que $\angle(h', k_1')$ se ha obtenido mediante una serie de reflexiones especulares no euclidianas de $\angle(h, k)$, y que $\angle(h', k_2')$ fue obtenido por medio de otra serie de reflexiones especulares no euclidianas también de $\angle(h, k)$. Sea f el producto de las reflexiones especulares de la primera serie, efectuadas en orden inverso, y las reflexiones especulares de la segunda. Claro, f aplica $\angle(h', k_1')$ sobre $\angle(h', k_2')$. Pero, considerando que las reflexiones especulares no euclidianas son inversiones, y utilizando las proposiciones 5 y 6 del § 51 en forma idéntica a como lo hicimos al verificar el axioma III,1, se puede demostrar que f es o bien la aplicación idéntica, o bien una reflexión especular no euclidiana con respecto a la semirrecta h'. En consecuencia, $\angle(h', k_1')$ y $\angle(h', k_2')$ o bien coinciden, o bien son mutuamente especulares (en el sentido no euclidiano) con respecto a h'; esto es, precisamente, lo que había que establecer.

El axioma III,4 requiere, además, que todo $\angle(h, k)$ sea congruente consigo mismo, es decir, que $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ y $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$. Pero la primera relación es evidente*), y la segunda puede comprobarse efectuando una reflexión especular no euclidiana del ángulo con respecto a su bisectriz.

Por último, las condiciones requeridas por el axioma III,5 se satisfacen en nuestro modelo, cosa fácil de verificar efectuando razonamiendos análogos a los utilizados en los cursos de geometría elemental para demostrar el primer teorema de igualdad de triángulos, pero entendiendo por movimiento el resultado de alguna serie de reflexiones especulares no euclidianas.

Vemos, así, que en el sistema construido de objetos la relación de congruencia satisface todos los axiomas del tercer grupo.

Hecho esto, podemos concluir de inmediato que en este sistema de objetos se verifican los axiomas de continuidad IV,1 y IV,2. En efecto, como observamos en el § 50, en las rectas no euclidianas se observa el principio de Dedekind; entonces, en virtud del teorema 41 del § 23, de los axiomas I — III, más el principio de Dedekind, se desprenden ambas proposiciones, la IV,1 y la IV,2.

Nuestro sistema de objetos satisface, pues, todos los axiomas de la planimetría absoluta I,1 — I,3, II, III, IV. Pero entonces en éste tendrá que realizarse o bien la teoría de paralelas de Euclides, o bien la de Lobachevski. Mostraremos ahora que tiene lugar precisamente el segundo caso.

Sea a alguna semicircunferencia del semiplano superior, ortogonal a la recta x. Sea A algún punto del semiplano superior que no pertenece a esta semicircunferencia (fig. 71). Es fácil comprobar que por A pasa un número infinito de semicircunferencias diferentes, ortogonales a la recta x, que no tienen puntos comunes con la semicircunferencia a. En los términos que convinimos utilizar desde el principio, esto puede expresarse también así: por un punto no euclidiano arbitrario, no pertene-

---

*) Pues la aplicación idéntica puede considerarse como la aplicación doble de cualquier inversión.

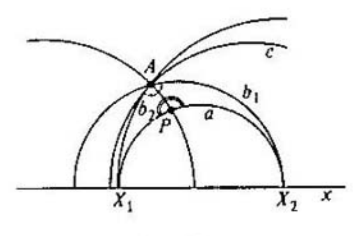


Fig. 71

ciente a una recta no euclidiana dada, pasa un número infinito de rectas no euclidianas que no cortan a la recta dada.

Esto significa, precisamente, que en el sistema considerado de objetos tiene lugar el postulado de Lobachevski; este sistema representa, por consecuencia, un modelo de la geometría de Lobachevski, cuya construcción nos habíamos puesto por finalidad. Utilizando este modelo, se puede dar a cada proposición de la planimetría de Lobachevski una interpretación bien concreta en el plano euclidiano. Para ello, los términos «punto», «recta», «congruentes», etc., que se encuentran en el enunciado de cada proposición, deben interpretarse en el sentido que convinimos, es decir, por «punto» sobreentender un punto euclidiano del semiplano superior, por «recta», una semicircunferencia euclidiana o una semirrecta, ortogonales al borde del semiplano; llamar congruentes a las figuras que pueden aplicarse una sobre la otra como resultado de la aplicación sucesiva de inversiones, etc. Entonces, a cada teorema de Lobachevski le corresponde un teorema euclidiano bien determinado. Por lo tanto, si existiesen contradicciones en la geometría de Lobachevski, también las habría en la euclidiana.

Vemos, así, que *la consistencia de la geometría de Lobachevski sigue de la consistencia de la de Euclides.*

Hemos demostrado, también, que *el postulado de las paralelas de Euclides no puede ser deducido de las premisas de la geometría absoluta.*

En efecto, en el modelo de H. Poincaré se realizan todos los axiomas de la geometría absoluta, pero en lugar del postulado de las paralelas de Euclides tiene lugar el de Lobachevski. Por consiguiente, el postulado de Euclides no es una consecuencia lógica de estos axiomas.

§ 53. Es interesante imaginarnos cómo tales o cuales resultados concretos de la geometría de Lobachevski se interpretan en el semiplano de Euclides.

Observemos la fig. 71. Allí hemos representado una recta no euclidiana como la semicircunferencia a, ortogonal a la recta x, y un punto A. Las rectas no euclidianas que pasan por A y no cortan a la recta dada, se representan mediante semicircunferencias que pasan por A, son ortogonales a x y no intersecan a la semicircunferencia a. Entre estas rectas no euclidianas, como se sabe, deben existir dos rectas fronteras, que se llaman, precisamente, paralelas a la recta dada en sus dos direcciones (sentidos). Las rectas paralelas están representadas en la fig. 71 como las semicircunferencias b_1 y b_2, tangentes a la semicircunferencia a en sus extremos X_1 y X_2, que están sobre la recta x. Como los puntos euclidianos de la recta x no son objetos no euclidianos, debe pensarse que las rectas no euclidianas representadas por las semi-

circunferencias b_1 y b_2 no cortan a la recta a. El hecho que éstas sean las rectas frontera se verifica directamente.

Tracemos por A una semicircunferencia ortogonal a la recta x que corte la semicircunferencia a en un punto P, también bajo un ángulo recto.

El arco AP, evidentemente, representa una perpendicular no euclidiana a la recta no euclidiana a; el ángulo que ésta forma con el arco b_1 no es otra cosa que el ángulo de paralelismo del segmento AP.

Un resultado enteramente trivial de la geometría de Lobachevski es que la perpendicular AP es la bisecriz del ángulo formado por las rectas no euclidianas b_1 y b_2. En la geometría euclidiana, la igualdad de los ángulos que el arco AP forma con los arcos b_1 y b_2 no es en absoluto evidente; pero no hay necesidad de demostrar tal teorema euclidiano. En efecto, como en el sistema de objetos del modelo de Poincaré tienen lugar todos los axiomas de Lobachevski, también tendrán lugar todos sus corolarios, entre ellos, la afirmación enunciada. De aquí se obtiene, en particular, un método singular de demostración de algunos teoremas euclidianos, utilizando la geometría no euclidiana.

Indiquemos, por ejemplo, el siguiente teorema euclidiano, cuya validez afirmaremos sin ninguna demostración especial: si un triángulo está formado por arcos de circunferencia, cuyas prolongaciones cortan alguna recta en ángulo recto, la suma de los ángulos internos de éste es menor que dos rectos. Evidentemente, este teorema se obtiene del correspondiente en la geometría de Lobachevski, por medio de la interpretación de Poincaré.

Veamos, además, cómo lucen en el modelo de Poincaré las circunferencias no euclidianas, las equidistantes y los oriciclos. Estas líneas son trayectorias ortogonales de haces elípticos, hiperbólicos y parabólicos, formados por rectas no euclidianas (véase el final del § 39).

En la fig. 72 se representa un haz de circunferencias no euclidianas con dos puntos nodales A y A', de los cuales A está en el semiplano superior, y A' en el infe-

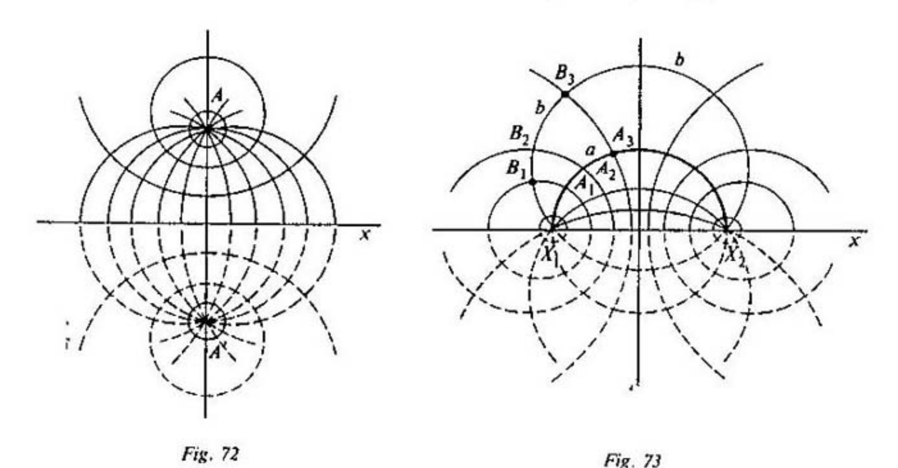


Fig. 72

Fig. 73

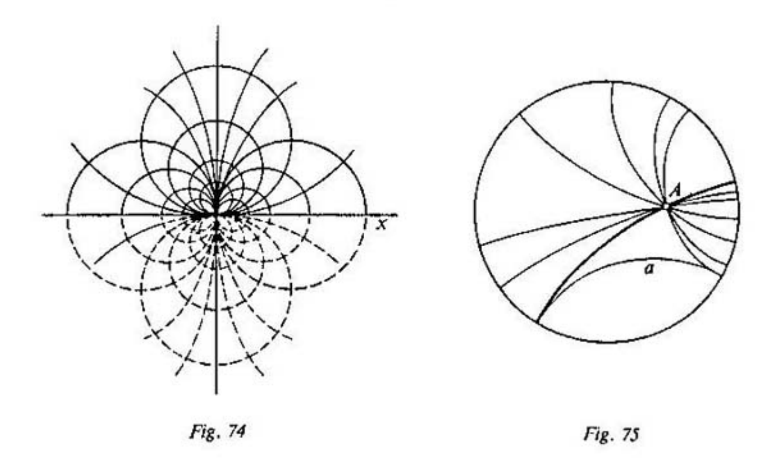


Fig. 74 *Fig. 75*

rior, situado simétricamente a A. Las trayectorias ortogonales de este haz son también circunferencias, que forman un haz sin puntos nodales, pero con puntos límite A y A' (omitimos la demostración). Evidentemente, las mitades superiores de las circunferencias del primer haz representan rectas no euclidianas que pasan por el punto A y, por ende, constituyen un haz elíptico, de manera que las circunferencias ortogonales a ella del segundo haz que estén en el semiplano superior representarán circunferencias no euclidianas de centro común A.

En la fig. 73 se representa una semicircunferencia a ortogonal a la recta x y un haz de circunferencias ortogonales a ella, con puntos límite X_1 y X_2. Las mitades superiores de estas circunferencias representan rectas no euclidianas con perpendicular común a; el conjunto de tales rectas es un haz hiperbólico con base a. Toda circunferencia que pase por X_1 y X_2 representa una trayectoria ortogonal de este haz y, por consiguiente, el arco superior de esta circunferencia representa una equidistante cuya base es la recta no euclidiana a. Los arcos de circunferencia A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... etc. representan las alturas de la equidistante b, congruentes en el sentido no euclidiano.

En la fig. 74 se representa un haz de circunferencias con puntos nodales coincidentes; las mitades superiores de éstas representan rectas no euclidianas paralelas entre sí en una dirección y que forman, por lo tanto, un haz no euclidiano parabólico rectilíneo. Sus trayectorias ortogonales, consideradas desde el punto de vista no euclidiano, son oriciclos, y como objetos del plano euclidiano, circunferencias tangentes entre sí y a la recta x en el punto nodal.

Entonces, un arco de circunferencia que esté en el semiplano superior, representa una recta no euclidiana si tiene sus extremos sobre la recta x y forma con ella un ángulo recto; una equidistante, si, teniendo sus extremos en la recta x, forma con ésta un ángulo diferente del recto; un oriciclo, si sus extremos coinciden y en el punto de coincidencia es tangente a la recta x; por último, una circunferencia no euclidiana, si se trata de una circunferencia euclidiana completa del semiplano superior.

§ 54. Interpretación que acabamos de analizar de la geometría no euclidiana no es, en absoluto, la única posible; existe, además, una infinidad la interpretaciones distintas.

Por ejemplo, podemos interpretar la geometría no euclidiana en el plano de Euclides también de la siguiente manera.

Fijemos en el plano euclidiano alguna circunferencia K. Llamemos puntos no euclidianos a los puntos del plano euclidiano que están dentro de K, rectas no euclidianas, a los arcos, pertenecientes al interior de K, de circunferencias euclidianas ortogonales a ella (incluyendo los diámetros). A los conceptos de pertenencia mutua y de orden de los elementos geométricos les mantendremos su significado euclidiano.

Diremos que dos imágenes no euclidianas son mutuamente especulares en el sentido no euclidiano, si sus imágenes euclidianas en el interior de K pueden ser aplicadas una sobre la otra mediante una inversión con respecto a alguna circunferencia ortogonal a la circunferencia K. Diremos que dos imágenes no euclidianas son congruentes si pueden aplicarse una sobre la otra por medio de alguna serie de reflexiones especulares no euclidianas.

Efectuando razonamientos análogos a los hechos en los §§ 50 — 52, se puede mostrar que con tal definición de objetos geométricos y relaciones entre ellos, se satisfacen todos los axiomas de la geometría absoluta. Hecho esto, no es difícil decidir cuál teoría de las paralelas se realiza en el sistema de rectas no euclidianas dentro del círculo K. Sea a un arco de circunferencia ortogonal a la circunferencia K, y A, un punto en el interior de K que no pertenece a esta arco (fig. 75). Con métodos de geometría euclidiana elemental es fácil mostrar que por el punto A pasa un número infinito de arcos de circunferencia ortogonales a K y que no cortan el arco a. Esto significa que en el sentido de las relaciones que se han establecido para las imágenes no euclidianas dentro de K, en el sistema de estas imágenes se realiza el postulado de las paralelas de Lobachevski. Por consiguiente, hemos obtenido una nueva interpretación de la planimetría de Lobachevski en el plano de Euclides.

Cada proposición de la geometría de Lobachevski, enunciada en forma abstracta, puede ser interpretada en el semiplano euclidiano o dentro de un círculo euclidiano; se obtendrá, entonces, un cierto teorema de la geometría euclidiana, cuyo significado concreto dependerá del método escogido de interpretación. La posibilidad de obtener por esta vía teoremas euclidianos a partir del esquema lógico abstracto de Lobachevski encuentra su aplicación en la teoría geométrica de funciones de variable compleja, en donde se establece, asimismo, una relación estrecha entre las dos interpretaciones que acabamos de describir de la geometría de Lobachevski y se indican principios generales para construir un conjunto infinito de otras interpretaciones *).

---

*) Véase, por ejemplo, *А. И. Маркушевич*, Элементы теории аналитических функций (*A. I. Markushevich*, Elementos de la teoría de las funciones analíticas) (O bien la obra del mismo autor en español, Teoría de la funciones analíticas, Editorial Mir, Moscú, 1978. *N. del Tr.*)

10. Relaciones métricas fundamentales de la geometría de Lobachevski

§ 55. La singularidad de la geometría de Lobachevski se manifiesta de manera particularmente notoria en el estudio de sus relaciones métricas, es decir, las relaciones entre diversas magnitudes geométricas. Una de estas relaciones, precisamente, la expresión del área de un triángulo en función de la suma de sus ángulos internos, ya fue estudiada en el § 48. En la presente sección estableceremos la fórmula fundamental de Lobachevski, que expresa el ángulo de paralelismo en función del segmento correspondiente, y las fórmulas de la trigonometría de Lobachevski (que establecen relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo). Al deducir estas fórmulas, supondremos que el plano de Lobachevski se realiza con el modelo de Poincaré, es decir, los términos «punto», «recta», «está en», «entre», «congruentes» se interpretarán de la forma concreta convenida en los §§ 50 — 52. Esta deducción de las fórmulas de Lobachevski es suficientemente sencilla y clara. Además, revela claramente los nexos entre la geometría de Lobachevski y la teoría de funciones de variable compleja; pero esta deducción, por supuesto, no nos permite afirmar que las fórmulas así obtenidas son válidas en la geometría de Lobachevski en general, es decir, que tienen lugar al interpretarla en cualquier modelo.

En el capítulo VII daremos una deducción de las mismas fórmulas, partiendo de los axiomas, sin considerarlos realizados en modelo alguno. Con esto habremos mostrado que tales fórmulas son válidas para cualquier modelo de la geometría de Lobachevski. La deducción de las fórmulas fundamentales de la geometría de Lobachevski expuesta en el capítulo VII es también muy sencilla, pero se basa en algunas proposiciones de geometría proyectiva. Tales proposiciones se encuentran en el capítulo VII; por esto, el lector que esté de acuerdo en aceptarlas, puede, si lo desea, omitir los capítulos dedicados a la geometría proyectiva y estudiar directamente la deducción abstracta de las fórmulas de Lobachevski (véanse los §§ 216 — 221, 229 — 232).

§ 56. Ante todo habrá que presentar algunas proposiciones sobre los invariantes de las transformaciones lineales fraccionales de variable compleja. Como de costumbre, representaremos al número $z = x + iy$ por el punto de coordenadas cartesianas x, y; utilizaremos indistintamente los términos «el número z» y «el punto z».

Consideremos la transformación

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

donde z es una variable compleja, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes (en general, complejas). La transformación de la variable z en la variable z', expresada por una fórmula de tipo (1), lleva el nombre de *lineal fraccional* (ya hemos encontrado tales transformaciones en el § 51). Se sobreentiende que en la fórmula (1) al menos uno de los números γ, δ se asume diferente de cero.

En número $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ se llama *determinante* de la transformación lineal fraccional. Es fácil ver que si $\Delta = 0$, a todos los puntos z (escogidos, claro está, con la condición de que $\gamma z + \delta \neq 0$) les corresponde, por la fórmula (1), un mismo punto z'. En efecto, si $\Delta = 0$, los números α, β son proporcionales a γ, δ, es decir,

$\alpha = k\gamma$, $\beta = k\delta$ y, por consiguiente,

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{k(\gamma z + \delta)}{\gamma z + \delta} = k.$$

Por el contrario, si $\Delta \neq 0$, a distintos puntos z_1, z_2 les corresponden, por la fórmula (1), también puntos distintos z_1', z_2'. Efectivamente, tenemos:

$$z_1' - z_2' = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} - \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)}(z_1 - z_2),$$

es decir,

$$z_1' - z_2' = \frac{\Delta}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)}(z_1 - z_2). \tag{2}$$

Entonces, cuando $\Delta \neq 0$, si $z_1 \neq z_2$, también $z_1' \neq z_2'$.

En el caso $\Delta = 0$, la transformación lineal fraccional se llama *degenerada*; en el caso $\Delta \neq 0$, *no degenerada*. De acuerdo con lo expuesto, una transformación degenerada aplica todos los puntos del plano en uno solo; la no degenerada aplica puntos diferentes en puntos diferentes. En ambos casos, el punto z para el cual $\gamma z + \delta = 0$ debe ser descartado de la consideración; éste no posee punto correspondiente.

En lo que sigue consideraremos únicamente transformaciones lineales fraccionales no degeneradas. Para nuestra discusión es esencial que cada transformación lineal fraccional no degenerada del tipo (1) posee transformación inversa

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha} \tag{3}$$

la cual, evidentemente, es también lineal fraccional y no degenerada (pues su determinante es $\Delta' = \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0$).

La existencia del punto excepcional $z = -\delta/\gamma$, para el cual la fórmula (1) pierde sentido, complica el enunciado de las proposiciones referentes a las transformaciones lineales fraccionales. Para facilitar estos enunciados, completaremos el plano de variable compleja con un nuevo objeto, que llamaremos *punto del infinito* *) y denotaremos con el símbolo ∞; convendremos en considerar que en una transformación no degenerada de tipo (1), el punto $z = -\delta/\gamma$ tiene por imagen al punto del infinito. El punto del infinito se considera imagen del punto excepcional de cada transformación lineal fraccional no degenerada. En particular, con respecto a la transformación (3), el punto del infinito es imagen del punto $z' = \alpha/\gamma$. Como las transformaciones (1) y (3) son mutuamente inversas, con respecto a la transformación (1) el punto del infinito debe considerarse PREIMAGEN del punto $z' = \alpha/\gamma$. Así, entonces, de acuerdo con nuestra convención, la transformación no degenera-

---

*) Conviene observar la diferencia entre esta condición y la del § 38. En el plano complejo se introduce un único punto del infinito ∞, mientras que en el plano de Lobachevski cada familia de rectas paralelas determina un punto del infinito diferente. En el plano proyectivo (véase el § 80) se hace una condición similar a esta última. (*N. del Tr.*)

da (1) lleva el punto $z = -\delta/\gamma$ en el punto $z' = \infty$ y el punto $z = \infty$ en $z' = \alpha/\gamma$.

Obsérvese, por último, que si $\gamma = 0$, no habrá punto excepcional, pues cada punto del plano tiene imagen (ordinaria). Con respecto a estas transformaciones convendremos en considerar que el punto del infinito es imagen de sí mismo.

Sean u, v, s, t cuatro puntos diferentes. Supongamos que todos ellos son ordinarios (es decir, que entre ellos no está el punto del infinito). Entonces el número denotado por el símbolo $(uvst)$ y definido por la igualdad

$$(vust) = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t} \tag{3'}$$

se llama *razón compuesta*, o bien *doble*, o bien *cruzada* de los números u, v, s, t, considerados en ese orden. La razón compuesta de estos mismos números dados en otro orden puede tener ya otro valor; por ejemplo, si $(uvst) = \lambda$, entonces

$$(vust) = \frac{1}{\lambda}, \qquad (uvts) = \frac{1}{\lambda}. \tag{4}$$

Si entre los puntos dados está el punto del infinito, la razón compuesta se determina por una de las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} (uvs\infty) &= \frac{u - s}{v - s}, \qquad (uv\infty t) = \frac{v - t}{u - t}, \\ (u\infty st) &= \frac{u - s}{u - t}, \qquad (\infty vst) = \frac{v - t}{v - s}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Obsérvese que la primera de estas fórmulas se obtiene pasando al límite en (3′) cuando $t \to \infty$, la segunda, cuando $s \to \infty$, etc.

La razón compuesta de cuatro puntos es un invariante de las transformaciones lineales fraccionales no degeneradas; esto significa que si alguna transformación lineal fraccional no degenerada lleva los cuatro puntos u, v, s, t respectivamente en u', v', s', t', entonces

$$(u'v's't') = (uvst).$$

Haremos la demostración primero para el caso en que ni entre los puntos dados ni entre sus imágenes está el infinito. Supongamos que la transformación que lleva u, v, s, t en u', v', s', t' se da por medio de la fórmula (1); entonces, de acuerdo con (2),

$$u' - s' = \frac{\Delta}{(\gamma u + \delta)(\gamma s + \delta)}(u - s),$$

$$u' - t' = \frac{\Delta}{(\gamma u + \delta)(\gamma t + \delta)}(u - t),$$

de donde

$$\frac{u' - s'}{u' - t'} = \frac{u - s}{u - t} \cdot \frac{\gamma t + \delta}{\gamma s + \delta}.$$

Análogamente,

$$\frac{v' - s'}{v' - t'} = \frac{v - s}{v - t} \cdot \frac{\gamma t + \delta}{\gamma s + \delta}.$$

En consecuencia,

$$\frac{u' - s'}{u' - t'} : \frac{v' - s'}{v' - t'} = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t},$$

es decir, $(u'v's't') = (uvst)$.

Supongamos, ahora, que todos los puntos u, v, s, t son ordinarios, y alguno de los puntos u', v', s', t' es infinito, por ejemplo, $t' = \infty$. Esto significa que $\gamma t + \delta = 0$. Entonces

$$(u'v's't') = (u'v's'\infty) = \frac{u' - s'}{v' - s'} = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{\gamma v + \delta}{\gamma u + \delta} =$$

$$= \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{v + (\delta/\gamma)}{u + (\delta/\gamma)} = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{v - t}{u - t} = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t} = (uvst).$$

El caso en que alguno de los puntos u, v, s, t sea el infinito y todos los u', v', s', t' sean ordinarios se reduce al precedente. En efecto, considerando la transformación inversa a la dada, hallamos, basándonos en lo expuesto, que $(uvst) = (u'v's't')$.

Falta analizar el caso en que uno de los puntos u, v, s, t es infinito y tiene por imagen al infinito *); si la transformación se da por la fórmula (1), este caso tiene lugar para $\gamma = 0$.

Supongamos, por ejemplo, que $t = \infty$ y $t' = \infty$. Entonces

$$(u'v's't') = (u'v's'\infty) = \frac{u' - s'}{v' - s'} = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{\gamma v + \delta}{\gamma u + \delta} =$$

$$= \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{\delta}{\delta} = \frac{u - s}{v - s} = (uvs\infty) = (uvst).$$

Así, pues, en todos los casos $(u'v's't') = (uvst)$; nuestra afirmación queda demostrada.

§ **57**. También tendremos que considerar la transformación de la variable z en la variable z' determinada por la fórmula

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} \qquad (6)$$

y llamada lineal fraccional de segunda especie (recuérdese que $\bar{z}$ denota el conjugado de z); en el § 51 ya nos topamos con estas transformaciones.

Una transformación de tipo (6) se dice *degenerada*, si $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$, y *no degenerada*, si $\Delta \neq 0$; una transformación degenerada aplica todos los puntos en uno solo, mientras que las no degeneradas transforman puntos diferentes en puntos

*) Tambien falta discutir el caso en que alguno de los u, v, s, t es ∞ y uno de los u', v', s', t' que no sea su imagen, también. El lector puede ejercitarse reproduciendo los detalles ausentes. (*N. del Tr.*)

diferentes (se demuestra igual que la afirmación análoga para las transformaciones de primera especie). En lo que sigue entre las transformaciones del tipo 6 consideraremos sólo transformaciones no degeneradas.

Sean u, v, s, t puntos diferentes cualesquiera, y u', v', s', t' sus imágenes respecto de una transformación no degenerada del tipo (6); *entonces la razón compuesta de los puntos u', v', s', t' es el número conjugado de la razón compuesta de* u, v, s, t. En símbolos, esta afirmación se expresa por la igualdad

$$(u'\,v'\,s'\,t') = \overline{(uvst)}.$$

Para probarlo, representemos la transformación (6) en forma de producto de dos transformaciones,

$$z' = \frac{\alpha z'' + \beta}{\gamma z'' + \delta} \tag{7}$$

y

$$z'' = \bar{z}. \tag{8}$$

Con respecto a la transformación (8) consideraremos que la imagen del punto del infinito es el propio infinito.

Obsérvese, ahora, que si todos los puntos que forman una razón compuesta son sustituidos por sus conjugados, la propia razón compuesta será sustituida por su conjugada. Por esto, denotado con u'', v'', s'', t'' las imágenes de u, v, s, t con respecto a la transformación (8), tendremos:

$$(u''\,v''\,s''\,t'') = \overline{(uvst)}.$$

Ahora, como la transformación (7) el líneal fraccional de primera especie,

$$(u'\,v'\,s'\,t') = (u''\,v''\,s''\,t'').$$

De estas dos igualdades obtenemos lo que queríamos:

$$(u'\,v'\,s'\,t') = \overline{(uvst)}.$$

§ 58. Ahora pasaremos a exponer el tema principal de esta sección. Ante todo, estableceremos la fórmula que expresa la distancia no euclidiana entre dos puntos del modelo de Poincaré (véanse los §§ 50 — 52).

Sean u, v dos puntos del semiplano superior. La recta no euclidiana que pasa por u, v se representa por una semicircunferencia no euclidiana que pasa por ellos y es ortogonal al eje x. Sean s y t los puntos de apoyo de esta semicircunferencia sobre dicho eje (fig. 76; recuerde el lector que los puntos del eje x, entre ellos s y t, no se incluyen en el modelo de Poincaré). Si la semicircunferencia ortogonal al eje x la cual pasa por los puntos u y v degenera en una recta (euclidiana), denotaremos con s el punto de apoyo de esta recta sobre el eje x, y con t, el punto del infinito (fig. 77). Consideremos la razón compuesta $(uvst)$. Es fácil mostrar que se trata de un número real y positivo. Demostremos esto primero para el caso representado en la fig. 76 (suponemos que s está a la izquierda de t). Sean r_1 y r_2 los módulos de los números $u - s$ y $u - t$, y θ_1, θ_2, sus argumentos. Como $\angle(sut)$ es recto,

$$\theta_2 - \theta_1 = \pi/2;$$

por lo tanto,

$$\frac{u - s}{u - t} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

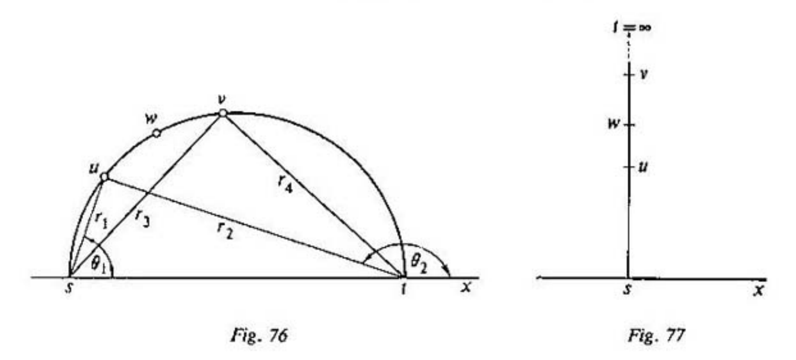


Fig. 76

Fig. 77

Análogamente,

$$\frac{v-s}{v-t} = \frac{r_3}{r_4} e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

donde $r_3 = |v - s|$, $r_4 = |v - t|$. De aquí sigue que

$$(uvst) = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_4} > 0. \tag{9}$$

En el caso correspondiente a la fig. 77, los números $u - s$ y $v - s$ son reales y tienen igual signo; por ende, en este caso

$$(uvst) = (uvs\infty) = \frac{u-s}{v-s} = \frac{r_1}{r_3} > 0. \tag{10}$$

Así, pues $(uvst) > 0$. Por tanto, podemos tomar el logaritmo del número $(uvst)$, entendiendo el logaritmo en el sentido del álgebra elemental.

Demostraremos que *la distancia no euclidiana entre puntos arbitrarios u y v del modelo de Poincaré se expresa por la fórmula*

$$\rho(u, v) = R\,|\ln(uvst)|, \tag{11}$$

donde R es alguna constante positiva (la elección de la constante R equivale a la elección de la escala).

Para demostrarlo, debemos establecer que $\rho(u, v)$ satisface las tres condiciones de definición de longitud de un segmento (véase la definición 12 del § 20). Pasemos a verificar esto.

1. Sea u', v' un par de puntos del semiplano superior que determina un segmento no euclidiano congruente del segmento determinado por el par de puntos u, v. Sean s', t' los puntos que se hallan a partir de u', v' por la misma construcción que determina s, t a partir de u, v. Según la definición de congruencia de segmentos no euclidianos en el modelo de Poincaré (véase el § 52), si el segmento no euclidiano uv es congruente del $u'v'$, existe una sucesión de inversiones cuyo producto lleva los puntos u, v, s, t en u', v', s', t'. Como se mostró en el § 51, el producto de cualquier número de inversiones representa una transformación lineal fraccional bien de primera especie, bien de segunda; en ambos casos la transformación es no degenera-

da, pues cada inversión aplica puntos diferentes en puntos diferentes. En el primer caso, tenemos que $(u'v's't') = (uvst)$ (véase el § 55), y en el segundo, $(u'v's't') = \overline{(uvst)}$ (véase el § 56). Pero más arriba, en esta misma sección, mostramos que $(uvst)$ es un número real; por ende, $\overline{(uvst)} = (uvst)$. Así, pues, en ambos casos $(u'v's't') = (uvst)$. De aquí y de la fórmula (11) nos queda que $\rho(u'v') = \rho(uv)$. Obsérvese, por último, que $(uvst) \neq 1$ (cosa que sigue de inmediato de (9) y (10)), por lo cual $\ln(uvst) \neq 0$ y $\rho(uv) > 0$. De esta manera, la fórmula (11) pone en correspondencia a cada segmento no euclidiano un número positivo, de forma que a segmentos congruentes les correspondan números iguales. Queda, así, satisfecha la primera condición de la definición 12 del § 20.

2. Sea w un punto arbitrario del interior del segmento no euclidiano uv (figs. 76, 77). Un cálculo sencillo muestra que

$$(uvst) = (uwst)(wvst)$$

y que los números $(uwst)$ y $(wvst)$ son o bien ambos mayores que la unidad, o bien ambos menores que ésta (aquí lo más fácil es recurrir a las fórmulas (9) y (10)). De aquí sigue que

$$\ln(uvst) = \ln(uwst) + \ln(wvst),$$

siendo ambos logaritmos del segundo miembro positivos, o bien ambos negativos. Por consiguiente,

$$|\ln(uvst)| = |\ln(uwst)| + |\ln(wvst)|$$

y la fórmula (11) nos da:

$$\rho(uv) = \rho(uw) + \rho(wv).$$

Vemos, así, que se satisface la segunda condición de la definición 12 del § 20.

3. Si el punto v sobre la recta no euclidiana tiende al punto u, entonces $(uvst) \to 1$; si el punto v tiende al punto t, será $(uvst) \to 0$ (véanse la fig. 76 y la fórmula (9), donde r_1, r_2, r_3, r_4 denotan las distancias euclidianas entre los puntos u y s, u y t, v y s, v y t). En el primer caso $\ln(uvst) \to 0$, en el segundo $\ln(uvst) \to -\infty$; consecuentemente, en el primer caso será $\rho(uv) \to 0$, en el segundo, $\rho(uv) \to +\infty$.

De la fórmula (11) se aprecia que $\rho(uv)$ depende continuamente del punto v. De aquí y del razonamiento precedente sigue que $\rho(uv)$ toma todos los valores entre 0 y $+\infty$; en particular, existirá un par de puntos u, v para el cual $\rho(uv) = 1$. Esto significa que también la tercera condición de la definición 12, § 20, se satisface.

Hemos demostrado, pues, que el número $\rho(uv)$, puesto en correspondencia a un par arbitrario de puntos u, v según la fórmula (11), es la longitud del segmento no euclidiano uv (en alguna escala) o, dicho de otra forma, la distancia no euclidiana entre los puntos u y v.

Si el segmento unitario u_1v_1 se determina de antemano, la constante R en la fórmula (11) debe ser fijada para que se cumpla la igualdad $\rho(u_1v_1) = 1$.

§ 59. Ahora obtendremos la célebre fórmula de Lobachevski, que expresa la función $\Pi(x)$ por medio de funciones elementales del argumento x. Recuerde el lector que $\alpha = \Pi(x)$ denota el ángulo de paralelismo correspondiente a un segmento de longitud x (véanse el § 33 y la fig. 46). Como en esta sección hemos denotado con x las abscisas de los puntos del modelo de Poincaré, a fin de evitar equivocaciones denotaremos ahora por l el argumento de la función de Lobachevski.

El ángulo de paralelismo que corresponde a un segmento se determina por la

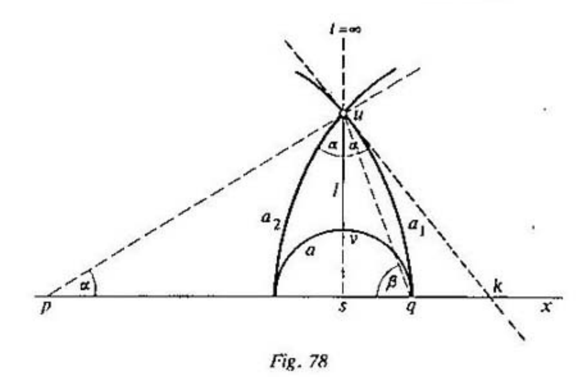


Fig. 78

longitud de este segmento y no depende de su posición; por esto, para deducir la fórmula que buscamos podemos tomar un segmento no euclidiano en el modelo de Poincaré de manera que los razonamientos ulteriores resulten lo más sencillos posibles. Teniendo esto presente, consideraremos un segmento no euclidiano que se represente en el modelo de Poincaré como un segmento de recta euclidiana perpendicular al eje x. Sean u y v los extremos del segmento en cuestión, y s, el punto de intersección de la recta uv con el eje x (fig. 78); admitiremos que el punto u se encuentra, en nuestro modelo, por encima del punto v. Supondremos, además, que la distancia euclidiana de v al eje x es igual a la unidad. Los demás elementos que necesitaremos se especifican en la fig. 78. Aquí hemos denotado con a la semicircunferencia que representa la recta no euclidiana perpendicular al segmento uv en su extremo v; con a_1 y a_2, las semicircunferencias representantes de las rectas no euclidianas que pasan por u y son paralelas a la recta no euclidiana a; p es el centro de la semicircunferencia a_1; q, el extremo (derecho) común de las semicircunferencias a y a_1; α denota cada uno de los ángulos que forman las semicircunferencias a_1 y a_2 con el segmento uv; como en el modelo de Poincaré la magnitud no euclidiana de un ángulo coincide con su magnitud euclidiana, α es el ángulo de paralelismo que corresponde al segmento uv. Sea l la longitud no euclidiana del segmento uv; nuestra finalidad es expresar α en función de l.

Sea h la distancia euclidiana entre los puntos u y s; entonces $u - s = h$, $v - s = 1$ y tenemos, en virtud de la fórmula (11),

$$l = R\,|\ln(uvs\infty)| = R\left|\ln\frac{u-s}{v-s}\right| = R\,|\ln h|.$$

Como $h > 1$, $\ln h > 0$, de modo que

$$l = R\ln h. \tag{12}$$

Obsérvese, ahora, que $\angle\, upq = \alpha$ (para comprobarlo, basta tomar en consideración que α es el ángulo entre el segmento uv y la semicircunferencia a_1, es decir, el ángulo entre el segmento uv y la tangente uk a la semicircunferencia a_1; claramente, $\angle\, upq = \angle\, suk$, pues estos ángulos son agudos y $us \perp pq$, $uk \perp up$). Ahora

bien, como el triángulo upq es isósceles, $\angle upq = \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$. Considerando el triángulo usq, hallamos:

$$h = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}. \tag{13}$$

De las fórmulas (12) y (13) sigue que

$$l = R \ln \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

por lo cual

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} e^{-l/R}.$$

Pero $\alpha = \Pi(l)$; consecuentemente,

$$\Pi(l) = 2 \operatorname{arctg} e^{-l/R}. \tag{14}$$

Esta es, precisamente, la fórmula de Lobachevski que nos propusimos deducir; esta fórmula juega un papel fundamental en la geometría de Lobachevski, pues da una expresión exacta del ángulo de paralelismo correspondiente a un segmento de longitud l.

§ 60. Consideraremos segmentos del plano de Lobachevski cuya longitud no supera algún número positivo L. Hagamos

$$\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} e^{-L/R};$$

entonces, si $l \leqslant L$, tendremos:

$$\alpha_0 \leqslant \Pi(l) < \pi/2.$$

La magnitud α_0 puede ser tan próxima a $\pi/2$ como se desee, si R es suficientemente grande en comparación con L. Consecuentemente, para todos los segmentos de longitud $l \leqslant L$ el ángulo de paralelismo $\Pi(l)$ será próximo a $\pi/2$. En otras palabras, si se observa alguna parte del plano de Lobachevski en donde las distancias entre todos los puntos no superan L, el carácter no euclidiano de dicho plano se revelará en tanto menor grado, cuanto mayor sea R en comparación con a L. En virtud de esto, el número R puede ser considerado como la «medida de no euclidianidad» del plano de Lobachevski; un segmento de longitud se llama radio de curvatura del plano de Lobachevski. El número R depende, por supuesto, de la elección de la escala; en una elección adecuada se puede obtener, en particular, $R = 1$. Sin embargo, el radio de curvatura para cada modelo concreto de la geometría de Lobachevski representa un segmento bien determinado, salvo desplazamientos congruentes. Por ejemplo, para el modelo de Poincaré el radio de curvatura es un segmento uv que satisfaga la condición $\ln(uvst) = 1$. Una descripción general del radio de curvatura, es decir, una descripción que no dependa de la elección de un modelo de la geometría de Lobachevski, puede encontrarse en el § 216.

§ 61. En el presente parágrafo estableceremos las relaciones básicas de la trigonometría de Lobachevski, suponiendo, como arriba, que el plano de Lobachevski se representa con el modelo de Poincaré.

Sea ABC un triángulo arbitrario. Sean α, β, γ las magnitudes de sus ángulos en los vértices A, B, C, y a, b, c, las longitudes no euclidianas de los lados BC, AC, AB.

Utilizando un desplazamiento congruente, situemos este triángulo relativamente

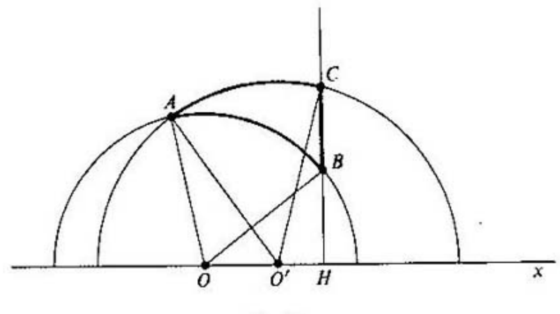


Fig. 79

a los ejes cartesianos del modelo, de forma que la recta no euclidiana BC se represente por una semirrecta euclidiana perpendicular al eje Ox. Sea H el punto donde esta semirrecta se apoya en el eje Ox (fig. 79). Las rectas no euclidianas AB y AC se representarán por ciertas semicircunferencias euclidianas con centro sobre el eje Ox; sean O y O' sus centros. Sin restringir la generalidad, podemos suponer que B está entre H y C. Entonces,

$$a = R \ln \frac{HC}{HB}, \tag{1}$$

donde HC y HB son las longitudes euclidianas de los segmentos (esta fórmula se demuestra igual que la (12) del § 60). Los razonamientos que siguen se basan en la fórmula (1).

Ante todo, obtendremos *la expresión de los lados del triángulo en función de sus ángulos**). De (1) sigue que

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{HC}{HB} + \frac{HB}{HC}\right) = \frac{HB^2 + HC^2}{2HB \cdot HC}. \tag{2}$$

Se tienen las relaciones euclidianas evidentes:

$$HB^2 = OB^2 - OH^2 = OA^2 - OH^2,$$
$$HC^2 = O'C^2 - O'H^2 = O'A^2 - O'H^2.$$

De aquí sigue que

$$HB^2 + HC^2 = (OA^2 + O'A^2) - (OH^2 + O'H^2) =$$
$$= (OO'^2 + 2OA \cdot O'A\cos(\angle OAO')) - [(OH - O'H)^2 + 2OH \cdot O'H] =$$
$$= 2OB \cdot O'C\cos(\angle OAO') - 2OH \cdot O'H; \tag{3}$$

*) La deducción que se presenta aquí de las fórmulas de la trigonometría de Lobachevski fue comunicada al autor, para la cuarta edición de este libro, por el matemático vietnamita Ngüen Kan Toan.

para simplificar, los razonamientos se efectúan aplicados a la fig. 79, donde O' está entre O y H. Las igualdades (2) y (3) nos dan

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{OB}{HB}\cdot\frac{O'C}{HC}\cos(\angle OAO') - \frac{OH}{HB}\cdot\frac{O'H}{HC}. \tag{4}$$

Obsérvese, ahora, que

$$\frac{OB}{HB} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\angle BON)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}, \qquad \frac{O'C}{HB} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\angle CO'H)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma},$$

$$\angle OAO' = \alpha, \qquad \frac{OH}{HB} = \operatorname{ctg}(\angle BOH) = \operatorname{ctg}\beta,$$

$$\frac{O'H}{HC} = \operatorname{ctg}(\angle CO'H) = \operatorname{ctg}(\pi - \gamma) = -\operatorname{ctg}\gamma.$$

De la igualdad (4) y de las últimas expresiones hallamos, por último,

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}. \tag{I}$$

Las otras fórmulas que expresan las longitudes no euclidianas de los lados b y c se obtienen de (I) por permutación cíclica de los símbolos α, β, γ.

La fórmula (I) expresa un lado de un triángulo en función de sus ángulos. La existencia de tal fórmula significa que en la geometría de Lobachevski un triángulo se determina por sus ángulos; esto, a su vez, implica que en dicha geometría no hay semejanza de figuras. Es natural, por esto, que en la geometría euclidiana no existe una fórmula análoga a la (I).

De la fórmula (I) es fácil deducir *las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo no euclidiano, que corresponden al teorema euclidiano de los senos.* En efecto,

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{R}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{a}{R} - 1}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\sqrt{(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 - \operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma}}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}. \tag{5}$$

Haciendo

$$Q = (\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 - \operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1,$$

podemos ver que esta expresión es simétrica con respecto a α, β, γ. En consecuencia, el segundo miembro de (5) posee también tal simetría, de forma que tendremos:

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{R}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{R}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{R}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\sqrt{Q}}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}. \tag{II}$$

De la fórmula (I) pueden obtenerse, asimismo, *expresiones para los ángulos de un triángulo en función de sus lados*. Escribamos, con este fin, las igualdades

$$\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \frac{(\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha)(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma},$$

$$\operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha = \frac{Q\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}.$$

De aquí sigue que

$$\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha =$$

$$= \frac{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha + (1-\cos^2\alpha)\cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}.$$

Tiene, así, lugar la fórmula

$$\cos\alpha = \left(\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{ch}\frac{a}{R}\right)\cdot\left(\operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\right)^{-1}. \qquad \text{(III)}$$

Comparando (I) y (III) puede apreciarse que en la geometría de Lobachevski existe una dependencia determinada entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Hallemos ahora las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Para esto, basta hacer en las fórmulas de tipo (I), (II), (III), por ejemplo, $\gamma = \pi/2$. Obtenemos, así

1) *la dependencia entre un cateto, la hipotenusa y uno de los ángulos agudos*:

$$\operatorname{sh}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{c}{R}\operatorname{sen}\alpha, \qquad \operatorname{th}\frac{a}{R} = \operatorname{th}\frac{c}{R}\cos\beta;$$

2) *la dependencia entre dos catetos y un ángulo agudo*:

$$\operatorname{th}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{tg}\alpha;$$

3) *la dependencia entre la hipotenusa y los catetos* (el análogo del teorema de Pitágoras):

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}\operatorname{ch}\frac{b}{R}.$$

Destaquemos, además, las dos relaciones siguientes:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta, \qquad \operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Estas expresan un lado de un triángulo rectángulo en función de los ángulos y no tienen, por esto, análogos en la geometría euclidiana.

§ 62. Cambiando la escritura de la fórmula (III), obtenemos:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha; \qquad \text{(A)}$$

presentada así, la fórmula expresa un lado de un triángulo no euclidiano arbitrario en función de los otros dos y del coseno del ángulo opuesto.

Comparemos la última relación con la conocida fórmula de la trigonometría esférica

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos\alpha, \qquad \text{(B)}$$

donde R es el radio de la esfera. Esta fórmula, más las otras dos que se obtienen por permutación cíclica de lados y ángulos, permiten deducir las restantes fórmulas de la trigonometría esférica.

La fórmula (B) se transforma en la (A) si se cambia R por $Ri(i = \sqrt{-1})$. Teniendo esto presente, se dice que *la trigonometría de Lobachevski se puede considerar como la trigonometría sobre una esfera de radio imaginario.*

Las fuentes profundas de la relación de la geometría de Lobachevski con la de la esfera (así como también con la geometría de Riemann, que se expone en la sección siguiente) serán esclarecidas con todo detalle en el capítulo VIII.

11. Breves nociones sobre la geometría de Riemann

§ 63. En las secciones precedentes hemos hecho referencia más de una vez a la geometría esférica, conjuntamente con las geometrías de Euclides y Lobachevski. La confrontación de estas geometrías surgió de manera natural cuando descubrimos que tenían similitudes (como en los §§ 48, 62), o cuando las considerábamos desde algún punto de vista general (como en los §§ 45 — 47). Pero ahora debemos llamar la atención del lector sobre una diferencia muy importante que existe entre la geometría esférica, por un lado, y las de Lobachevski y Euclides, por el otro. Precisamente, en el plano de Euclides, al igual que en el de Lobachevski, dos rectas pueden tener NO MÁS DE UN PUNTO común; por el contrario, en la geometría sobre la esfera, donde las circunferencias máximas hacen las veces de rectas (véase el § 45), dos «rectas» (es decir, dos circunferencias máximas) siempre se cortan en dos puntos diametralmente opuestos de la esfera. Así, en la geometría esférica no se cumple una de las premisas básicas de las geometrías de Euclides y Lobachevski: la de que por dos puntos diferentes pasa una única recta.

Existe un sistema geométrico que en varias relaciones es similar a la geometría esférica, pero en el cual la premisa básica citada de la geometría elemental tiene LUGAR. Dicho sistema se llama *geometría de Riemann* (que ya fue citada en el § 10). Esta geometría es un complemento necesario de las de Euclides y Lobachevski. El estudio conjunto de las tres permitió dar una solución completa de uno de los problemas geométricos principales del siglo XIX (véanse los caps. VI — IX). La esencia de la geometría de Riemann es expuesta en los parágrafos que siguen.

§ 64. Fijemos en el espacio euclidiano una esfera arbitraria k. Convendremos en «identificar» los puntos diametralmente opuestos de ésta, es decir, considerar cada par de puntos diametralmente opuestos de k como un objeto único. Este objeto se llamará «punto» de cierta geometría particular, que pasaremos referir. Convendremos en llamar «recta» a cada circunferencia máxima de la esfera k.

Diremos que el «punto» A está en la «recta» a (o que la «recta» a pasa por el «punto» A) si los puntos ordinarios de la esfera k que constituyen el «punto» A están en la circunferencia máxima que representa a la «recta» a. Evidentemente,

1) por cada dos «puntos» pasa una «recta»,

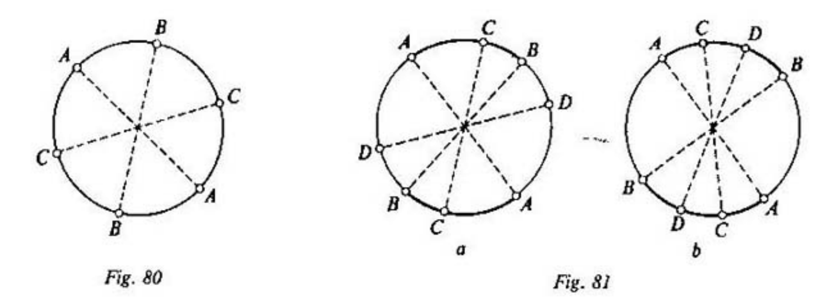


Fig. 80 *Fig. 81*

2) por cada dos «puntos» diferentes pasa UNA ÚNICA «recta» *),

3) en cada «recta» hay al menos dos «puntos» (incluso hay una cantidad infinita de «puntos»); se pueden indicar tres «puntos» que no estén sobre una misma «recta».

Así, para el conjunto considerado de «puntos» y «rectas» se observan todos LOS AXIOMAS DE INCIDENCIA de la planimetría elemental (véanse § 12, axiomas I,1, I,2, I,3). Por el contrario, LOS AXIOMAS DE ORDEN, en la forma que fueron enunciados para la geometría elemental, son aquí inaplicables. Es que en estos axiomas se caracteriza el concepto de posición de un punto ordinario entre otros dos puntos ordinarios, sobre una recta ordinaria. Pero para nuestros «puntos» convencionales sobre una «recta» convencional, el concepto «entre» carece de sentido. En efecto, al considerar tres «puntos» arbitrarios A, B, C en una «recta» (es decir, tres pares de puntos diametralmente opuestos de una circunferencia; fig. 80), no podremos distinguir en su posición relativa alguno de ellos con respecto a los otros.

Para estudiar el orden de nuestros «puntos» convencionales sobre una «recta», deben tomarse CUATRO «puntos». Sean A, B, C, D cuatro «puntos» de alguna «recta»; supondremos que están numerados en el orden de su escritura (independientemente de su posición sobre la «recta»). Son posibles dos casos esencialmente diferentes en la posición de los «puntos» A, B, C, D con respecto a su numeración: 1) los dos primeros «puntos» A y B separan los dos últimos C y D (en cuyo caso C y D separan A y B, fig. 81, *a*); 2) los dos primeros «puntos» A y B no separan los dos últimos C y D (entonces C y D tampoco separan A y B, fig. 81, *b*). Análogamente, si a, b, c, d son cuatro «rectas» que pasan por un mismo «punto» y están numeradas en el orden de su escritura, son posibles dos casos en su posición relativa: 1) las «rectas» a, b separan las c, d (en cuyo caso c, d separan a, b; fig. 82, *a*); las «rectas» a, b no separan c, d (y entonces c, d tampoco separan a, b; fig. 82, *b*). Adoptaremos el concepto de separación de «puntos» y «rectas» como básico; los demás conceptos referentes al orden de posición de «puntos» en una «recta» y «rectas» que pasan por un «punto» se reducirán a este concepto básico.

Sean A y B dos «puntos» arbitrarios de alguna «recta» u; entonces todos los «puntos» de la «recta» u, excepción hecha de A y B, pueden ser separados de mane-

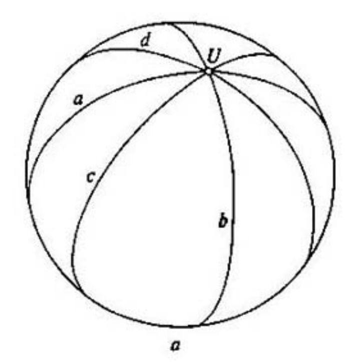
*) Cada «punto» A es un par *no ordenado* (es decir, un conjunto) $\{x, x'\}$ de puntos diametralmente opuestos. Por ello, los «puntos» $\{x, x'\}$ y $\{x', x\}$ coinciden, de modo que el hecho que por ellos pasen una cantidad infinita de «rectas» no contradice 2). (*N. del Tr.*)

ra única en dos clases de manera que dos «puntos» cualesquiera de una misma clase no separan A y B, mientras que dos «puntos» arbitrarios de clases diferentes separan A y B. En correspondencia con esto, convendremos en decir que los «puntos» A, B determinan sobre la «recta» u dos «segmentos»; consideraremos puntos interiores de un «segmento» a los «puntos» de una de las dos clases precitadas, y puntos interiores del otro, a los «puntos» de la otra clase [en las figs. 81, a), 81, b), uno de los dos segmentos determinados por los «puntos» A, B se representa por dos arcos en línea gruesa; en la fig. 81, a) C es un punto interior de este «segmento», mientras que D es «punto» interior del otro «segmento»; en la fig. 82, b), tanto C como D son «puntos» interiores de un mismo «segmento»].

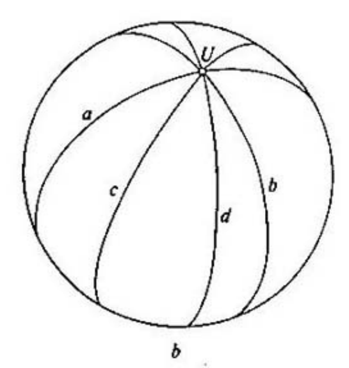
Con respecto a «rectas» que pasan por un «punto», pueden ser enunciados conceptos análogos. Precisamente, si a y b son dos «rectas» que pasan por algún «punto» U, todas las «rectas» que pasan por U, exceptuando a y b, pueden ser divididas de manera única en dos clases, de manera que dos «rectas» cualesquiera de una misma clase no separan a y b, mientras que dos «rectas» arbitrarias de clases diferentes separan a y b. De acuerdo con esto, convendremos en decir que las «rectas» a y b determinan DOS «ángulos» con vértice U. Consideraremos «rectas» interiores de uno de los «ángulos» a las «rectas» de una de las dos clases antedichas, y «rectas» interiores del otro, a las «rectas» de la otra clase.

Luego de esto se definen de manera natural un triángulo, los ángulos internos de éste, el dominio interior de un triángulo, el de un polígono, un polígono simple (sin autointersecciones), los ángulos internos de un polígono simple, y toda una serie de conceptos utilizados en la geometría elemental.

Convendremos, por último, en llamar dos «segmentos» congruentes, si existe un movimiento de la esfera k sobre sí misma, o bien una reflexión especular de ésta con respecto a alguno de sus planos diametrales, que superpone uno de estos «segmentos» al otro (es decir, los puntos extremos e interiores de un segmento se superponen a los puntos extremos e interiores, respectivamente, del otro). Análogamente se define la congruencia de «ángulos» y de figuras arbitrarias (una figura M, como conjunto de «puntos» y «rectas» se considera congruente a otra figura M', si entre los «puntos» de éstas, así, como también entre sus «rectas», se puede establecer una



a



b

Fig. 82

correspondencia biyectiva de manera que como resultado de algún movimiento de la esfera k sobre sí misma, o de una reflexión especular con respecto a algún plano diametral, todos los «puntos» y «rectas» de la figura M se superpongan a los «puntos» y «rectas» correspondientes de M').

Estamos considerando, así: 1) relaciones de incidencia de «puntos» y «rectas», 2) relaciones de orden de «puntos» sobre una «recta» arbitraria y de «rectas» que pasan por un «punto» arbitrario, 3) relaciones de congruencia de «segmentos», «ángulos» y otras figuras. El sistema de teoremas que se refiere a estas relaciones se llama *geometría de Riemann*; el conjunto de «puntos» y «rectas», según el sentido conferido más arriba, que se hallen en las relaciones indicadas, se denomina *plano de Riemann*. Todos los teoremas de la geometría de Riemann representan teoremas de la geometría euclidiana, adecuadamente interpretados, por cuanto los «puntos» y las «rectas» del plano de Riemann son objetos euclidianos.

§ 65. Señalemos algunas proposiciones de la geometría de Riemann. Ante todo, como ya fue indicado, en esta geometría se realizan todos los tres axiomas de incidencia de la planimetría euclidiana; en particular, dos diferentes puntos cualesquiera determinan una recta y sólo una que pasa por ellos. Por otra parte, en la geometría de Riemann tiene lugar una proposición que no existe ni en la de Euclides, ni en la de Lobachevski, precisamente: cada dos rectas diferentes tienen un (único) punto (esto es claro, pues cada dos circunferencias máximas de la esfera tienen un par de puntos diametralmente opuestos de intersección). Dicho de otro modo, en el plano riemanniano no hay rectas paralelas. Así, mientras en la geometría euclidiana tiene lugar el postulado sobre la unicidad de la recta que pase por un punto dado y no corte a una recta dada, y en la de Lobachevski se adopta una de las premisas que niegan este postulado —se asume que existe una cantidad infinita de estas rectas— , en la geometría de Riemann se realiza la otra premisa que lo niega: en esta geometría toda recta corta a cualquier otra.

La disposición de las rectas en el plano de Riemann difiere radicalmente de la disposición de rectas en el plano de Euclides, o en el de Lobachevski, todavía por un motivo más: una recta no divide el plano de Riemann en dos partes. Esto significa que cualesquiera que sean la recta a y dos puntos A y B que no le pertenezcan, siempre se pueden unir A y B con un segmento que no corte a la recta a (fig. 83).

En la geometría de Riemann se definen de manera natural la comparación de segmentos (entre sí) y de ángulos (entre sí), así como también la medición de segmentos y ángulos (véase los §§ 18, 20, 21, donde estos conceptos fueron establecidos para la geometría euclidiana). Con esto surge la posibilidad de enunciar y demostrar teoremas concernientes a las relaciones entre las magnitudes geométricas, análogas en una u otra forma a los conocidos teoremas de Euclides y Lobachevski.

Resulta interesante comparar en las geometrías de Euclides, Lobachevski y Riemann la proposición que se refiere a la suma de los ángulos internos de un triángulo: en la de Euclides, esta suma es igual a dos rectos, en la de Lobachevski, es menor que dos rectos, en la de Riemann, mayor que dos rectos. Para verificar esto último, es decir, que en el plano de Riemann la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que dos rectos, basta observar que las rectas del plano riemanniano son circunferencias máximas de alguna esfera, y como un triángulo esférico tiene suma de ángulos internos mayor que dos rectos, un triángulo en el plano de Riemann tendrá la misma propiedad.

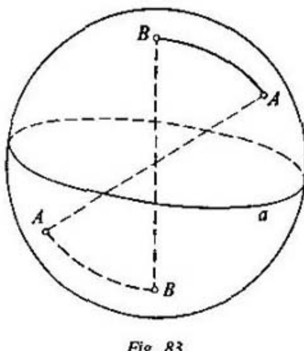


Fig. 83

Digamos, por último, que las relaciones métricas en la geometría de Riemann se expresan por fórmulas de la geometría esférica, adecuadamente interpretadas (lo cual es comprensible, pues cada figura M del plano de Riemann representa un par de figuras M_1 y M_2 de alguna esfera, situadas simétricamente con respecto al centro de ésta, y cada par de puntos diametralmente opuestos de las figuras M_1 y M_2 se considera como un punto de la figura M; por esto, cada relación métrica entre los elementos de M coincide con una relación métrica entre los elementos correspondientes de la figura M_1, o bien de la M_2). Así, por ejemplo, en el plano riemanniano, un lado a de un triángulo se expresa en función de los otros dos lados b, c y el ángulo opuesto α por la fórmula

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos\alpha,$$

pues esta fórmula expresa el lado de un triángulo sobre una esfera de radio R (véase el § 62). Aquí se sobreentiende que el plano riemanniano fue obtenido identificando los puntos diametralmente opuestos DE LA MISMA esfera (de radio R). Es fácil comprender que el número R tendrá que figurar, asimismo, en otras fórmulas métricas, que se refieren al mismo plano riemanniano. Evidentemente, este número (en una escala prefijada) caracteriza al plano riemanniano, al igual que a la esfera utilizada para definir este plano. Es evidente, también, que cuanto mayor sea R en comparación con las dimensiones de alguna porción del plano de Riemann, tanto menos se distinguirán por sus propiedades las figuras que se encuentren en esa porción, de las figuras euclidianas. Por esto, el número R puede considerarse la «medida de no euclidianidad» del plano riemanniano. Un segmento de longitud R que se encuentre en este plano (es decir, un segmento entendido en el sentido de la geometría de Riemann) lleva el nombre de su *radio de curvatura*.

§ 66. Como ya indicamos más arriba, todos los teoremas de la geometría de Riemann representan teoremas de la geometría euclidiana, intepretados adecuadamente. Por esto, los teoremas de la geometría riemanniana se deducen de los axiomas de la euclidiana. Por supuesto, no todos los teoremas de esta última admiten una interpretación como teoremas de la geometría de Riemann; la mayoría de

los teoremas euclidianos no guarda relación alguna con los objetos que hemos llamado puntos y rectas del plano riemanniano.

Así, entonces, para obtener los teoremas de la geometría de Riemann a partir de los axiomas de la de Euclides, deben hacerse algunas deducciones PARTICULARES de estos axiomas.

Es posible, sin embargo, basar la geometría de Riemann en un sistema particular de axiomas, es decir, una serie de proposiciones (referentes a los conceptos de incidencia, orden y congruencia de los objetos del plano riemanniano), de las cuales puedan deducirse, de manera lógica, todas las demás proposiciones de dicha geometría, de manera que cada deducción conducirá a algún teorema de esta geometría.

Es este caso, al demostrar los teoremas de la geometría de Riemann se hacen indiferentes todas las propiedades de sus objetos, con excepción de las que se mencionan en los axiomas. Esta fundamentación axiomática de la geometría de Riemann la transforma en un sistema geométrico abstracto. Entendiendo por «punto» y «recta» a objetos arbitrarios, por «están en», «separan», «congruentes» a relaciones arbitrarias entre ellos, que satisfagan los axiomas, obtendremos diversos MODELOS concretos de la geometría abstracta de Riemann. Cada sistema de objetos cuyas relaciones mutuas satisfagan los axiomas de dicha geometría puede ser llamado *plano riemanniano*. Así, la esfera con los puntos antipodales identificados viene a ser uno del conjunto de los diferentes planos de Riemann.

§ 67. No vamos a enumerar los axiomas de la geometría de Riemann *). Con todo, podremos ilustrar fácilmente al lector la posibilidad de presentar diversas interpretaciones de la geometría de Riemann, construyendo un nuevo modelo de ésta. Los objetos de este modelo se encontrarán en correspondencia determinada con los del modelo en la esfera, que ya conocemos, en virtud de lo cual quedará claro, sin remitirnos a los axiomas, que ambos modelos realizan una misma geometría.

Construiremos el nuevo modelo utilizando también el espacio euclidiano.

Ante todo, completemos el conjunto de elementos del espacio euclídeo con elementos nuevos, que llamaremos *puntos del infinito*. La naturaleza de estos nuevos elementos será para nosotros indiferente, pero, al introducirlos, supondremos que se encuentran en correspondencia determinada con elementos dados inicialmente. Precisamente, suponemos que:

1) a cada recta a se le ha puesto en correspondencia *un* elemento nuevo, llamado punto del infinito de dicha recta;

2) rectas paralelas tienen un punto del infinito común;

3) los puntos del infinito de rectas no paralelas son diferentes.

El conjunto de todos los puntos del infinito de un plano arbitrario (es decir, el conjunto de los puntos del infinito de todas las rectas de dicho plano) se supondrá dispuesto sobre una nueva recta de éste, la recta del infinito. El conjunto de todos los puntos del infinito del espacio se considerará como un nuevo plano, el plano del infinito. Los elementos del infinito con estas propiedades se introducen en la geometría proyectiva. Por esto, el espacio completado con los elementos del infinito

---

*) Uno de los posibles sistemas de axiomas se encuentra en el libro de *S. A. Bogomólov* «Introducción a la Geometría no euclidiana de Riemann» (*С. А. Богомолов*, Введение в неевклидову геометрию Римана).

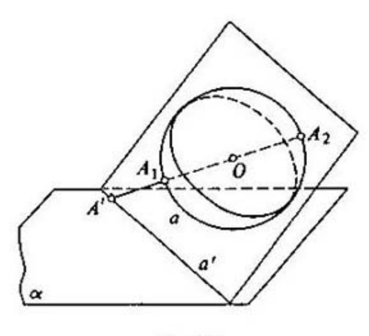


Fig. 84

que verifican las propiedades indicadas se denomina espacio proyectivo; el plano completado con los elementos del infinito bajo las mismas condiciones se llama plano proyectivo (véanse los §§ 80 — 82).

Consideraremos elementos del nuevo modelo a los puntos y rectas de algún plano α (entre ellos, sus puntos del infinito y la recta del infinito). El término «un punto está sobre una recta» se interpretará en el sentido habitual. Entonces:

1) se observan todos los tres axiomas de incidencia de la planimetría elemental;

2) dos rectas cualesquiera se cortan (posiblemente en un punto del infinito).

En consecuencia, para los puntos y rectas del nuevo modelo las relaciones de incidencia satisfacen las mismas condiciones básicas que tienen lugar en el modelo esférico, considerado más arriba. Ahora definiremos en nuestro nuevo modelo las relaciones de orden y de congruencia. Con este fin, tomemos alguna esfera, que denotaremos por k; sea O su centro (fig. 84). Supongamos que el punto O no está en el plano α. Tracemos por O una recta arbitraria; ésta cortará a α en algún punto A', posiblemente un punto del infinito, y a la esfera k en un par de puntos diametralmente opuestos A_1, A_2. Considerando al par A_1, A_2 como un único punto del modelo de la geometría riemanniana en la esfera k, denotemos a este par con A. Convendremos en decir que A' es la proyección de A (o bien que A es la proyección de A'). Sea a alguna circunferencia máxima de la esfera k; resulta evidente que todos los pares de puntos diametralmente opuestos de a tienen sus proyecciones en el plano α dispuestas sobre una recta determinada a' (que puede resultar la recta del infinito). Convendremos en decir que a' es la proyección de a (o bien que a es la proyección de a'). Le pondremos en correspondencia a cada par de puntos diametralmente opuestos de la esfera k, es decir, a cada punto del modelo de la geometría de Riemann sobre esta esfera, su proyección sobre el plano α. Pondremos en correspondencia, asimismo, a cada circunferencia máxima de k, su proyección en el plano α; en otras palabras, a cada recta del modelo de la geometría riemanniana en la esfera k le ponemos en correspondencia una recta del plano α. Es fácil comprobar que cada una de estas correspondencias es biyectiva. Es claro, también, que si un punto A del modelo de la geometría riemanniana en la esfera k pertenece a la recta a del mismo modelo, entonces en el plano α el punto A', correspondiente a A, pertenece a la recta a', correspondiente a a.

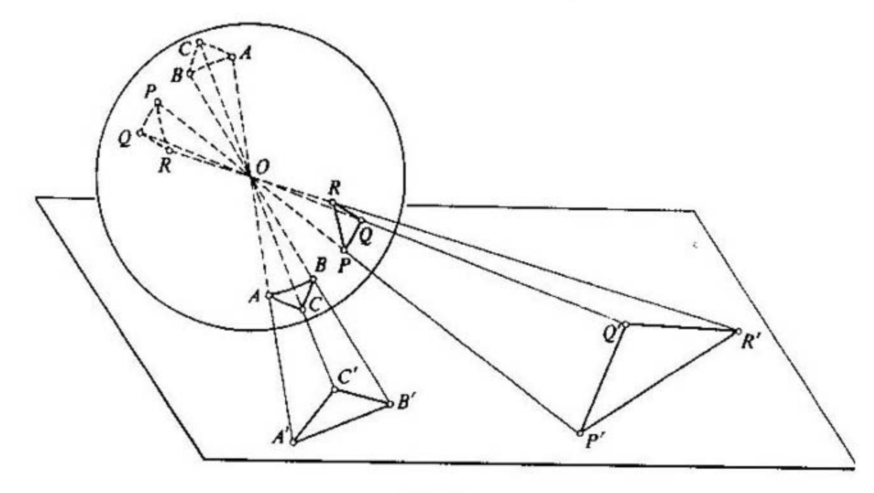


Fig. 85

Sean, ahora, A', B', C', D' cuatro puntos de α, pertenecientes a una recta u' de este plano, y A, B, C, D, los puntos que les corresponden en el modelo de geometría de Riemann en la esfera k, pertenecientes a la recta u de este modelo (u y u' se corresponden). Convendremos en decir que 1) los puntos A', B' separan a C', D' en la recta u' del plano α, si A, B separan a C, D en la recta u; 2) los puntos A', B' no separan a C', D' en la recta u' de α, si A, B no separan a C, D en la recta u. Análogamente, si a', b', c', d' son cuatro rectas del plano α que pasan por un punto U', y a, b, c, d son las rectas correspondientes del modelo sobre la esfera k, que pasan por el punto U de dicho modelo, diremos que: 1) las rectas a', b' separan a c', d' en el plano α, si a, b separan a c, d; 2) las rectas a', b' no separan a c', d' en el plano α, si a, b no separan a c, d. Quedan así definidas la relación de orden de puntos sobre una recta arbitraria de α y la relación de orden de rectas del plano α que pasan por algún punto de dicho plano.

Por último, convendremos en decir que dos figuras del plano α son congruentes, si lo son sus proyecciones en la esfera k.

Hemos definido, así, para los objetos del nuevo modelo, las relaciones de incidencia, orden y congruencia; los objetos del nuevo modelo se encuentran en las mismas relaciones mutuas que los objetos correspondientes de la geometría de Riemann sobre la esfera k. De aquí se desprende que cada proposición referente a incidencia, orden y congruencia de objetos del modelo de la geometría riemanniana sobre la esfera k será verdadera para los objetos del nuevo modelo en el plano proyectivo; recíprocamente, cada proposición relativa a incidencia, orden y congruencia de los objetos del nuevo modelo, será válida para el modelo de la geometría de Riemann sobre k. Ambos modelos, pues, realizan de manera diferente la misma geometría riemanniana.

Desde el punto de vista intuitivo, el modelo de geometría de Riemann en el plano proyectivo tiene ventajas sobre el modelo de una esfera con puntos antipodales identificados, en todos los casos en que se discuta la incidencia y el orden de los objetos, por cuanto en el plano proyectivo los puntos y las rectas se representan de manera habitual. En cambio, el modelo del plano proyectivo es desventajoso cuando se considera la congruencia de figuras, pues las figuras del modelo sobre el plano proyectivo, congruentes en el sentido de la geometría proyectiva, no lo son en el sentido habitual (véase la fig. 85, donde se representan los triángulos congruentes ABC y PQR en el modelo de la geometría riemanniana correspondiente a una esfera con puntos antipodales identificados, y los triángulos, también congruentes, $A'B'C'$, $P'Q'R'$ que les corresponden en el modelo de la geometría de Riemann sobre el plano proyectivo).

§ 68. Toda la exposición precedente se refirió a la geometría bidimensional de Riemann. Un modelo de la geometría tridimensional de Riemann puede obtenerse identificando los puntos antipodales de una esfera tridimensional en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones *).

Sin recurrir al espacio de cuatro dimensiones, puede obtenerse un modelo de la geometría de Riemann tridimensional, recurriendo a la geometría proyectiva (véase el cap. VI, donde se expone la construcción de modelos proyectivos de la geometría bidimensional de Lobachevski y la geometría de Riemann de dos dimensiones. Dichas construcciones se generalizan directamente al caso tridimensional.)

---

*) El concepto de espacio euclidiano multidimensional se expone en el cap. VII; véase también la primera edición de este libro. El lector puede encontrar una exposición de la geometría de Riemann por el método de coordenadas en el libro de *F. Klein* «Geometría no Euclidiana» (*F. Klein*, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Ed. Springer-Verlag, 1928, reed. 1967.)

Capítulo IV

ANÁLISIS DE LOS AXIOMAS DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL

1. Los tres problemas básicos de la axiomática

§ 69. En el capítulo anterior demostramos que la consistencia de la geometría euclidiana implica la consistencia de la geometría de Lobachevski. Ahora cabe preguntarse: ¿quién asegura la consistencia de la geometría de Euclides? Puesto que esta última se ha considerado como un sistema de proposiciones que se obtienen de manera lógica a partir de los axiomas I — V del cap. II, *al hablar de la consistencia de la geometría euclidiana nos referimos a la consistencia del sistema de axiomas* I — V.

En las páginas que siguen probaremos que la geometría de Euclides no es contradictoria, si tampoco lo es la aritmética. *El problema de la consistencia de la aritmética no es discutido en los fundamentos de la geometría.*

Al investigar los axiomas de la geometría elemental, nos plantearemos tres problemas:

1) el problema de la consistencia,

2) el problema de la minimalidad,

3) el problema de la completitud.

Puesto que estos tres problemas surgen al estudiar cualquier sistema de axiomas —ya sean los de la geometría de Euclides, los de la de Lobachevski, u otros cualesquiera— , tiene sentido enunciar de manera general el planteo de los problemas indicados, así como los métodos para su resolución.

Sea dado un sistema de axiomas, que establece propiedades determinadas de las relaciones mutuas de ciertos objetos. De estos axiomas pueden hacerse deducciones lógicas sobre estas propiedades de los objetos, sin tomar en cuenta en absoluto otras posibles propiedades suyas, si no han sido mencionadas en los axiomas.

Por esto, pueden considerarse como objetos del sistema dado de axiomas a objetos de cualquier naturaleza, y a las relaciones entre ellos, mencionadas en los axiomas, se les puede conferir un significado concreto arbitrario, siempre que se satisfagan todas las condiciones expresadas en los axiomas asumidos. Entonces, cada teorema que se deduzca de manera lógica de los axiomas, expresará un hecho concreto, que se refiere a los objetos considerados, o, más precisamente, a las propiedades de éstos que se mencionan en los axiomas.

Toda elección concreta de objetos que se consideren como objetos del sistema dado de axiomas, será llamada *realización*, o *interpretación*, de estos axiomas.

El propio conjunto de objetos que realizan el sistema dado de axiomas, lo llamaremos, como ya hemos hecho antes, «modelo» del esquema lógico determinado por los axiomas.

Si estos axiomas PUEDEN SER realizados de alguna manera en el modelo, entonces será imposible deducir de ellos, con razonamientos correctos, dos conclusiones que se excluyen mutuamente desde el punto de vista lógico, tales como, digamos, la afirmación y la negación de un mismo resultado. Por esto, *a fin de demostrar la consistencia de un sistema dado de axiomas, basta hallar alguna de sus posibles realizaciones.* (Si, en cambio, el sistema es contradictorio, esto suele revelarse por medio de un razonamiento adecuado, que conduzca a una contradicción.)

La demostración de la consistencia de un sistema dado de axioma puede ser condicional.

Por ejemplo, la consistencia de la geometría plana de Lobachevski fue demostrada en el capítulo precedente construyendo el modelo de Poincaré, cuyos objetos fueron tomados en el plano euclidiano. Por ello, el resultado obtenido fue enunciado en forma condicional: la planimetría de Lobachevski no es contradictoria si no lo es la de Euclides.

El segundo problema consiste en establecer la necesidad de todas las condiciones enunciadas en los axiomas, es decir, mostrar que el sistema adoptado de axiomas no admite la eliminación de alguna de sus condiciones, conservando el mismo conjunto de consecuencias de ellos tomados en forma global (que el sistema es minimal)*). Resolver este problema en su totalidad significa mostrar que cada premisa del sistema de axiomas es independiente de las restantes, es decir, que no puede obtenerse de ellas por razonamientos lógicos.

Sea A alguno de los axiomas de un sistema (no contradictorio) en estudio.

Si el axioma A no sigue de los demás del sistema, sustituyendo en este último el axioma A por un nuevo axioma A^*, que enunciaremos así: «la afirmación A es falsa», debemos obtener otro sistema no contradictorio. Por eso, *para demostrar que el axioma A no puede ser deducido de los restantes del sistema considerado, basta realizar en algún conjunto de objetos todos los axiomas, a excepción del A, de manera tal que en esta realización dicho axioma no se verifique.*

En particular, fue así como establecimos la independencia del V postulado de Euclides de los restantes de la geometría elemental. Precisamente, en el modelo de Poincaré en el semiplano euclidiano tienen lugar todos los axiomas de la geometría absoluta, y no se cumple el axioma de paralelismo de Euclides. Consecuentemente, éste no es consecuencia lógica de los demás axiomas. (En este caso, una misma interpretación de los objetos geométricos revela tanto la independencia del postulado de Euclides como la consistencia de la geometría de Lobachevski.)

Más adelante efectuaremos un análisis análogo de otros axiomas importantes de la geometría elemental, pero, claro está, no resolveremos exhaustivamente el problema de minimilidad.

El planteo del tercer problema de la axiomática —el problema de la completitud de un sistema de axiomas— se diferirá al final del capítulo.

§ 70. Ya tenemos un ejemplo de aplicación de los métodos propuestos: la construcción del modelo de Poincaré. Sin embargo, los múltiples detalles de este modelo

---

*) Como en la base de una misma geometría pueden ponerse sistemas diferentes de axiomas, al eliminar de estos sistemas las condiciones superfluas (en caso que las hubiera) pueden obtenerse, en general, sistemas minimales diferentes. Por esto, el sistema minimal no es único, en absoluto.

podrían oscurecer la esencia de la cuestión, que es útil mostrar con un ejemplo lo más sencillo posible.

Ahora construiremos un modelo únicamente para el primer grupo de axiomas de Hilbert, considerando este grupo como un sistema axiomático aislado.

Tomemos algún tetraedro, y convengamos en llamar «puntos» a sus vértices, «rectas», a sus aristas, y «planos», a sus caras.

Así, el conjunto de elementos geométricos en nuestra realización consiste únicamente de cuatro puntos, seis rectas y cuatro planos.

Las rectas y los planos están en correspondencias determinadas con los puntos; además, si, por ejemplo, la recta a se ha puesto en correspondencia con el punto A, se dice que «a pasa por A», o bien que «A está en a», etc. En nuestra realización, al igual que *en cualquier otra*, *estas correspondencias deben ser descritas con precisión*. Convendremos en poner en correspondencia a cada punto, representado concretamente por alguno de los vértices del tetraedro, en calidad de rectas y planos que pasan por él, aquellas rectas y planos representados por las aristas y las caras que contienen el vértice en cuestión.

Es fácil ver que todos los axiomas I,1 — I,8 serán satisfechos. Veamos cada uno por separado.

Axioma I,1. Cualesquiera que sean dos puntos A y B, existe una recta a que pasa tanto por A como por B.

Esta condición se cumple, pues dos vértices cualesquiera del tetraedro tienen una arista que los une.

Axioma I,2. Cualesquiera que sean dos puntos A, B, existe no más de una recta que pasa por cada uno de ellos.

Este requisito se satisface, pues dos vértices del tetraedro son unidos por una única arista.

Axioma I,3. En cada recta existen al menos dos puntos; existen al menos tres puntos que no están sobre una misma recta.

Ambas condiciones se verifican, pues en cada arista existen dos vértices y existen tres vértices que no están en una misma arista (¡incluso cuatro!).

Axioma I,4. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenezcan a una misma recta, existe un plano α que pasa por cada uno de ellos; en cada plano hay al menos un punto.

Ambas premisas son satisfechas, pues por cada tres vértices pasa una cara y cada cara contiene algún vértice (¡incluso tres!).

Axioma I,5. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenezcan a una misma recta, existe no más de un plano que pasa por cada uno de ellos.

Esta condición es observada, pues por cada tres vértices pasa una única cara.

Axioma I,6. Si dos puntos A, B de una recta a están en un plano α, cada punto de a pertenece a α.

Esto también se cumple; en efecto, si dos vértices de una arista están en alguna cara, cada vértice de esta arista pertenece a la misma cara, pues una arista tiene únicamente dos vértices.

Axioma I,7. Si dos planos α, β tienen un punto común A, tienen, al menos, otro punto común B.

Este requisito es verificado, pues dos caras cualesquiera tienen dos vértices comunes.

Axioma I,8. Existen al menos cuatro puntos que no están en un mismo plano.

Este último axioma también es satisfecho, pues los cuatro vértices del tetraedro no están sobre una misma cara.

Hemos comprobado, así, que nuestra realización satisface todos los axiomas del primer grupo. Obsérvese, a propósito, que esta realización de los axiomas I,1 — I,8 es la mínima posible, en el sentido de que en cada recta hay únicamente un par de puntos, que la totalidad de los puntos es igual tan sólo a cuatro, etc. Es precisamente la cantidad de elementos requeridos por los axiomas. Es verdad que el axioma I,4 requiere que en cada plano haya al menos un punto, mientras que en nuestra realización hay tres en cada plano. Sin embargo, como lo muestra el teorema 3 del § 12, este número es también el mínimo.

Como se ha indicado una realización concreta para los axiomas I,1 — I,8, puede afirmarse que los axiomas del primer grupo forman un sistema no contradictorio.

En el parágrafo precedente se expuso un principio general para establecer la independencia de unas proposiciones con respecto a otras. Ahora resulta fácil dar una ilustración sencilla de este principio. Planteemos, por ejemplo, la siguiente pregunta: ¿es posible demostrar, utilizando los axiomas I,1 — I,8 que el conjunto de elementos de la geometría es infinito?

Evidentemente, la respuesta es negativa, pues hemos indicado una realización de los axiomas I,1 — I,8 en un conjunto FINITO de objetos. Dicho de otro modo: la proposición referente a la infinitud del conjunto de elementos de la geometría no depende de los axiomas del primer grupo.

2. Consistencia de los axiomas de la geometría euclidiana

§ 71. Ahora pasaremos a demostrar la consistencia de los cinco grupos de axiomas de la geometría de Euclides.

Estamos habituados a pensar estos axiomas realizados en cierto conjunto de objetos que imaginamos bien y que surgen en nuestra mente como abstracción de los objetos observados del mundo real. Sin embargo, los puntos, rectas y planos, como figuras de nuestra intuición geométrica, no son posibles de descripción matemática. Por esto, para demostrar la consistencia de los axiomas de la geometría de Euclides es necesario buscar un modelo que posea sentido independientemente de nuestras imágenes geométricas intuitivas. Con este fin, construiremos una realización de los axiomas I — V, que llamaremos realización aritmética, pues sus objetos son combinaciones de números. Con esto habremos establecido la consistencia de la geometría euclidiana, condicionada por la consistencia de la aritmética.

A fin de no oscurecer la esencia del problema con detalles superfluos de carácter operativo, nos limitaremos a considerar la planimetría, es decir, tomaremos en cuenta únicamente los axiomas I,1 — I,3 y II — V.

En nuestra realización aritmética llamaremos «punto» a qualquier par ordenado de números reales (x, y), «recta», a la razón de tres números reales $(u : v : w)$, con la condición de que al menos uno de los números u, v no sea igual a cero *).

---

*) Se puede llamar razón de los tres números u, v, w a la colección de los números u, v, w (en ese orden, *N. del Tr.*), con la condición de que las colecciones u, v, w y λu, λv, λw, donde λ es un número cualquiera, diferente de 0, se consideran idénticas.

Convendremos en decir que «el punto (x, y) está en la recta $(u : v : w)$»", o bien que «la recta $(u : v : w)$ pasa por el punto (x, y)»", si tiene lugar la igualdad

$$ux + vy + w = 0.$$

Todas las condiciones contenidas en los axiomas I,1 — I,3 serán satisfechas, como puede comprobarse por verificación sucesiva.

En efecto, sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes; entonces la razón de los tres números $u = y_1 - y_2$, $v = x_2 - x_1$, $w = x_1y_2 - x_2y_1$ es una recta [los números $y_1 - y_2$ y $x_2 - x_1$ no pueden ser iguales a 0 a la vez, pues los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son diferentes], que pasa tanto por (x_1, y_1) como por (x_2, y_2), pues

$$ux_1 + vy_1 + w = (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + w = (y_1 - y_2)x_2 + (x_2 - x_1)y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Por consecuencia, el axioma I,1 se satisface.

Ahora bien, de las ecuaciones

$$ux_1 + vy_1 + w = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + w = 0,$$

se desprende que

$$u : v : w = (y_1 - y_2) : (x_2 - x_1) : (x_1y_2 - x_2y_1).$$

Por ende, con los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) queda determinada sólo una recta $(u : v : w)$; esto significa que se satisface el axioma I,2.

También son satisfechas las condiciones contenidas en el axioma I,3. En efecto, como la ecuación

$$ux + vy + w = 0$$

tiene siempre un conjunto infinito de soluciones diferentes, en cada recta existen no sólo dos, sino una cantidad infinita de puntos. Como tres puntos que no pertenecen a una misma recta, podemos indicar, por ejemplo, $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$; no hay ninguna recta que contenga estos tres puntos, pues evidentemente, no existen tres puntos u, v, w, que no sean iguales a cero simultáneamente y que satisfagan las igualdades

$$u \cdot 0 + v \cdot 0 + w = 0,$$
$$u \cdot 1 + v \cdot 0 + w = 0,$$
$$u \cdot 0 + v \cdot 1 + w = 0.$$

Definamos, ahora, la relación «entre». Sean dadas una recta $(u : v : w)$ y tres puntos sobre ella (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Supongamos, primero, que $v \neq 0$. Diremos que el punto (x_2, y_2) está entre los puntos (x_1, y_1) y (x_3, y_3), si

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad \text{o bien} \quad x_1 > x_2 > x_3.$$

Si, en cambio, es $v = 0$, para los puntos pertenecientes a esta recta será, necesariamente, $x_1 = x_2 = x_3 = -w/u$ y las condiciones precedentes no son aceptables. En este caso, convendremos en considerar al punto (x_2, y_2) situado entre (x_1, y_1) y (x_3, y_3), si

$$y_1 < y_2 < y_3, \quad \text{o bien} \quad y_1 > y_2 > y_3.$$

La relación «entre» así definida satisface todos los axiomas de orden II,1 — II,4.

Se comprueba de manera directa que se satisfacen los axiomas de orden lineal II,1 — II,3. Mostremos que el axioma de Pasch II,4 también se satisface.

Obsérvese, ante todo, que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los extremos de un segmento, todos los puntos interiores de este segmento serán de la forma $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$, donde λ es un número cualquiera que satisface las desigualdades $0 < \lambda < 1$. Además, si alguna recta $(u : v : w)$ pasa por un punto del segmento de extremos (x_1, y_1), (x_2, y_2), entonces los números $ux_1 + vy_1 + w$ y $ux_2 + vy_2 + w$ tienen signos diferentes. En efecto, si el punto interior que pertenece a dicha recta corresponde al número λ entonces

$$u[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] + v[\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] + w = 0.$$

De aquí sigue que

$$\lambda(ux_1 + vy_1 + w) = -(1 - \lambda)(ux_2 + vy_2 + w),$$

y como λ y $1 - \lambda$ son positivos, los números $ux_1 + vy_1 + w$ y $ux_2 + vy_2 + w$ tienen signos distintos.

Sean, ahora, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ tres puntos no alineados, y $(u : v : w)$, una recta que no pasa por ninguno de ellos. Debemos mostrar que si la recta $(u : v : w)$ pasa por algún punto del segmento AB, debe pasar o bien por un punto del segmento AC, o bien por uno del BC.

Como la recta $(u : v : w)$ no contiene ninguno de los puntos A, B, C, los números

$$\alpha_1 = ux_1 + vy_1 + w, \qquad \alpha_2 = ux_2 + vy_2 + w, \qquad \alpha_3 = ux_3 + vy_3 + w$$

son diferentes de cero y además, por lo que ya expusimos, α_1 y α_2 tienen signos diferentes. Supongamos que α_3 tiene signo distinto del de α_1; entonces la recta $(u : v : w)$ corta al segmento AC. Para probarlo, tomemos el número λ determinado por la igualdad $\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_3 = 0$, es decir,

$$\lambda = \alpha_3 : (\alpha_3 - \alpha_1).$$

Tomando en cuenta que α_1 y α_3 tienen signos diferentes, hallamos:

$$\lambda = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_1} = \frac{|\alpha_3|}{|\alpha_3| + |\alpha_1|};$$

por esto, $0 < \lambda < 1$. En consecuencia, el punto (x, y), donde

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3, \qquad y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_3,$$

pertenece al segmento AC. Por otro lado, dicho punto pertenece a la recta $(u : v : w)$, pues

$$ux + vy + w = \lambda(ux_1 + vy_1 + w) + (1 - \lambda)(ux_3 + vy_3 + w) = \lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_3 = 0.$$

Así, pues, la recta $(u : v : w)$ corta efectivamente al segmento AC. De igual manera se establece que cuando α_3 tiene signo distinto del de α_2, la recta $(u : v : w)$ corta al segmento BC. Pero como α_1 y α_2 tienen signos diferentes, entonces α_3 tiene necesariamente un signo distinto del signo del número α_1, o bien de α_2. Con esto queda demostrado lo que queríamos.

Daremos ahora la definición del concepto de congruencia. Con este fin, consideremos una cierta clase de transformaciones, conocidas en álgebra con el calificativo de ortogonales.

Sean dadas las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

mediante las cuales, dados $a_1, \ldots, c_2$, cada punto (x, y) se transforma en un punto determinado (x', y'). La transformación se llama *ortogonal*, si los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 satisfacen la condición.

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{**}$$

Indiquemos, ante todo, algunas propiedades de la transformación ortogonal (*). De (**) se tiene:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Estas tres igualdades son equivalentes a la relación (**) y, por ende, caracterizan la ortogonalidad de la transformación (*).

De las igualdades (I) sigue, ante todo, que tanto a_1 y a_2 como b_1 y b_2 no pueden ser simultáneamente nulos. En efecto, si, por ejemplo $a_1 = a_2 = 0$, de la tercera de las igualdades (I) es $b_1b_2 = 0$, lo cual, unido a las igualdades asumidas $a_1 = a_2 = 0$, debe contradecir alguna de las dos primeras igualdades de (I). Además, de la igualdad $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ se obtiene: $a_1^2a_2^2 = b_1^2b_2^2$. De aquí, multiplicando miembro a miembro la primera de las igualdades de (I) por b_2^2, la segunda por a_1^2 y restando, hallamos:

$$0 = b_2^2 - a_1^2,$$

de donde $b_2 = \delta_1a_1$, donde $\delta_1^2 = 1$. Análogamente, obtenemos que $b_1 = \delta_2a_2$, siendo $\delta_2^2 = 1$. Pero $b_1b_2 = -a_1a_2$, de manera que $\delta_1\delta_2 = -1$, por lo cual será o bien

$$b_1 = -a_2, \quad b_2 = a_1,$$

o bien

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = -a_1.$$

Vemos, así, que la transformación (*) puede ser escrita de una de las formas que siguen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y + c_1, \\ y' &= \beta x + \alpha y + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + c_1, \\ y' &= \beta x - \alpha y + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

donde hemos denotado con α y β a a_1 y a_2; en ambos casos las condiciones de ortogonalidad (1) se reducen a la relación única

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Llamaremos a (I) y (II) transformaciones ortogonales de primera y segunda especie, respectivamente.

Para lo que sigue resulta de particular importancia la siguiente propiedad de las transformaciones ortogonales: puntos situados sobre alguna semirrecta van a parar bajo cualquier transformación ortogonal, en puntos situados asimismo sobre alguna semirrecta.

Antes de probarlo, fijemos una manera cómoda de determinar semirrectas.

Sea dada la recta $a(u : v : w)$ y un punto $O(x_0, y_0)$ sobre ella; como O pertenece a a, tiene lugar la igualdad

$$ux_0 + vy_0 + w = 0.$$

Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la recta a, análogamente tendremos:

$$ux + vy + w = 0.$$

De aquí sigue que

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0.$$

Hagamos $m = \lambda v$, $n = -\lambda u$, donde λ es un número arbitrario $\neq 0$. Entonces la ecuación precedente puede escribirse así:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Denotando cada uno de estos cocientes iguales con t, nos queda:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Las igualdades (2) determinan, para cada valor de t, algún punto sobre la recta, de forma que a distintos valores numéricos de t de un mismo signo les corresponden puntos situados a un mismo lado del punto $O(x_0, y_0)$, mientras que a valores numéricos de t con signos diferentes les corresponden puntos situados en lados diferentes con respecto a O. Esto puede establecerse directamente a partir del concepto «entre», definido más arriba.

De esta forma, a números t positivos les corresponden puntos de una de las dos semirrectas en que queda dividida a por el punto O, mientras que a valores negativos de t les corresponderán puntos de la otra semirrecta.

Resulta más cómodo determinar los puntos de una semirrecta por medio de las igualdades (2) siempre para los valores positivos de t, distinguiendo las semirrectas de origen común O, situadas sobre la recta a, según los signos de las magnitudes m y n: si para una de las semirrectas $m = p$ y $n = q$, para la otra $m = -p$, $n = -q$.

Llamaremos a las magnitudes m y n parámetros normalizados de la semirrecta, si para éstos se cumple la relación

$$m^2 + n^2 = 1;$$

en el caso $\lambda = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, esta condición se satisface.

Evidentemente, una semirrecta queda determinada fijando el origen (x_0, y_0) y los parámetros normalizados m, n.

Recíprocamente, si se ha fijado una semirrecta, su origen (x_0, y_0) y sus parámetros normalizados m, n quedan determinados unívocamente.

Para denotar una semirrecta, utilizaremos la escritura $(x_0, y_0; m, n)$, asumiendo siempre que $m^2 + n^2 = 1$.

Ahora podemos establecer fácilmente la propiedad mencionada más arriba de las transformaciones ortogonales: por cualquier transformación ortogonal, los puntos que constituyen una semirrecta se llevan en puntos que forman, asimismo, una semirrecta.

Sea dada la semirrecta $(x_0, y_0; m, n)$. Todos sus puntos se obtienen si damos, en las fórmulas

$$x = x_0 + mt,$$
$$y = y_0 + nt,$$

todos los valores positivos posibles al parámetro t. Consideremos alguna transformación ortogonal de I especie

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x + \alpha y + c_2,$$

o bien de II especie,

$$x' = \alpha x + \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x - \alpha y + c_2.$$

Un punto arbitrario (x, y) de la semirrecta dada se transforma, en el primer caso, en el punto

$$x' = (\alpha m - \beta n)t + (\alpha x_0 - \beta y_0 + c_1),$$
$$y' = (\beta m + \alpha n)t + (\beta x_0 + \alpha y_0 + c_2),$$

y en el segundo, en el punto

$$x' = (\alpha m + \beta n)t + (\alpha x_0 + \beta y_0 + c_1),$$
$$y' = (\beta m - \alpha n)t + (\beta x_0 - \alpha y_0 + c_2).$$

En ambos casos estas expresiones pueden escribirse en la forma

$$x' = m' t + x'_0,$$
$$y' = n' t + y'_0,$$

y, por ende, los puntos (x', y') que se obtienen para diferentes valores positivos de t, se encuentran sobre la semirrecta de parámetros m', n'. Queda, con esto, probada nuestra afirmación. Obsérvese que los parámetros

$$m' = \alpha m - \beta n,$$
$$n' = \beta m + \alpha n,$$

o bien

$$m' = \alpha m + \beta n,$$
$$n' = \beta m - \alpha n$$

son normalizados. En efecto,

$$m'^2 + n'^2 = (\alpha m \mp \beta n)^2 + (\beta m \pm \alpha n)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)m^2 + (\alpha^2 + \beta^2)n^2 = m^2 + n^2 = 1.$$

Convendremos en decir que la semirrecta $(x_0', y_0'; m', n')$ fue obtenida de la $(x_0, y_0; m, n)$ por una transformación ortogonal. Entonces, tiene lugar la siguiente proposición.

La transformación ortogonal de I *especie* (I) *o de* II *especie* (II) *que lleva los puntos* (x, y) *en los* (x', y') *determina una transformación ortogonal de* I *o* II *especie respectivamente, de las semirrectas* $(x_0, y_0; m, n)$ *en las semirrectas* $(x_0', y_0'; m', n')$.

Las magnitudes $x_0', y_0'; m', n'$ *se expresan por las fórmulas*

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= \alpha x_0 - \beta y_0 + c_1, \\ y_0' &= \beta x_0 + \alpha y_0 + c_2, \\ m' &= \alpha m - \beta n, \\ n' &= \beta m + \alpha n \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}^*)$$

en el caso de una transformación de I *especie, y por las fórmulas*

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= \alpha x_0 + \beta y_0 + c_1, \\ y_0' &= \beta x_0 - \alpha y_0 + c_2, \\ m' &= \alpha m + \beta n, \\ n' &= \beta m - \alpha n \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}^*)$$

si se trata de una transformación de II *especie. Además, si los puntos* (x, y) *se encuentran sobre la semirrecta* $(x_0, y_0; m, n)$, *sus imágenes* (x', y') estarán sobre la semirrecta $(x_0', y_0'; m', n')$.

Ahora definiremos, en nuestra realización, la congruencia de segmentos y de ángulos.

Diremos que un segmento AB es congruente a otro, $A'B'$, si existe una transformación ortogonal (de puntos) que envía el punto A en A', y B en B'.

Diremos que el ángulo (h, k) es congruente al (h', k'), si existe una transformación ortogonal (de semirrectas) que envía la semirrecta h en la h', y k en k'.

Hay que mostrar que estas definiciones satisfacen todas las condiciones requeridas por los axiomas III,1 — III,5.

Con este fin, analicemos sucesivamente todos los axiomas del tercer grupo.

El axioma III,1 pide que para cualquier segmento AB prefijado de antemano, sobre toda recta a', a cada lado de cualquier punto prefijado A' de ella, exista exactamente un punto B' que determine con A' un segmento $A'B'$ al cual sea congruente el segmento AB.

Sean dados el segmento $A(x_0, y_0)B(x, y)$ y un punto $A'(x_0', y_0')$ sobre alguna recta $a'(u' : v' : w')$. Las magnitudes

$$m' = \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}, \qquad n' = \frac{-u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$$

son los parámetros normalizados de una de las dos semirrectas que determina el punto A' sobre la recta a' (las magnitudes $-m'$, $-n'$ serán los parámetros normalizados de la otra semirrecta).

Sean m y n los parámetros normalizados de la semirrecta AB; entonces el punto $B(x, y)$ se determina por las fórmulas

$$x = x_0 + mt,$$
$$y = y_0 + nt,$$

para un valor positivo BIEN DEFINIDO de t.

Buscaremos la transformación ortogonal que lleva la semirrecta $(x_0, y_0; m, n)$ en la semirrecta $(x'_0, y'_0; m', n')$. Según (I*), de las ecuaciones

$$\alpha m - \beta n = m',$$
$$\beta m + \alpha n = n'$$

hallamos de inmediato:

$$\alpha = mm' + nn',$$
$$\beta = mn' - nm',$$

siendo, además,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (mm' + nn')^2 + (mn' - nm')^2 =$$
$$= m^2(m'^2 + n'^2) + n^2(m'^2 + n'^2) = m^2 + n^2 = 1.$$

Determinando c_1 y c_2 del primer par de ecuaciones (I*), obtenemos exactamente una transformación de I especie

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x + \alpha y + c_2,$$

que lleva la semirrecta $(x_0, y_0; m, n)$ en la $(x'_0, y'_0; m', n')$.

Análogamente se puede establecer que existe exactamente una transformación de II especie que también lleva la semirrecta $(x_0, y_0; m, n)$ en $(x'_0, y'_0; m', n')$.

Ambas transformaciones aplican el punto $B(x, y)$ en el mismo punto $B(x', y')$:

$$x' = x'_0 + m't,$$
$$y' = y'_0 + n't.$$

Así, en la recta a', a un lado cualquiera del punto A', existe un punto B' tal que $AB \equiv A'B'$. Hemos mostrado, así, que esta condición del axioma III,1 se satisface.

El axioma III,1 también requiere que

$$AB \equiv BA.$$

Pero esta condición también se satisface. En efecto, la transformación ortogonal

$$x' = -x + (x_1 + x_2),$$
$$y' = -y + (y_1 + y_2)$$

aplica el punto $A(x_1, y_1)$ en el $B(x_2, y_2)$ y, recíprocamente, el $B(x_2, y_2)$ en el $A(x_1, y_1)$.

Queda así establecido que todas las condiciones del axioma III,1 son observadas.

Pasemos al axioma siguiente, III.2, según el cual de las relaciones de congruencia

$$A'B' \equiv AB \quad \text{y} \quad A''B'' \equiv AB$$

debe seguir que

$$A'B' \equiv A''B''.$$

En nuestra realización, esta condición se satisface, como consecuencia de las propiedades de grupo de las transformaciones ortogonales. Precisamente,

1. Cada transformación ortogonal posee una inversa, que también es ortogonal.

2. Si alguna transformación ortogonal aplica los puntos (x, y) en los (x', y'), y alguna otra transformación ortogonal aplica los puntos (x', y') en los puntos (x'', y''), la transformación resultante (es decir, el producto de las dos dadas), que aplica los puntos (x, y) en los (x'', y''), también es ortogonal.

En efecto, consideremos una transformación ortogonal arbitraria, cuya matriz*) denotaremos con Φ; llamando Φ' a la matriz transpuesta, e I a la matriz unidad, podemos escribir la condición(**) de ortogonalidad (véase la pág. 179) en la forma

$$\Phi\Phi' = I. \tag{N}$$

De aquí se desprende que el determinante de la matriz Φ es igual a ± 1 y, por ser diferente de cero, cada transformación ortogonal tiene una inversa. La matriz de la transformación inversa satisface la condición de ortogonalidad. En efecto, obsérvese, previamente, que la relación (N) implica

$$\Phi^{-1} = \Phi';$$

pero $\Phi(\Phi'\Phi) = (\Phi\Phi')\Phi = \Phi$; por esto, $\Phi'\Phi = I$, y

$$(\Phi^{-1})(\Phi^{-1})' = I.$$

En conclusión, *la transformación inversa a una ortogonal es también ortogonal.*

Sean, ahora, Φ y Ψ las matrices de dos transformaciones ortogonales; el producto de estas transformaciones es, evidentemente, una transformación de matriz $X = \Psi\Phi$. Utilizando la conocida relación

$$(\Psi\Phi)' = \Phi'\Psi',$$

resulta sencillo comprobar que la matriz X satisface la condición de ortogonalidad. Efectivamente, tenemos:

$$XX' = \Psi\Phi(\Psi\Phi') = \Psi\Phi(\Phi'\Psi') = \Psi(\Phi\Phi')\Psi' = \Psi I\Psi' = \Psi\Psi' = I.$$

Así, al efectuar sucesivamente dos transformaciones ortogonales, la transformación resultante es, también, ortogonal.

Una vez comprobado que las transformaciones ortogonales poseen propiedades de grupo, podemos demostrar sin dificultad que el axioma III,2 se satisface en nuestra realización.

Supongamos que $A'B' \equiv AB$ y $A''B'' \equiv AB$. Convendremos en simbolizar la transformación ortogonal que aplica un punto arbitrario M' en un punto M, con la escritura

$$M = \Phi(M').$$

---

*) Como ordinariamente se entiende aquí por matriz de la transformación (*) a la matriz formada por los coeficientes de x, y en los segundos miembros de esta expresión, es decir,

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|.$$

(*N. del Tr.*)

Si $A'B' \equiv AB$, existe una transformación $M = \Phi(M')$ tal que

$$A = \Phi(A'), \qquad B = \Phi(B').$$

Análogamente, si $A''B'' \equiv AB$, existe una transformación $M = \Psi(M'')$ tal que

$$A = \Psi(A''), \qquad B = \Psi(B'').$$

Denotando con Ψ^{-1} la transformación inversa a Ψ, hallamos:

$$A'' = \Psi^{-1}(A) = \Psi^{-1}(\Phi(A')),$$

$$B'' = \Psi^{-1}(B) = \Psi^{-1}(\Phi(B')).$$

En virtud de las propiedades de grupo, la transformación $\Psi^{-1}\Phi$ es ortogonal; por lo tanto, $A'B' \equiv A''B''$.

Pasemos al axioma III,3. Sean A, B, C tres puntos de alguna recta a y supongamos qe B está entre A y C; sean A', B', C' tres puntos de alguna recta a', que se encuentran en análoga posición relativa. El axioma III,3 requiere que

$$AB \equiv A'B', \qquad BC \equiv B'C'$$

implique

$$AC \equiv A'C'.$$

De acuerdo con los razonamientos expuestos al inverstigar el axioma III,1, existe una transformación ortogonal que lleva la semirrecta BA a la $B'A'$ y, simultáneamente, la semirrecta BC a la $B'C'$. Como $AB \equiv A'B'$ y $BC = B'C'$, de los mismos razonamientos (o bien del propio axioma III,1) sigue que la transformación indicada lleva el punto A en A' y el C en C'. Por ende, $AC \equiv A'C'$, es decir, el axioma III,3 se satisface.

Mostremos ahora que en la realización aritmética se satisfacen las condiciones contenidas en el axioma III,4: si $\angle(h, k)$ es un ángulo arbitrario, h', alguna semirrecta, entonces a cada lado de ésta se encuentra exactamente una semirrecta k', que forma con ella un ángulo $\angle(h', k')$, al cual es congruente el dado $\angle(h, k)$; además,

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k), \qquad \angle(h, k) \equiv \angle(k, h).$$

Recién ahora tendremos que hacer una distinción esencial entre las transformaciones ortogonales de I y II especie.

Sea dada alguna semirrecta h; imaginémonos que la hemos completado hasta una recta $\bar{h}$ y consideremos los dos semiplanos que quedan separados por la recta $\bar{h}$. Denotemos uno de ellos con I, y el otro, II. Sea, asimismo, h' alguna otra semirrecta, $\bar{h}'$, la recta que la contiene, y I', II', los dos semiplanos separados por la recta $\bar{h}'$.

Supongamos que Φ_1 y Φ_2 son transformaciones ortonogales de I y II especie respectivamente, cada una de las cuales lleva la semirrecta h en la h'. Entonces, cada una de las transformaciones Φ_1 y Φ_2 lleva los puntos del semiplano I en los de uno de los dos semiplanos I' y II', y los del semiplano II, en los del otro de los semiplanos I', II'; además, si Φ_1 lleva el semiplano I en el I', Φ_2 llevará I en II'.

A fin de probar esto, comencemos observando que a puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) situados en lados diferentes con respecto a la recta $(u : v : w)$ les corresponden números $ux_1 + vy_1 + w$ y $ux_2 + vy_2 + w$ de signo diferente, como fue mostrado más arriba, al discutir el axioma de Pasch. Así, entonces, para los puntos (x, y) de un semiplano debe ser $ux + vy + w > 0$, y para los del otro, $ux + vy + w < 0$.

Si (x_0, y_0) es el origen de la semirrecta h y m, n son sus parámetros normalizados, la condición de pertenencia del punto (x, y) a uno u otro semiplano de borde $\bar{h}$ puede escribirse en la forma

$$n(x - x_0) - m(y - y_0) > 0$$

y

$$n(x - x_0) - m(y - y_0) < 0$$

respectivamente. Sean (x_0', y_0') el origen, y m', n', los parámetros normalizados de la semirrecta h'. Si

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x + \alpha y + c_2$$

es la transformación ortogonal de I especie que lleva h en h', entonces

$$x' - x_0' = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0),$$
$$y' - y_0' = \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0),$$
$$m' = \alpha m - \beta n,$$
$$n' = \beta m + \alpha n,$$

de donde

$$n'(x' - x_0') - m'(y' - y_0') = n(x - x_0) - m(y - y_0). \qquad (\alpha)$$

Si, en cambio, h va en h' por medio de la transformación de II especie

$$x' = \alpha x + \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x - \alpha y + c_2,$$

entonces

$$n'(x' - x_0') - m'(y - y_0') = -n(x - x_0) + m(y - y_0). \qquad (\beta)$$

De las igualdades (α) y (β) se desprende directamente la propiedad indicada arriba de las transformaciones ortogonales. Al mismo tiempo, se comprueba de inmediato la primera condición del axioma III,4 en la realización que estamos considerando.

En efecto, como ya sabemos, existe una transformación ortogonal de I especie y una de II especie, que llevan el lado h de un ángulo $\angle(h, k)$ en una semirrecta h'. De estas dos transformaciones, sólo una lleva la semirrecta k en una semirrecta k', que se encuentre en un semiplano prefijado de antemano y limitado por $\bar{h}'$.

Así, pues, a cada lado de la recta $\bar{h}'$ hay exactamente una semirrecta k' que forma, junto con h', un ángulo $\angle(h', k')$ tal que $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$.

Las dos condiciones restantes del axioma III,4 se verifican aún con mayor sencillez.

La relación $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ tiene lugar, pues existe una transformación ortogonal que deja h y k en su lugar: la transformación idéntica

$$x' = x,$$
$$y' = y.$$

La relación $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$ tiene lugar, pues existe una transformación ortogonal que lleva h en k y k en h.

Precisamente, si (x_0, y_0) es el vértice del ángulo; m_1, n_1 y m_2, n_2 son los parámetros normalizados de las semirrectas h y k, dicha transformación (de II especie) es

$$x' = (m_1m_2 - n_1n_2)x + (n_1m_2 + m_1n_2)y + \\ + [x_0 - (m_1m_2 - n_1n_2)x_0 - (n_1m_2 + m_1n_2)y_0],$$
$$y' = (n_1m_2 + m_1n_2)x - (m_1m_2 - n_1n_2)y + \\ + [y_0 - (n_1m_2 + m_1n_2)x_0 + (m_1m_2 - n_1n_2)y_0].$$

Efectivamente, por estas fórmulas obtenemos $x_0' = x_0$, $y_0' = y_0$, y por las fórmulas (II*) para los valores dados de α y β, tenemos que $m_1' = m_2$, $n_1' = n_2$ y $m_2' = m_1$, $n_2' = n_1$.

Quedan, así, verificadas todas las condiciones del axioma III,4.

Analicemos, por último, las condiciones del axioma III,5: si ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos, de las relaciones $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ deben seguir las relaciones $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

Estas condiciones son satisfechas en nuestra realización. En efecto, a base de lo expuesto podemos afirmar que con la condición $AB \equiv A'B'$ existen dos transformaciones ortogonales (una de I y otra de II especie), que llevan el punto A en el A' y el B en el B'. Como consecuencia de la relación $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, una sola de ellas lleva la semirrecta AC en la $A'C'$ y, como $AC \equiv A'C'$, esta misma transformación lleva el punto C en el C'. Consecuentemente, existe una transformación ortogonal que lleva los puntos A, B, C en A', B', C' respectivamente; esto implica que $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

Hemos comprobado, entonces, que la definición dada de congruencia de segmentos y ángulos satisface todos los axiomas del tercer grupo.

Pasemos a los axiomas de continuidad IV,1 — IV,2. En nuestra lista de axiomas, el cuarto grupo lo forman los axiomas de Arquímedes y de Cantor. Podríamos verificarlos directamente, tal como lo hicimos con los grupos I, II, III. Sin embargo, resulta más sencillo proceder de otra manera. Utilizaremos el teorema 41 del § 23, que establece la equivalencia (si se cumplen los axiomas de los grupos I — III) de los axiomas IV,1 y IV,2 al principio de Dedekind. En virtud de este teorema, para nuestros fines basta establecer que en la realización aritmética, en el conjunto de puntos de cada recta se cumple el principio de Dedekind. Pero esto es evidente. En efecto, sea $(u : v : w)$ alguna recta y sea, por ejemplo, $v \neq 0$; consideraremos que sobre esta recta el punto (x_1, y_1) precede al (x_2, y_2), si $x_1 < x_2$. En este caso, al efectuar cualquier cortadura de Dedekind en el conjunto de los puntos (x, y) de la recta $(u : v : w)$, simultáneamente efectuamos una cortadura de Dedekind en el conjunto de los números reales $\{x\}$. Como en el conjunto de los números reales tiene lugar el principio de Dedekind, existirá un número $\bar{x}$ que realice la cortadura, es decir, que clausure alguna de las clases. Hagamos

$$\bar{y} = \frac{-u\bar{x} - w}{v}.$$

Evidentemente, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ está sobre la recta $(u : v : w)$ y clausura una de las clases de la cortadura de Dedekind en esta recta. Por consiguiente, para cada cortadura de Dedekind en el conjunto de puntos de cualquier recta existe un punto que

realiza esta cortadura. Dicho de otro modo, en todas las rectas tiene lugar el principio de Dedekind. Del teorema 41 del § 23 sigue entonces que los axiomas de continuidad IV,1 y IV,2 se satisfacen en la realización aritmética.

Nos resta considerar el axioma V de paralelismo.

Sea $(u : v : w)$ una recta arbitraria y (x_0, y_0) un punto que no le pertenece, es decir, que satisface la condición

$$ux_0 + vy_0 + w \neq 0.$$

Debemos determinar si existe una única recta que pasa por (x_0, y_0) y no tiene puntos comunes con $(u : v : w)$, es decir, paralela a ésta, o bien si exista más de una.

Sea $(u' : v' : w')$ una de estas rectas. Las magnitudes u', v', w' deben satisfacer dos condiciones: en primer lugar, debe verificarse la igualdad

$$u'x_0 + v'y_0 + w' = 0, \tag{*}$$

pues la recta $(u' : v' : w')$ pasa por el punto (x_0, y_0); en segundo lugar, el sistema

$$\left.\begin{aligned} u'x + v'y + w' &= 0, \\ ux + vy + w &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{**}$$

debe ser incompatible, pues las rectas $(u' : v' : w')$ y $(u : v : w)$ no tienen puntos comunes. Si el sistema (**) es incompatible, debe ser, necesariamente, $u' : u = v' : v$, o bien, si se denota con μ a cada uno de estos cocientes iguales,

$$u' = \mu u, \qquad v' = \mu v.$$

De (*) hallamos en seguida:

$$w' = -\mu(ux_0 + vy_0).$$

Esto implica que

$$u' : v' : w' = u : v : -(ux_0 + vy_0),$$

de forma que las razones $u' : v' : w'$ están bien determinadas, es decir, existe exactamente una recta que pasa por (x_0, y_0) y es paralela a la recta arbitraria prefijada $(u : v : w)$.

Entonces, en nuestra realización, las propiedades de paralelismo satisfacen el axioma V.

Hemos indicado, así, *una realización concreta del sistema de axiomas* I — V; *por lo tanto*, *este sistema es compatible*.

Como esta realización se basa en el concepto de número real, el resultado indicado tiene carácter condicional, y puede ser enunciado como sigue:

El sistema de axiomas I — V *no contiene contradicciones*, *siempre que la aritmética de los números reales sea consistente*.

La demostración de la consistencia de la aritmética está fuera de los límites de los fundamentos de la geometría, de forma que dejaremos de lado este problema.

Anotemos, por último, que todas las relaciones que hemos utilizado en el presente parágrafo surgen en la geometría analítica, cuando se utiliza el sistema ortogonal cartesiano de coordenadas. Es por esto que a veces llamaremos *cartesiana* a la realización considerada aquí.

Habiéndonos propuesto construir una realización concreta de los axiomas de Hilbert, hemos utilizado objetos de la aritmética y, verificando sucesivamente todos

los axiomas, hemos comprobado que todas las definiciones dadas satisfacen estos axiomas. Como hemos eliminado toda referencia a la intuición geométrica, debido a la naturaleza puramente aritmética de los objetos escogidos, el estudio efectuado resultó bastante engorroso. Lo hemos hecho con todo detalle, porque reviste suma importancia, al permitirnos concluir la consistencia de la axiomática de Hilbert (más precisamente, al reducirla a la consistencia de la aritmética).

Además, como verá el lector en las secciones subsiguientes, algunas variaciones de la realización aritmética nos permitirán resolver varias cuestiones concernientes a la independencia de los axiomas I — V.

3. Demostración de la independencia de algunos axiomas de la geometría euclidiana

§ 72. En el § 69 destacamos el problema de minimalidad como uno de los básicos de la axiomática. A fin de resolverlo completamente, debe mostrarse que cada condición contenida en los axiomas adoptados es independiente de las restantes, es decir, que el número de condiciones no puede ser disminuido. Un tal estudio requiere mucho tiempo, y estaría fuera de lugar en nuestro libro. Nos limitaremos a demostrar la independencia de algunos de los axiomas I — V de los restantes axiomas de este sistema.

Ante todo, podemos afirmar que el axioma V de paralelismo no es consecuencia de los I — IV. El problema de su independencia ya lo hemos resuelto, de modo que no volveremos a él.

Ahora mostraremos la independencia de los axiomas de continuidad (grupo IV).

Demostraremos primero que el axioma de Cantor IV,2 no sigue de los demás (incluyendo el de Arquímedes, IV,1). De acuerdo con el principio general de tales demostraciones (§ 69), debemos construir algún conjunto de objetos y definir relaciones mutuas entre ellos, de manera que éstas satisfagan todos los axiomas, a excepción del de Cantor.

Siguiendo a Hilbert, utilizaremos para esto el conjunto infinito Ω de los números que pueden obtenerse a partir de los racionales, al aplicar muchas veces las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y, además, la quinta operación $\sqrt{1 + \omega^2}$, donde ω es un número ya obtenido por medio de estas operaciones. Evidentemente, el conjunto Ω posee la siguiente propiedad: si ω_1 y ω_2 son dos números de Ω, entonces

$$\omega_1 + \omega_2,\ \omega_1 - \omega_2,\ \omega_1\omega_2,\ \frac{\omega_1}{\omega^2}\ (\text{si } \omega_2 \neq 0) \text{ y } \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \pm\, \omega_1\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} \text{ son tam-}$$

bién números del conjunto Ω.

Ahora definiremos los objetos geométricos: llamaremos punto a cualquier par de números (x, y) que PERTENEZCAN AL CONJUNTO Ω; recta, a la razón $(u : v : w)$ de tres números de este mismo conjunto, asumiendo que al menos uno de los dos números u y v es diferente de cero.

Todas las relaciones mutuas entre los objetos (pertenencia de puntos a rectas, congruencia, etc.) se definen igual a como lo hicimos en el § 71, al construir la realización cartesiana de los axiomas I — V; sin embargo, ahora escogeremos los coeficientes de las fórmulas de una transformación ortogonal sólo dentro del conjunto Ω. Al verificar los axiomas I, II, III, V, hemos utilizado sólo comparación de números,

operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) y la operación de extracción de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dos números (esta última operación se utilizó al normalizar los parámetros de una semirrecta). Como observamos más arriba, estas operaciones, aplicadas a números del conjunto Ω, producen nuevamente números de este conjunto. Por ello, todas las conclusiones que hicimos al verificar los axiomas I, II, III, V en la realización cartesiana, siguen teniendo valor ahora, al restringir la elección de los números utilizados al conjunto Ω. En consecuencia, se puede afirmar que en nuestra nueva realización se satisfacen todas las condiciones contenidas en los axiomas I, II, III, V.

La situación es diferente con los axiomas del grupo IV. Verifiquemos por separado los axiomas de Arquímedes IV,1 y de Cantor IV,2. Obsérvese, ante todo, que mediante un desplazamiento congruente (en nuestra realización, mediante una transformación ortogonal) toda semirrecta puede superponerse a cualquier semirrecta dada. Por esto, basta verificar la condición de Arquímedes en una recta cualquiera. Para nuestros fines lo más sencillo es tomar el eje x, es decir, la recta que contiene los puntos del tipo $(x, 0)$. Evidentemente, los puntos $A_0(0, 0)$, $A_1(a, 0)$, $A_2(2a, 0)$, ... , $A_n(na, 0)$, ... , donde $a > 0$, determinan una sucesión de segmentos congruentes $A_0A_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv A_nA_{n+1} \equiv \ldots$ En efecto, existe una transformación ortogonal, precisamente:

$$x' = x + a,$$
$$y' = y,$$

que aplica cada uno de estos segmentos en su vecino de la derecha. Sea $B(b, 0)$ un punto cualquiera, que satisfaga la única condición $b > a$. Para que en nuestra realización tenga lugar el axioma de Arquímedes, debe existir un entero positivo n, tal que B se encuentre entre A_0 y A_n. Los puntos A_0, B, A_n estarán dispuestos en el orden indicado, si $na > b$. Pero en la aritmética la proposición de Arquímedes es verdadera: cualesquiera que sean los números $a > 0$, $b > 0$, $b > a$, existe un entero n tal que $na > b$. Por lo tanto, la proposición de Arquímedes tiene lugar también en la realización que estamos considerando.

Por el contrario, el axioma de Cantor no se cumple en esta realización. En efecto, si en un sistema de puntos y rectas, conjuntamente con los axiomas I, II, III, IV,1, V, tiene lugar también el axioma de Cantor IV,2, entonces es posible demostrar que en este sistema siempre se puede hallar un segmento cuya longitud sea igual a cualquier número prefijado de antemano (véase el capítulo II, § 21, teorema 35). En nuestra realización, en cambio, las longitudes de todos los segmentos se expresan únicamente por medio de puntos del conjunto Ω.

Llegamos, así, a la siguiente conclusión: existe un sistema de objetos cuyas relaciones mutuas satisfacen los axiomas I — III, IV,1, V, pero no satisfacen el axioma de Cantor IV,2. Dicho de otro modo, *el axioma de Cantor no es consecuencia de los demás de la geometría elemental.*

Si se toma en cuenta que el conjunto Ω es numerable, el resultado obtenido puede expresarse también de otro modo: *no es posible establecer que el conjunto de los elementos de la geometría es no numerable, si se utilizan sólo los axiomas* I — III, IV,1, V, *sin el axioma de Cantor.*

§ 73. Ahora probaremos que también el primer axioma del cuarto grupo, es decir, el axioma de Arquímedes, es independiente de los axiomas de los grupos restantes I, II, III, V.

Para esto, tendremos que hallar una realización de los axiomas I, II, III, V, en donde no tenga lugar la proposición de Arquímedes; tal realización existe, y se indicará más abajo. Al igual que la que acabamos de discutir, se basa en la aritmética, sólo que en un cierto sentido generalizado, que se refiere al llamado sistema no arquimediano de números.

A fin de aclarar al máximo la exposición que sigue, enumeremos las proposiciones básicas que se refieren a las propiedades de los números reales (las llamaremos axiomas de la aritmética).

1. Existe una operación llamada «suma», por medio de la cual del número a y el número b se obtiene un número determinado c; en notación simbólica,

$$a + b = c.$$

2. Existe otra operación, el «producto», mediante la cual del número a y el número b se obtiene un número determinado d; en símbolos,

$$ab = d.$$

3. Si a, b, c son números arbitrarios, tienen lugar las relaciones:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$a + b = b + a,$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$a(b + c) = ab + ac,$$

$$ab = ba.$$

4. (Definición de la diferencia.) Si a y b son números dados, existe un número x, y sólo uno, tal que $a + x = b$.

De los axiomas 3 y 4 sigue que existe un número, y sólo uno —que se llama cero y se denota con 0— , tal que para cada número a tiene lugar la relación

$$a + 0 = a.$$

5. (Definición del cociente.) Si a y b son números dados y $a \neq 0$, existe un número x, y sólo uno, tal que $ax = b$.

De los axiomas 3 y 5 sigue que existe un número, y sólo uno —que se llama unidad y se denota por 1—, tal que

$$a \cdot 1 = a.$$

6. (Propiedad de orden.) Si a y b son dos números diferentes, siempre uno de ellos es mayor ($>$) que el otro; entonces el segundo es menor ($<$) que el primero. En notación simbólica,

o bien

$$a > b \quad \text{y} \quad b < a,$$

o bien

$$b > a \quad \text{y} \quad a < b.$$

Además, si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$. Para ningún a tiene lugar la relación $a > a$.

7. (Proposición de Arquímedes.) Si a y b son dos números positivos arbitrarios ($a > 0$ y $b > 0$), siempre se puede tomar el número a en calidad de sumando tantas

veces como para que la suma obtenida sea mayor que el número b:

$$a + a + \ldots + a > b.$$

8. Proposición de Cantor (o cualquier otra equivalente a ella).

Todas estas proposiciones son aplicables al conjunto de los números reales con las operaciones aritméticas habituales. No nos interesa aquí decidir si las proposiciones 1 — 8 enumeradas constituyen un sistema completo de axiomas de la aritmética, es decir, si se puede, a partir de éstas, demostrar cualquier teorema aritmético. Pero si se analizaran con atención los razonamientos y cálculos que hemos efectuado al verificar los requisitos de los axiomas geométricos en la realización cartesiana, se podría comprobar que hemos utilizado únicamente propiedades de los números, expresadas en las proposiciones 1 — 8. Por esto, resulta posible considerar el concepto de número desde un punto de vista axiomático, ampliando así considerablemente la clase de objetos de la realización aritmética. Esta posibilidad jugará un papel importante en nuestro estudio.

Imaginémonos cierto conjunto A, cuyos elementos serán de naturaleza indiferente para nosotros. Supongamos que a cada par de elementos a, b del conjunto A (b puede coincidir con a) se le ha puesto en correspondencia un elemento c del mismo conjunto. Convendremos en llamar adición a esta correspondencia, y al elemento c, suma de los elementos a y b; para denotar la suma, utilizaremos la notación habitual: $c = a + b$. Supongamos, además, que a cada par de elementos a, b de A (b nuevamente puede coincidir con a) se le ha puesto en correspondencia, por otra regla, un elemento d de este conjunto. Llamaremos multiplicación a la segunda correspondencia, y al elemento d, producto de los elementos a y b, y escribiremos: $d = ab$.

Por último, supongamos que los elementos del conjunto A se asumen dispuestos en un orden determinado, es decir, cualesquiera que sean dos elementos diferentes a y b, uno bien determinado de ellos se considera precedente del otro; convendremos en decir que el elemento precedente es «menor» que el que le sigue.

Llamaremos números generalizados a los elementos del conjunto A, si las operaciones de suma y producto, así como también el orden de disposición de los elementos, están definidos de manera que se cumplan todas las relaciones indicadas en las proposiciones 1 — 8.

Supongamos, ahora, que definimos objetos geométricos y las relaciones mutuas entre ellos de manera idéntica a como lo hicimos al construir la realización cartesiana, pero tomando números generalizados en lugar de los habituales. Evidentemente, obtendremos cierta realización de los axiomas geométricos I — V, cualquiera que sea la naturaleza de los números generalizados utilizados. Es totalmente claro que las realizaciones así construidas no se diferencian de manera esencial de la cartesiana. En efecto, aunque al construir los objetos geométricos nos permitimos utilizar elementos de naturaleza arbitraria, estamos sometiendo las operaciones con estos elementos a las reglas de la aritmética ordinaria.

Sin embargo, es posible una generalización ulterior del concepto de número, que ya resulta ser útil y permite resolver el problema planteado: demostrar la independencia del axioma de Arquímedes de los axiomas I, II, III, V. Sea dado cierto conjunto A, para cuyos elementos se han definido las operaciones de suma y producto, y se ha establecido un orden; diremos que el conjunto A es un sistema no arquime-

diano de números (generalizados), si en éste son verdaderas las proposiciones 1 — 6, pero no así la proposición 7 de Arquímedes.

Daremos, ahora, la descripción de un sistema no arquimediano.

Consideremos el conjunto de todas las funciones racionales del tipo

$$\omega(t) = \frac{a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0t^m + b_1t^{m-1} + \ldots + b_m}$$

con coeficientes reales a_k, b_k. Le agregaremos, además, todas las funciones que se obtienen a partir de las racionales aplicando reiteradamente las operaciones de suma, resta, producto, cociente y la quinta operación $\sqrt{1 + \omega^2(t)}$, donde $\omega(t)$ es una función ya obtenida por medio de estas operaciones. Denotaremos con $\Omega(t)$ el conjunto de funciones construido de esta manera. Evidentemente, $\Omega(t)$ contiene todas las funciones racionales y, en particular, las funciones del tipo $\omega(t) = \text{const.}$, es decir, las funciones que al variar t se mantienen siempre iguales a un cierto número.

Queremos considerar los elementos del conjunto $\Omega(t)$ como números generalizados. Para esto, tendremos que definir, ante todo, el sentido de las operaciones de suma y producto. Tomemos dos funciones cualesquiera $a(t)$ y $b(t)$ de $\Omega(t)$; con la convención de considerarlas números generalizados, cambiaremos la forma de su escritura y pondremos sencillamente a, b en lugar de $a(t)$, $b(t)$. Claramente, $a(t) + b(t) = c(t)$ es una función del conjunto $\Omega(t)$, y otro tanto puede decirse de $a(t)b(t) = d(t)$. Por esto, $c(t)$ y $d(t)$ son, asimismo, números generalizados c y d; llamaremos al primero suma de los números a y b, y al segundo, producto de estos números. Como para cada valor de t*) las operaciones $a(t) + b(t)$ y $a(t)b(t)$ se efectúan según las reglas habituales de la aritmética, las operaciones que acabamos de definir de suma y producto de números generalizados satisfacen las condiciones de las proposiciones 1 — 5. Aquí el cero de nuestro sistema de números generalizados será la función idénticamente igual al 0 habitual, mientras que la unidad generalizada es la función idénticamente igual a la unidad usual.

Como en el sistema dado de números generalizados se observan las proposiciones 1 — 5, las cuatro operaciones aritméticas resultan bien definidas. Obsérvese que en nuestro sistema está definida, además, la operación $\sqrt{a^2 + b^2}$; en efecto, si $a(t)$ y $b(t)$ son dos funciones de $\Omega(t)$ y $a(t)$ no es idénticamente nula, pongamos

$$\sqrt{a^2(t) + b^2(t)} = \pm\, a(t)\sqrt{1 + \left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)^2}.$$

Entonces el segundo miembro de esta igualdad da también una función de $\Omega(t)$. Esta función puede ser considerada como el número generalizado $\sqrt{a^2 + b^2}$, que se determina a partir de dos números dados a y b (cómo hay que cambiar la definición para $a = 0$, se propone aclararlo al lector).

Ahora definiremos el orden en el conjunto $\Omega(t)$. Sea $\omega(t)$ una función arbitraria de $\Omega(t)$, que representa en nuestro sistema al número ω. Si $\omega \neq 0$, es decir, si $\omega(t)$

---

*) En rigor, no es para cada valor de t, sino para aquellos t pertenecientes tanto al dominio de $a(t)$ como de $b(t)$ (es decir, para los valores de t que no anulan el denominador de a, ni el de b). Una observación similar cabe en la definición del cociente $a(t)/b(t)$ (si b no es idénticamente cero). (*N. del Tr.*)

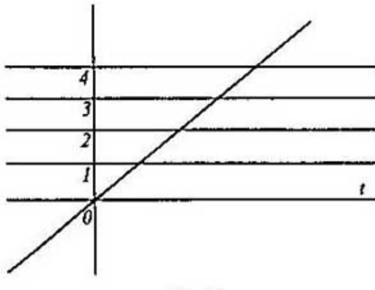


Fig. 86

no es idénticamente nula, para un t^* suficientemente grande tendremos que, para todo $t > t^*$, la función $\omega(t)$ tendrá un signo constante*). Si $\omega(t) > 0$ para $t > t^*$, convendremos en considerar positivo al número generalizado ω: $\omega > 0$; si, en cambio, para $t > t^*$ tiene lugar la desigualdad $\omega(t) < 0$, consideraremos que $\omega < 0$. Una vez divididos, así, todos los números generalizados (excepto el cero) en los positivos y los negativos, introducimos la comparación de los números mediante la condición habitual: consideraremos que $a > b$, si $a - b > 0$.

Es fácil comprobar que todos los requisitos de la proposición 6 serán satisfechos aquí.

Sin embargo, en nuestro sistema de números generalizados la proposición 7 no tiene lugar; el sistema es, en consecuencia, no arquimediano.

A fin de comprobarlo, resulta más cómodo representar el criterio de desigualdad $a > b$ enunciado arriba en la siguiente forma geométrica: $a > b$, si para $t \to +\infty$ la gráfica de la función $a(t)$ se encuentra por encima de la gráfica de $b(t)$. Como ya observamos, entre los elementos del conjunto $\Omega(t)$ se encuentran las funciones que al variar t mantienen un valor constante: $\omega(t) \equiv c$. Las gráficas de tales funciones son rectas paralelas al eje t. Cada función $\omega(t) \equiv c$ representa, desde nuestro punto de vista, un número generalizado; lo representaremos simplemente por c, de forma que, al escribir 10 ó 20, sobreentendemos la función $\omega(t)$ idénticamente igual a 10 o a 20. Tomemos las dos funciones $a(t) \equiv 1$ y $b(t) \equiv t$, que están en el conjunto $\Omega(t)$ y, en consecuencia, pueden ser consideradas como números generalizados a y b. Si sumamos el número a consigo mismo n veces, la suma obtenida se representa en el conjunto $\Omega(t)$ por una función cuya gráfica es una recta paralela al eje t y situada en el semiplano positivo a una distancia n de este eje. La gráfica de la función $b(t) \equiv t$ es la bisectriz del primer ángulo coordenado. Pero cuando $t \to +\infty$, la gráfica de esta función pasa por encima de cualquier recta paralela al eje t (fig. 86). De aquí sigue que cualquiera que sea la cantidad de veces que el número a se sume consigo mismo, para la suma obtenida siempre tendrá lugar la desigualdad

$$a + a + \dots + a < b.$$

*) Esto sigue de que la función $\omega(t)$ es algebraica (toda función algebraica tiene un número finito de cambios de signo).

Así, entonces, en nuestro sistema de números generalizados la proposición de Arquímedes no tiene lugar.

Ahora no resulta difícil construir un sistema de objetos geométricos en el cual se realicen los axiomas I, II, III, V, pero en donde sea falso el axioma de Arquímedes.

Llamaremos punto a un par de números (x, y) DEL SISTEMA NO ARQUIMEDIANO $\Omega(t)$, recta, a la razón $(u : v : w)$ de tres números u, v, w del sistema $\Omega(t)$, sujetos a la única condición de que al menos uno de los dos números u, v sea diferente de cero. Todas las relaciones mutuas entre los objetos geométricos son definidas de manera idéntica a como lo hicimos en la realización cartesiana de los axiomas de Hilbert. En el sistema $\Omega(t)$ están definidas las operaciones de suma y producto de elementos, así como también las relaciones «mayor» y «menor», en correspondencia con los axiomas de la aritmética 1 — 6. Además, para dos elementos a y b arbitrarios, está definida la operación $\sqrt{a^2 + b^2}$. Por esto, todos los razonamientos y cálculos que efectuamos al verificar los axiomas I, II, III, V en la realización cartesiana, pueden ser repetidos en su totalidad ahora, cuando en lugar de los números ordinarios utilizamos los números generalizados del sistema $\Omega(t)$. Por lo tanto, en la realización que acabamos de construir se satisfacen los axiomas I, II, III, V. En cambio, la proposición de Arquímedes IV,1 no tiene lugar en esta realización, pues el sistema de números $\Omega(t)$ es no arquimediano. De aquí se desprende que el axioma de Arquímedes no depende de los axiomas I, II, III, V.

Resumiendo lo expuesto, podemos enunciar la siguiente proposición:

Utilizando los axiomas I, II, III, V, *no es posible demostrar el axioma de Arquímedes* IV,1.

Utilizando los axiomas I, II, III, IV,1 V, *es imposible probar el axioma de Cantor* IV,2.

Es natural plantearse la pregunta: ¿no se desprende el axioma de Arquímedes de los restantes, incluyendo el axioma de Cantor? También aquí la respuesta es negativa.

Para comprobarlo, debe construirse un sistema no arquimediano de números en donde la proposición de Cantor tenga lugar.

Presentaremos un ejemplo de tal sistema*).

Convendremos en llamar número a toda serie de potencias**)

$$a_0t^n + a_1t^{n+1} + a_2t^{n+2} + \dots,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots$ son números reales ordinarios arbitrarios, y n, un entero ordinario cualquiera (positivo, negativo o cero). Incluiremos los números reales ordinarios en el sistema considerado, como series del tipo

$$a + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$$

Llamaremos cero a la serie

$$0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$$

Si el número

$$a_0t^n + a_1t^{n+1} + \dots$$

no es cero, supondremos que el número ordinario a_0 es diferente de cero.

*) Este ejemplo me fue presentado por A. N. Kolmogórov.

**) Se trata de series *formales*, es decir, no se plantea para nada su posible convergencia. (*N. del Tr.*)

Supongamos que la adición y la multiplicación coinciden con las operaciones formales de adición y multiplicación de series de potencias (es decir, la suma de dos números de nuestro sistema, representados por dos series de potencias cualesquiera, se define como la serie de potencias obtenida sumando términos semejantes de las series que representan los sumandos; llamaremos producto de dos números de nuestro sistema, representados por dos series de potencias cualesquiera, a la serie de potencias que se obtiene multiplicando cada término de una de las series, que representan a los factores, por cada término de la otra, reduciendo luego términos semejantes y ordenándolos en potencias crecientes del argumento t).

No es difícil comprobar que los axiomas 1 — 5 de la aritmética se satisfacen. Además, en nuestro sistema está definida la operación $\sqrt{1+\omega^2}$, donde ω es un número cualquiera del sistema. La determinación del cociente $x = \dfrac{b}{a}$, con la condición de que $a \neq 0$, se reduce a la determinación sucesiva de los coeficientes desconocidos de la serie x, por medio de la comparación de los términos de ambos miembros de la ecuación

$$ax = b;$$

la determinación del número

$$x = \sqrt{1+\omega^2}$$

se efectúa análogamente, por medio de la ecuación

$$x^2 = 1 + \omega^2.$$

Ahora introduciremos un orden en el conjunto de nuestros números. Convendremos en llamar positivo (mayor que cero) al número

$$a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + \dots,$$

$a_0 \neq 0$, si $a_0 > 0$, y negativo (menor que cero), si $a_0 < 0$. Si a y b son dos números de nuestro sistema, convendremos en considerar que $a > b$, si $a - b > 0$, y que $a < b$, si $a - b < 0$. El orden así establecido satisface las condiciones del axioma 6 de la aritmética.

Verifiquemos que en nuestro sistema tiene lugar la proposición de Cantor. Sean dadas una sucesión monótona creciente de números de nuestro sistema

$$a^{(m)} = a_0^{(m)} t^{p_m} + \dots, \quad m = 1, 2, \dots,$$

y una sucesión monótona decreciente

$$b^{(m)} = b_0^{(m)} t^{q_m} + \dots, \quad m = 1, 2, \dots,$$

tales que 1) cualquier número de la sucesión $a^{(m)}$ es menor que cualquiera de la sucesión $b^{(m)}$; 2) cualquiera que sea el número positivo ε (de nuestro sistema), existe un índice m para el cual

$$b^{(m)} - a^{(m)} < \varepsilon.$$

Demostremos que existe un (único) número de nuestro sistema, que está en el interior de todos los segmentos $(a^{(m)}, b^{(m)})$.

Obsérvese, ante todo, que las sucesiones numéricas ordinarias p_m y q_m ($m = 1$, 2, ...) están acotadas por debajo. En efecto, si entre los números habituales p_m hay números situados a la izquierda de 0 y tan lejos como se quiera de éste, de la suce-

sión de exponentes p_m se puede escoger una subsucesión que tiende monótonamente a $-\infty$; los coeficientes iniciales respectivos deben ser positivos, pues de lo contrario se violaría la condición de crecimiento monótono de la sucesión de números de nuestro sistema $a^{(m)}$. Pero, en tal caso, alguno de los números $a^{(m)}$ será mayor que un cierto número de los $b^{(m)}$, cosa imposible.

Análogamente se demuestra la acotación por debajo de los números q_m. Podemos, pues, considerar formalmente que todas las series que representan a $a^{(m)}$ y $b^{(m)}$, comienzan con términos de una misma potencia (admitiendo, durante el transcurso de esta demostración, valores nulos para los coeficientes iniciales).

Escribiremos ahora estas series como sigue:

$$a^{(m)} = a_0^{(m)}t^n + a_1^{(m)}t^{n+1} + \dots,$$
$$b^{(m)} = b_0^{(m)}t^n + b_1^{(m)}t^{n+1} + \dots$$

Es fácil ver que, a partir de cierto $m = m_1$, la diferencia no negativa $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ debe hacerse igual a cero. Efectivamente, como la sucesión $a^{(m)}$ es creciente, la sucesión de los números (ordinarios) $a_0^{(m)}$ debe ser no decreciente. Análogamente, como la sucesión $b^{(m)}$ es decreciente, la sucesión de números (ordinarios) $b_0^{(m)}$ debe ser no creciente. Por tanto, la diferencia (de los números ordinarios) $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ no puede crecer. En consecuencia, o bien la diferencia $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ es positiva todo el tiempo, o bien es igual a 0 para algún índice y entonces permanecerá ya igual a 0 para todos los índices subsiguientes. Supongamos que siempre es

$$b_0^{(m)} - a_0^{(m)} > 0;$$

tomemos en nuestro sistema el número positivo

$$\varepsilon = t^{n+1} + \dots$$

Entonces, para todo índice será

$$b^{(m)} - a^{(m)} > \varepsilon,$$

contra lo supuesto. Así, pues, la diferencia $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ no puede permanecer positiva.

Concluimos que a partir de cierto $m = m_1$,

$$b_0^{(m)} - a_0^{(m)} = 0.$$

Como la sucesión de los números ordinarios $a_0^{(m)}$ es monótona no decreciente, y la sucesión de los números ordinarios $b_0^{(m)}$, monótona no creciente, a partir de $m = m_1$ los números $a_0^{(m)}$ y $b_0^{(m)}$ serán constantes e iguales; hagamos $a_0^{(m_1)} = b_0^{(m_1)} = d_0$. Tenemos, entonces:

$$a_0^{(m)} \leqslant d_0 \leqslant b_0^{(m)}.$$

Para $m \geqslant m_1$, razonamientos análogos, aplicados a las sucesiones de números ordinarios $a_1^{(m)}$, $b_1^{(m)}$, nos permiten establecer que existe un número d_1 tal que, para $m \geqslant m_1$, satisface las desigualdades

$$a_1^{(m)} \leqslant d_1 \leqslant b_1^{(m)}$$

y además, a partir de algún $m = m_2 (m_2 \geqslant m_1)$, se anula la diferencia $b_1^{(m)} - a_1^{(m)}$, etc.

El número $d = d_0t^n + d_1t^{n+1} + \ldots$ está en el interior de todos los segmentos $(d^{(m)}, b^{(m)})$. Con esto queda demostrada la afirmación de Cantor para nuestro sistema de números (la unicidad del número d se desprende inmediatamente de la segunda condición en el enunciado del axioma de Cantor).

En el sistema dado de números no tiene lugar la proposición de Arquímedes. En efecto, tomemos los dos números positivos

$$a = t + 0 \cdot t^2 + \ldots,$$
$$b = t^2 + 0 \cdot t^3 + \ldots;$$

para todo n natural tenemos:

$$nb < a,$$

es decir, la condición del axioma de Arquímedes no se cumple.

En la realización aritmética de los axiomas de Hilbert, basada en el sistema de números que acabamos de describir, tiene lugar la proposición de Cantor (así como también todos los axiomas I, II III, V), pero no se observa la de Arquímedes.

Podemos, en consecuencia, afirmar:

Basándose en los axiomas I, II, III, IV,2, V, *no es posible demostrar el axioma de Arquímedes* IV,1.

Así, entonces, los dos axiomas que constituyen el grupo IV de axiomas de continuidad son esenciales.

El sistema geométrico que puede ser desarrollado a base de los axiomas I, II, III (o bien I, II, III, V) y en donde no tiene lugar el principio de Arquímedes, lleva el nombre de *no arquimediano*. En la geometría no arquimediana el proceso de medición de longitudes no es aplicable a segmentos cualesquiera; además, muchas proposiciones de esta geometría se distinguen singularmente tanto de las proposiciones de la geometría euclidiana, como de las proposiciones de la de Lobachevski. Esto no debe asombrarnos, pues el axioma de Arquímedes se utiliza en la demostración de muchos teoremas. En particular, en la geometría no arquimediana no son válidos los resultados de Legendre, que establecen la dependencia entre el axioma de paralelismo y la proposición que se refiere a la suma de los ángulos de un triángulo (para más detalles, véase *D. Hilbert*, Fundamentos de la Geometría*)).

4. Axioma de completitud

§ 74. En el cap. II las propiedades de continuidad fueron expresadas con dos axiomas: el de Arquímedes, IV,1, y el de Cantor, IV.2. En los «Fundamentos de la Geometría» de Hilbert, el primer axioma de continuidad es, al igual que en nuestra exposición en el cap. II, el axioma de Arquímedes; el segundo axioma de continuidad difiere del de Cantor y fue llamado por Hilbert *axioma de completitud*. Esta proposición se enuncia como sigue.

Los elementos (puntos, rectas, planos) de la geometría forman un sistema de objetos que, con la condición que se cumplan todos los axiomas adoptados antes, no admite extensión alguna, es decir, el sistema de puntos, rectas y planos es tal que no se le puede agregar nuevos puntos, rectas y planos de forma que en el nuevo sistema extendido se sigan satisfaciendo todos los axiomas I — III, IV,1, V.

---

*) Véase, por ejemplo, la traducción castellana publicada en Madrid, 1973. (*N. del Tr.*)

La conservación de todos los axiomas, referida en esta proposición, debe entenderse como sigue: luego de extender el sistema, las condiciones contenidas en todos los axiomas se siguen satisfaciendo como antes, de manera que, en particular, las relaciones existentes entre los elementos — su orden, la congruencia de segmentos y ángulos, etc. — no se violan. Así, por ejemplo, un punto que antes de la extensión se encuentra entre otros dos, sigue estando entre ellos también después de la extensión; segmentos y ángulos congruentes antes, siguen siéndolo después de la extensión. A fin de poner más en claro el significado de la condición de completitud del sistema de elementos de la geometría, comparemos las dos realizaciones de los axiomas, que hemos discutido en los §§ 71 y 72.

La primera es la realización cartesiana, que satisface todos los axiomas sin excepción. En esta realización se llama *punto* a un par (x, y) de números reales cualesquiera; *recta*, a la razón $(u : v : w)$ de tres números reales, que se escogen con la única condición de que al menos uno de los dos números u, v sea diferente de cero. Las relaciones mutuas entre los objetos se expresan en relaciones aritméticas, que no repetiremos aquí.

La realización analizada en el § 72 se construye en forma totalmente análoga a la cartesiana. Aquí un punto es también un par de números reales; una recta, una razón de tres números; las relaciones mutuas entre los objetos se definen por las mismas relaciones aritméticas que en la realización cartesiana. Pero en esta realización, a diferencia de la cartesiana, los objetos se construyen no a partir de todos los números reales, sino únicamente de los que pertenecen a cierto conjunto Ω, que fue descrito detalladamente en su oportunidad. Por lo tanto, la colección de objetos de la realización considerada en el § 72 constituye una parte del conjunto de objetos de la realización cartesiana, pero tanto en una como en otra se satisfacen todos los axiomas I — III, IV,1, V.

Imaginémonos el conjunto de objetos determinados con ayuda de los números de Ω como el dado inicialmente, y el conjunto de objetos de la realización cartesiana, como el obtenido después de completar el primero. Como las relaciones mutuas entre los objetos de las dos realizaciones analizadas se expresan por iguales dependencias aritméticas (sólo que en un caso estas dependencias se refieren a todos los números reales, y en el segundo, a los números reales de cierto conjunto), en la completación indicada todas las relaciones mutuas entre los objetos dados inicialmente se conservan. Por ejemplo, si A, B, C, D son cuatro puntos del conjunto inicial y $AB \equiv CD$, después de agregar los nuevos elementos seguirá siendo $AB \equiv CD$. Además, están bien definidas tanto las relaciones entre los nuevos objetos y los iniciales, como las relaciones entre los nuevos elementos, y de manera tal que se satisfacen las condiciones de todos los axiomas originales.

Consecuentemente, la colección de objetos determinados por el método descrito, partiendo de números del conjunto Ω, admite precisamente una completación prohibida por el axioma de completitud. Dicho de otro modo, está colección de objetos no satisface el requisito de completitud.

Es natural que se puede exhibir una cantidad infinita de sistemas similares de objetos. Para esto, sólo hace falta variar adecuadamente la construcción del conjunto del que tomamos los números utilizados. Así, por ejemplo, en lugar del conjunto Ω se puede tomar como base de la construcción de los objetos el conjunto de números

que se expresan por medio de radicales, o bien el conjunto aún más grande de todos los números algebraicos, etc. Entre las realizaciones aritméticas que se obtienen así, sólo la cartesiana (basada en el conjunto de todos los números reales) satisface la condición de completitud. Para comprobarlo, debe observarse, en primer lugar, que de todas las realizaciones aritméticas únicamente la cartesiana satisface el axioma de Cantor (o la condición de Dedekind) y, en segundo lugar que del axioma de Cantor, si se dispone de los demás axiomas, sigue la proposición de completitud. La primera afirmación no necesita ser demostrada. En efecto, en la realización cartesiana se satisface el axioma de Cantor, como fue probado antes; por otra parte, el axioma de Cantor se satisface sólo en la realización cartesiana, entre todas las aritméticas, pues la condición de Cantor (o la de Dedekind) no se cumple para cualquier conjunto numérico que no contenga aunque sea un número.

La segunda afirmación será demostrada. Además probaremos no sólo que del axioma de Cantor, unido a los restantes axiomas, se desprende la proposición de completitud, sino que, recíprocamente, la afirmación del axioma de Cantor puede ser demostrada si a los demás axiomas se agrega la condición de completitud. Detallaremos lo dicho en forma del siguiente enunciado:

Si un sistema de elementos geométricos satisface los axiomas I — V, *no se la puede extender observando las condiciones de la proposición de completitud, es decir, la proposición de completitud sigue de los axiomas* I — V. *Si un sistema de elementos geométricos satisface los axiomas* I — III, IV,1,V *y la condición de completitud, entonces en éste tiene lugar la proposición de Cantor, es decir, la proposición de Cantor se desprende de los axiomas* I — III, IV,1,V *más el axioma de completitud.*

Demostremos ante todo la primera parte de esta proposición. Sea Σ un conjunto de elementos geométricos, es decir, un sistema de puntos, rectas y planos cuyas relaciones mutuas satisfagan los axiomas I — V. Supongamos que el conjunto Σ puede ser ampliado, agregando nuevos elementos, de forma que se cumplan las condiciones indicadas en el enunciado de la proposición de completitud. Sea Σ' la colección de elementos obtenida luego de la extensión. Las relaciones mutuas de los elementos del conjunto ampliado también satisfacen los axiomas I — V. En el § 22 hemos demostrado que, basándonos en los axiomas I — III, IV,1, se puede establecer una aritmetización de los elementos de la geometría, de manera que cada punto tenga como coordenadas una terna bien determinada (x, y, z) de números y que ninguna terna de números corresponda a puntos diferentes. Introduzcamos coordenadas en el conjunto Σ', eligiendo como unidad de medida de longitudes un segmento cuyos extremos pertenezcan al conjunto Σ. Supongamos que Σ' tiene puntos que no están en Σ. Sea M' uno de estos puntos, y (x, y, z), sus coordenadas. Por hipótesis, el conjunto inicial de elementos Σ satisface los axiomas I — V. Como consecuencia de esto, y en virtud del teorema 35, § 21, entre los puntos del conjunto Σ siempre se puede hallar uno que tenga coordenadas prefijadas de antemano. Sea M el punto de Σ con coordenadas (x, y, z). Como M' no está en Σ, M' y M no pueden coincidir. Entonces, la terna de números (x, y, z) corresponde a dos puntos diferentes M y M'. La contradicción obtenida nos muestra que Σ' no tiene más puntos de los que ya están en Σ.

Supongamos que Σ' tiene rectas que no están en Σ. Sea a' una de ellas. En vir-

tud del axiomas I,3, la recta a' tiene al menos dos puntos A y B. Ambos pertenecen a Σ, pues Σ' no contiene nuevos puntos. Pero el conjunto Σ es, por sí solo, una realización de los axiomas I — V. Por eso, el par de puntos A y B determina una recta a, perteneciente a Σ. Como a' no está incluida en Σ, a' y a no pueden coincidir. Entonces, los puntos A y B determinan dos rectas diferentes, en contra del axioma I,2. La contradicción obtenida muestra que Σ' no tiene más rectas que las ya contenidas en Σ. Análogamente se prueba que Σ' tampoco contiene nuevos planos. Con esto hemos demostrado que Σ no puede ser extendida, es decir, satisface la condición de completitud.

Ahora demostraremos la segunda parte de la afirmación. Para simplificar, nos limitaremos a considerar la geometría del plano. Supongamos que ahora Σ denota un conjunto de puntos y rectas con respecto al cual se satisfacen los axiomas I — III, IV,1, V. El axioma de Cantor IV,2 no lo adoptamos de antemano; en su lugar, supondremos que el conjunto Σ satisface la condición de completitud.

Debemos obtener la proposición de Cantor como consecuencia de las premisas adoptadas. Para esto, introduciremos en el conjunto Σ un sistema de coordenadas en la forma hecha en el § 22, escogiendo de manera arbitraria dos rectas mutuamente perpendiculares y un segmento como unidad de escala. Entonces, a cada punto le corresponderá un par de coordenadas (x, y). Si pudiésemos basarnos en el axioma de Cantor, podríamos también afirmar, en virtud del teorema 35, § 21, que las coordenadas de los puntos del conjunto Σ cubren todos los pares posibles de números. Sin disponer de este axioma, trataremos, con todo, de demostrar esta afirmación, recurriendo al axioma de completitud. Hecho esto, se podrá establecer directamente que en el conjunto Σ tiene lugar el principio de Cantor.

Para los puntos y rectas del conjunto Σ son válidos todos los teoremas de la geometría euclidiana, con la posible excepción de algunos que se refieren a las propiedades de continuidad (pues entre los axiomas adoptados no está el IV,2). En todo caso, el sistema de coordenadas escogido tendrá las características principales del sistema cartesiano de coordenadas. En este sistema, una recta se determina por una ecuación de primer grado

$$ux + vy + w = 0,$$

de modo que a cada recta le corresponderá una razón de tres números $(u : v : w)$. Utilizando el aparato usual de la geometría analítica, podemos caracterizar todas las relaciones mutuas entre puntos y rectas del conjunto Σ, referidas en los axiomas I — III, IV,1, V, por medio de dependencias aritméticas, que contienen las coordenadas x, y de los puntos y los coeficientes u, v, w de las ecuaciones de las rectas. Resulta evidente que las formas de estas dependencias serán idénticas a las que hemos utilizado al describir la realización cartesiana de los axiomas geométricos.

Supongamos, ahora, que existen pares de números (x, y) que no son pares de coordenadas de puntos de Σ, y razones $(u : v : w)$ que no son razones de coeficientes de ecuaciones de rectas de Σ. En este caso, como mostraremos ahora, el conjunto de elementos de la geometría Σ se puede extender, observando las condiciones indicadas en el enunciado de la proposición de completitud.

Agreguemos al conjunto Σ nuevos puntos y rectas, determinándolos como sigue: un nuevo punto es cualquier par de números (x, y) que no sea un par de coordenadas de algún punto de Σ; una nueva recta es una razón de tres números cualesquiera

$(u : v : w)$, tales que al menos uno de los dos números u, v es diferente de cero, y que los números u, v, w no son coeficientes de la ecuación de alguna recta de Σ. Denotemos con Σ' el conjunto de puntos y rectas obtenido después de la extensión. Los puntos y las rectas de Σ' se determinan unívocamente por pares de números (x, y) y por razones de tres números $(u : v : w)$ respectivamente: además como tales representantes aritméticos de los elementos de Σ se encontrarán ahora todas las combinaciones posibles de todos los números reales.

Todas las relaciones mutuas entre los elementos de Σ' se definen exactamente con las mismas dependencias aritméticas que encontramos al describir la realización cartesiana. Evidentemente, en este caso para los puntos y rectas del conjunto Σ' se cumplirán los axiomas I — III, IV,1, V, por cuanto éstos se satisfacen en la realización cartesiana. Además, de nuestras observaciones previas se desprende que las relaciones mutuas entre los elementos del conjunto Σ' que pertenecen a Σ, no se diferencian de las que ya se tenían inicialmente entre los elementos de Σ, antes de la extensión. Efectivamente, estas relaciones antes y después de la extensión se caracterizan por iguales relaciones aritméticas. El conjunto Σ ha sido, pues, extendido observando las condiciones indicadas en el enunciado de la proposición de completitud. Pero como dicha proposición ha sido aceptada, y ésta excluye la posibilidad de una tal extensión, debemos concluir que como coordenadas (x, y) de los puntos del conjunto dado Σ deben estar presentes todos los pares posibles de números reales. Pero en tal caso cada recta de Σ puede ser considerada como un eje numérico, cuyos puntos representan todos los números reales. Como el principio de Cantor tiene lugar en el conjunto de los números reales, también debe ser válido en el conjunto de puntos de cada recta de Σ.

Hagamos un resumen de nuestra investigación.

Hemos demostrado que si se dispone de los axiomas I — III, IV,1, V, la continuidad del conjunto de los elementos de la geometría puede asegurarse de dos formas equivalentes: tomando como axioma o bien la proposición de Cantor relativa a un sistema contractante de segmentos, o bien la de Hilbert, que se refiere a la completitud del sistema de los elementos geométricos. Si se acepta una de estas proposiciones sin demostración, la segunda puede ser ya probada como un teorema.

Destaquemos otro hecho interesante, relacionado con el axioma de completitud. Es imposible conservar este axioma, si se elimina de la lista el axioma de Arquímedes. Es que siempre es posible, sin cumplir los requisitos de este último, completar el sistema de los elementos de la geometría con nuevos elementos, sin alterar las relaciones mutuas entre los del sistema inicial. Por eso, el axioma de completitud da una contradicción, sin el de Arquímedes. Por esto, los dos axiomas de continuidad de Hilbert están orgánicamente relacionados: el primero prepara la condición de continuidad y el segundo expresa esta condición por medio del requisito de completitud.

5. Completitud del sistema de axiomas de la geometría euclidiana

§ 75. En el § 69 fueron indicados los tres problemas fundamentales de la axiomática: el problema de consistencia, el de independencia de los axiomas y el de completitud. Estos problemas surgen de manera natural al estudiar cualquier siste-

ma axiomático. Los dos primeros fueron discutidos en las secciones precedentes, para el caso del sistema de axiomas de Hilbert. Ahora nos ocuparemos del tercero.

Trataremos, ante todo, de poner en claro su significado. Imaginémonos, para comenzar, la situación creada por el desarrollo de la geometría en la segunda mitad del siglo XIX. En esta época ya estaban bien consolidadas las disciplinas geométricas fundamentales y fue puesto en el tapete el problema de su fundamentación axiomática. Entonces quedó muy claro que el antiguo sistema de axiomas de Euclides no podía servir de base para un desarrollo lógico de la geometría. Había que construir un sistema completo de axiomas (y definiciones), es decir, un sistema que contuviera todas las proposiciones que, una vez aceptadas, permitieran efectuar las demostraciones de los teoremas de la geometría elemental sin referencia alguna a la evidencia que emana de un dibujo. En el capítulo II pudimos comprobar que los teoremas que hemos considerado pueden ser demostrados en forma rigurosamente lógica, basándonos en los axiomas de Hilbert.

Resulta natural, sin embargo, preguntarnos cómo debe entenderse, exactamente, la completitud del sistema de axiomas de Hilbert. Es claro que podemos suponer que la completitud de dicho sistema se establece analizando las demostraciones de todos los teoremas de la geometría conocidos, digamos, para el año 1900. Tal respuesta puede satisfacernos únicamente si convenimos en considerar la geometría elemental como una disciplina concluida. Pero, a pesar de que históricamente el problema de fundamentación de la geometría elemental se resolvía cuando esta disciplina estaba ya suficientemente elaborada, desde el punto de vista puramente matemático no podemos plantear este problema considerando a la geometría dentro de un marco convencional, pues el número de teoremas posibles de la geometría es infinito. Por esto, intentaremos definir el concepto de completitud de forma que se refiera al sistema dado de axiomas, independientemente de en qué medida se encuentra desarrollada la geometría que ha de ser fundamentada con estos axiomas.

Supongamos que los axiomas del sistema dado han sido realizados de dos maneras en dos conjuntos diferentes de objetos. Llamaremos *isomorfas* a dos realizaciones de los axiomas, si entre los objetos de éstas se puede establecer una correspondencia biyectiva, tal que los objetos correspondientes se encuentran en relaciones mutuas análogas. (Así, si el punto A y la recta a de la primera realización corresponden al punto A' y la recta a' de la segunda y si el punto A está en la recta a, entonces A' estará en la recta a'; si los segmentos AB y CD de la primera realización corresponden a los segmentos $A'B$ y $C'D'$ de la segunda y si $AB \equiv CD$, entonces $A'B' \equiv C'D'$, etc. Aquí las relaciones «está en», «entre», «congruentes» deben entenderse en cada realización en el sentido concreto correspondiente.)

Aclaremos esta definición con algunos ejemplos.

En el § 46 mostramos que los axiomas de la planimetría de Lobachevski pueden ser realizados sobre cualquier superficie equidistante. Consideremos el sistema de superficies equidistantes con base común σ. Sean Σ y Σ' dos superficies equidistantes de este sistema. Consideraremos que los puntos de las superficies Σ y Σ' se corresponden, si están sobre una misma semirrecta ortogonal a la base σ; consideraremos, asimismo, que dos líneas equidistantes de las superficies Σ y Σ' se corresponden, si están en un mismo plano ortogonal a la base σ. Queda así establecida una

correspondencia entre los objetos de las realizaciones de la geometría de Lobachevski en Σ y en Σ'. Esta correspondencia es, evidentemente, isomorfa.

Consideremos ahora los tres primeros axiomas del I grupo de Hilbert como un sistema independiente. Obtendremos una realización de este sistema, si llamamos puntos a los tres vértices de algún triángulo, rectas, a sus lados. Los requisitos de los axiomas I,1 — I,3 son aquí satisfechos, aunque hay en total seis objetos (la realización indicada se asemeja a la que fue descrita en el § 70, pero es aún más simple que aquélla; esto es comprensible, pues ahora tomamos en consideración sólo una parte de los axiomas del I grupo). Recordemos, por otra parte, las realizaciones aritméticas de los axiomas de Hilbert, descritas en los §§ 71 y 72; convendremos en considerarlas como realizaciones de los axiomas I,1 — I,3 únicamente (es decir, no nos interesará que en estas realizaciones se cumplan también los demás axiomas). Todas las realizaciones indicadas son no isomorfas entre sí. En efecto, en el primer caso los axiomas I,1 — I,3 se realizan sólo en seis objetos, mientras que en el § 72 se presenta una realización de dichos axiomas en un conjunto infinito, aunque numerable, de objetos; en cambio, el conjunto de objetos de la realización estudiada en el § 71 es infinito y no numerable. Así, cualesquiera que sean dos de realizaciones que tomemos de entre estas tres, entre sus objetos es imposible establecer no sólo la correspondencia isomorfa, sino ni siquiera una biunívoca.

Evidentemente, cuanto menor sea el número de requisitos planteados en los axiomas de un sistema dado, tanto mayor libertad habrá en la elección de su realización. Así, el sistema formado únicamente por los axiomas de Hilbert I,1 — I,3 puede ser realizado por cualquiera de las tres formas indicadas arriba. Pero si a los axiomas I,1 — I,3 agregamos los del II grupo, la primera forma se descarta, pues de los axiomas I — II sigue que el conjunto de los objetos geométricos es infinito. Ahora bien, los axiomas I — III, IV,1 pueden ser realizados tanto en la forma descrita en el § 71, como en la indicada en el § 72. Pero si a estos axiomas agregamos el IV,2, la realización indicada en el § 72 ya no sirve, pues allí no se satisface el axioma IV,2.

Así, entonces, al completar cierto sistema de axiomas, agregándole axiomas nuevos, independientes de los anteriores y, por supuesto, compatibles con aquéllos, la clase de realizaciones admisibles del sistema se restringe.

Ahora estamos ya en condiciones de enunciar de manera precisa el concepto de completitud de un sistema de axiomas.

Un sistema dado de axiomas se dice completo, si todas sus realizaciones son isomorfas entre sí.

Estableceremos, ahora, la completitud del sistema de axiomas I — V [*]).

Supongamos que se considera alguna realización Σ de los axiomas I — V. Según el § 22, en el conjunto de objetos que recibieron el nombre de puntos en la realización Σ, se puede introducir un sistema de coordenadas, de manera que a cada punto le corresponderá unívocamente un par de coordenadas (x, y) y a cualquier par de números (x, y) le corresponderá unívocamente un punto de coordenadas (x, y).

---

*) Nuevamente nos limitaremos a considerar el caso de la geometría plana.

Además, si disponemos del axioma V (de paralelismo), el sistema coordenado, construido en el § 22, es cartesiano. En consecuencia, las coordenadas de los puntos situados sobre alguna recta se caracterizan por la ecuación

$$ux + vy + w = 0.$$

Así, entonces, los puntos de la realización Σ están en correspondencia biunívoca con los pares de números reales (x, y), y las rectas, con las razones tipo $(u : v : w)$.

Hemos obtenido correspondencia biunívoca entre los objetos de la realización Σ y los objetos de la realización aritmética, considerada en el § 71. Esta correspondencia es un isomorfismo. Para comprobarlo, basta observar que los axiomas de la geometría elemental I — V permiten deducir las fórmulas cartesianas básicas, mediante las cuales se caracterizan aritméticamente las relaciones mutuas de los objetos de la realización Σ, en forma idéntica a las relaciones mutuas de los objetos correspondientes de la realización indicada en el § 71.

Vemos, así, que cada realización de los axiomas I — V es isomorfa a la cartesiana. Pero, evidentemente, dos realizaciones isomorfas a una tercera, son isomorfas entre sí. Por lo tanto, dos realizaciones cualesquiera de los axiomas I — V son isomorfas entre sí. De aquí concluimos que el sistema de axiomas I — V es completo.

Por razonamientos análogos se podría establecer la completitud del sistema de axiomas de la geometría de Lobachevski (demostrando previamente, *a partir de los axiomas*, sus fórmulas básicas; véanse los §§ 216 — 224).

6. Método axiomático en matemática

§ 76. Hasta aquí hemos tratado únicamente con dos sistemas concretos de axiomas: el de la geometría de Euclides, y el de la de Lobachevski.

Por cierto, a lo largo del presente capítulo hemos estudiado algunos sistemas que se obtienen eliminando uno o varios axiomas de la lista de Hilbert; sin embargo, tales sistemas no contienen nada nuevo, por tratarse de partes del sistema de Hilbert.

Por otra parte, el punto de vista general respecto de los objetos y los axiomas geométricos que fue alcanzado en el estudio de los problemas básicos de la axiomática de la geometría elemental, nos permitió entrever la posibilidad de aplicar el método axiomático en un campo extremadamente amplio.

En la actualidad, en la matemática, numerosas disciplinas se basan en sistemas de axiomas confeccionados adecuadamente. Son éstas, por ejemplo, la teoría de los grupos, la topología a base de la teoría de los conjuntos, diversas ramas del análisis funcional. En los axiomas que constituyen la base de tales disciplinas matemáticas, se toman en consideración sólo algunas propiedades de los objetos matemáticos estudiados. Por regla general, estas propiedades son comunes para numerosas clases de objetos, que difieren unas de otras por el carácter de sus propiedades restantes. Con esto se consigue que los teoremas deducidos a partir de los axiomas adoptados, son válidos simultáneamente para todas las clases de objetos matemáticos concretos. La generalidad de las deducciones matemáticas es una de las características primordiales de la aplicación del método axiomático.

Es importante destacar que como base de la mayoría de las teorías matemáticas se toman sistemas incompletos de axiomas. Por ejemplo, los axiomas de la teoría de grupos constituyen un sistema incompleto, ya que existen grupos no isomorfos. Los espacios que se estudian en la topología a base de la teoría de los conjuntos también están fundamentados por un sistema incompleto de axiomas. La gran amplitud de las aplicaciones de la topología y la teoría de grupos se debe a que estas disciplinas tienen por base a un sistema incompleto de axiomas.

Si se agregan nuevos requerimientos a los axiomas de la topología, la clase de espacios cuyos elementos satisfacen el sistema ampliado de axiomas será más restringida que la original. Así, por ejemplo, completando sucesivamente la axiomática de un espacio topológico con nuevos axiomas, se puede llegar a uno de los sistemas completos de axiomas que determinan el espacio de Euclides, o el de Lobachevski, o algún otro. Cabe observar que cuanto más axiomas contiene el sistema escogido, tanto más rico será el contenido de la teoría que se basa en ellos, pero, a la vez, tanto más restringido será el campo de su aplicación, es decir, tanto menor será la generalidad de sus teoremas.

Parte II

GEOMETRÍA PROYECTIVA

Capítulo V

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

1. Objeto de la geometría proyectiva

§ 77. En las primeras décadas del siglo XIX, simultáneamente con el desarrollo exitoso de las investigaciones acerca de los fundamentos de la geometría, surgió una nueva rama de los conocimientos geométricos: la geometría proyectiva. Sus impulsores fueron las artes gráficas y la arquitectura. En un comienzo, la geometría proyectiva tenía un diapasón bastante limitado de aplicaciones. Pero, a medida que se desarrollaba, se fue introduciendo más y más en diversos dominios de la geometría, hasta que, a fines del siglo XIX, las investigaciones sobre geometría proyectiva y sobre los fundamentos de la geometría elemental se unieron estrechamente. Un resultado notable de esta unión fue la elaboración, dentro de la geometría proyectiva, de una teoría profunda, que incluyó en un esquema unificado las geometrías de Euclides, de Lobachevski y de Riemann.

§ 78. El conocido geómetra francés Poncelet (1788 — 1867) destacó, como objeto de estudio, algunas propiedades de las figuras geométricas, que él llamó proyectivas.

Ahora explicaremos de qué clase de propiedades se trata.

Sea A una figura arbitraria, situada en algún plano α; β, algún otro plano, y O, un punto arbitrario del espacio, que no pertenece a ninguno de los planos α, β (fig. 87). El punto O, conjuntamente con cada punto M de la figura A, determina una recta OM; ésta interseca al plano β en algún punto, que denotaremos con M' y llamaremos *proyección del punto M* (sobre el plano β desde el centro O). Las proyecciones de todos los puntos de la figura A en el plano β forman una figura A', que se llama *proyección de la figura A*. La operación que permite obtener la figura A' lleva el nombre de *proyección central* desde el punto O. Variando la elección del punto O y del plano β, podemos obtener, mediante proyecciones centrales de la figura A, un conjunto infinito de figuras que, en parte, serán parecidas a la figura A, pero que en muchos aspectos diferirán sustancialmente de ésta. Por ejemplo, proyectando una circunferencia se puede obtener una elipse o una parábola, e inclusive una hipérbola; proyectando un triángulo regular se puede obtener uno de forma arbitraria, etc. Muchas propiedades de la figura, entonces, no se transmiten a su proyección. Así, por ejemplo, las propiedades de un triángulo regular pueden no conservarse bajo una proyección, cuyo resultado no dará, en general, otro triángulo regular; la propiedad básica de la circunferencia, que se expresa en su definición habitual, también puede ser destruida al proyectar, pues, proyectando una circunferencia, se puede obtener, digamos, una elipse, etc. Análogamente, muchas magnitudes

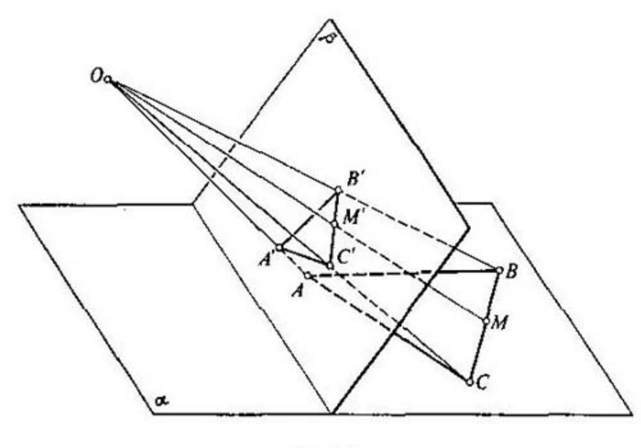


Fig. 87

relacionadas con la figura en general cambiarán. Así, al proyectar un segmento de longitud a dada, es posible obtener otro cuya longitud sea tan grande como se quiera, o bien tan pequeña como se quiera; al proyectar un triángulo de área Δ dada, se puede obtener otro cuya área sea mayor, o bien menor, que la magnitud Δ.

Por otra parte, las figuras poseen propiedades que se conservan en cualquier proyección, y a las figuras se les puede poner en correspondencia magnitudes que también se conservan en cualquier proyección. Tales propiedades y magnitudes se denominan *invariantes de una proyección*.

Justamente las propiedades de las figuras que son invariantes con respecto a *cualquier* proyección, fueron llamadas por Poncelet *propiedades proyectivas*, considerándolas como el objeto de estudio de la geometría proyectiva. Son, asimismo, objetos de la geometría proyectiva las magnitudes invariantes con respecto a una proyección.

EJEMPLOS. Si los puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ de una figura A están sobre una misma recta, sus proyecciones $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ estarán, asimismo, en alguna recta. Consecuentemente, la propiedad de puntos de una figura de estar alineados, es proyectiva. Se puede decir, de otro modo, que la recta es un objeto de la geometría proyectiva.

Si los puntos $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ de una figura A están sobre alguna sección cónica k, sus proyecciones $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n$ también estarán en alguna sección cónica k'. Dicho de otra forma, la sección cónica es un objeto de la geometría proyectiva. Aquí únicamente debe tenerse en cuenta que las propiedades inherentes a la circunferencia exclusivamente, o exclusivamente a la elipse, o únicamente a la parábola, o sólo a la hipérbola, no son propiedades proyectivas; por esto, en la geometría proyectiva no se hace diferencia alguna entre las secciones cónicas, como en la geometría elemental. En otras palabras, aunque las secciones cónicas son objetos de la geometría proyectiva, sus tipos específicos —las circunferencias, elipses, parábo-

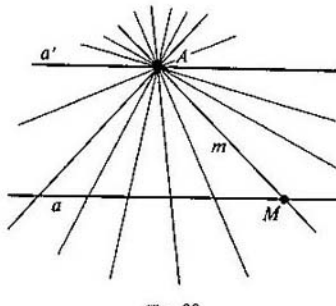


Fig. 88

las, hipérbolas— no se distinguen en la geometría proyectiva, y no se estudian por separado.

§ 79. El problema del estudio de las propiedades proyectivas de las figuras atrajo la atención de muchos geómetras, entre los cuales mencionaremos, después de Poncelet, a Chasles (1793 — 1880) y a Steiner (1769 — 1863). A ellos pertenece la consolidación de una serie de temas generales de la geometría proyectiva, en los cuales Steiner, Chasles y otros geómetras vieron el nacimiento de los métodos sintéticos en geometría. Al desarrollar estos métodos, en contraposición a los analíticos, estos geómetras lograron éxitos considerables en el perfeccionamiento del aparato de la geometría proyectiva y en su aplicación a diversos problemas geométricos.

Sin embargo, el significado profundo de la geometría proyectiva en el desarrollo de las ideas geométricas no radica en la cantidad de casos particulares donde sus métodos resultan más cómodos que los de la geometría analítica, sino —como veremos ahora— en el grado de generalidad de la geometría proyectiva, que le permite unificar diversos sistemas geométricos, incluyendo, en particular, la geometría elemental.

Sin embargo, tanto para Steiner como para Chasles, la geometría proyectiva lucía como una parte de la elemental. Su transformación en una disciplina totalmente independiente fue ya un fruto de la segunda mitad del siglo XIX.

Una premisa importante para esta transformación fue la utilización de elementos infinitamente alejados, impropios en la geometría proyectiva. Ahora nos detendremos a discutir esto en particular.

§ 80. Sea A un punto arbitrario del espacio y a una recta que no pasa por A (fig. 88). Tracemos por A y a el plano α y consideremos todas las rectas de α que pasan por A; éstas forman un haz plano con centro A; lo llamaremos el haz A.

Se puede establecer una correspondencia entre las rectas de este haz y los puntos de la recta a, asignando a cada punto M de a la recta m del haz A que corta a en el punto M (fig. 88); m se llamará recta proyectante del punto M.

Evidentemente, cualquiera que sea la posición del punto M sobre la recta a, siempre le corresponderá una recta determinada m. Pero no podemos afirmar que a cualquier recta del haz A le corresponda un punto de la recta a. Precisamente, la recta a' de dicho haz que es paralela a a no la interseca y, por esto, no tiene punto que le corresponda. Entonces, la correspondencia entre las rectas del haz A y los

puntos de la recta a no es biyectiva. Esto causa numerosos tropiezos al estudiar las proyecciones. A fin de evitarlos, se conviene en considerar que las rectas paralelas se cortan en el infinito. Entonces la recta a' del haz A, paralela a a, tendrá, al igual que toda otra recta del haz, un punto que le corresponda sobre la recta a, sólo que no será un punto ordinario, sino cierto objeto nuevo, llamado *punto del infinito*, o punto impropio, de la recta a.

El punto del infinito de una recta se considera perteneciente asimismo a todo plano que pase por esta recta. Además, se supone que rectas paralelas tienen un punto impropio común; por ello, un sistema de rectas paralelas situadas en un mismo plano es llamado *haz con centro impropio*.

Obsérvese que, al proyectar, un haz con centro en un punto del infinito puede transformarse en un haz ordinario. Así, por ejemplo, en la fig. 89 el haz del plano α con centro impropio S_∞ se proyecta desde el centro O sobre el plano β en un haz ordinario con centro S.

Se supone que los puntos impropios de rectas no paralelas son diferentes. Así, entonces, cada plano contiene una cantidad infinita de puntos impropios diferentes. El conjunto de todos los puntos del infinito de un plano es llamado su *recta impropia*, o *recta del infinito*.

El conjunto de todos los puntos impropios del espacio se denomina *plano impropio, o plano del infinito*. Esta terminología se justifica por los dos hechos siguientes:

1. Dos planos paralelos tienen puntos del infinito comunes, a raíz de lo cual la colección de los puntos impropios de un plano puede ser considerada como la imagen que se obtiene en la intersección de dos planos; por esto, resulta natural llamar recta a dicha colección.

2. El conjunto de todos los puntos impropios del espacio determina, al intersecarse con cualquier plano ordinario, una recta impropia. Por ello, es natural llamar plano a dicho conjunto.

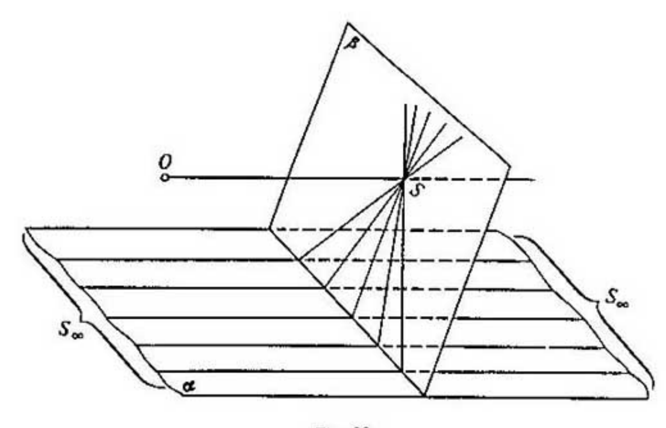


Fig. 89

§ 81. Todo lo expuesto se puede resumir como sigue.

El conjunto de los objetos del espacio euclidiano es completado con elementos nuevos, que llevan los nombres de «punto impropio», «recta impropia», «plano impropio». La adjunción de elementos nuevos se efectúa observando determinadas condiciones, precisamente:

1. Al conjunto de puntos de cada recta se agrega un punto del infinito; al conjunto de rectas de cada plano se adjunta una recta del infinito; al conjunto de planos del espacio se agrega un plano del infinito.

2. Las propiedades de incidencia del conjunto ampliado de elementos geométricos deben satisfacer las condiciones contenidas en todos los axiomas de incidencia (es decir, del primer grupo de axiomas de Hilbert).

3. Las propiedades de incidencia del conjunto ampliado de elementos geométricos deben ser tales que dos planos cualesquiera tengan una recta común, cada par de recta y plano tengan un punto común, y cada par de rectas situadas en un mismo plano tenga, asimismo, un punto común.

Una recta completada con el punto del infinito se denomina *recta proyectiva*; dicha recta debe pensarse como una línea cerrada. Un plano completado con la recta del infinito se llama *plano proyectivo;* el espacio completado con el plano del infinito lleva el nombre de *espacio proyectivo*.

§ 82. Con frecuencia se introducen los elementos impropios también en la geometría elemental. Pero allí su aplicación se reduce, esencialmente, a una nueva manera de expresar resultados geométricos (en lugar de decir que las rectas son paralelas, se dice que convergen en el infinito; un cilindro es considerado como un cono con vértice en un punto del infinito, etc.). Por el contrario, en la geometría proyectiva los elementos impropios juegan el mismo papel que las figuras geométricas ordinarias, constituyendo una parte orgánica del espacio proyectivo.

La causa de esta diferencia quedará totalmente clara, si se comparan los objetos de estudio de la geometría elemental y de la proyectiva. La primera se dedica, en gran medida, al estudio de las denominadas propiedades métricas de las figuras, es decir, las propiedades que tienen que ver con la medición de magnitudes geométricas (longitudes, ángulos y áreas). Siempre es posible medir cualquier segmento AB de extremos ordinarios y este proceso da como resultado un número determinado, que expresa la longitud del segmento AB. Pero si uno de los extremos del segmento es un punto del infinito, el proceso de medición pierde su sentido, pues sobre un tal segmento la unidad lineal puede ser colocada infinitas veces. Análogamente, el proceso de medida de ángulos no es aplicable cuando un lado del ángulo es una recta impropia, y los métodos «intuitivos» de medición de áreas no pueden aplicarse a figuras que contienen elementos impropios.

Así, en la geometría elemental los elementos impropios juegan, necesariamente, un papel particular y se diferencian sustancialmente de los elementos geométricos ordinarios, desde el punto de vista de sus relaciones con éstos. Por el contrario, en la geometría proyectiva los hechos que distinguen a los elementos impropios de los demás, pierden su validez, por cuanto las propiedades métricas de las figuras no son sus objetos de estudio. Es más, como los elementos impropios pueden transformarse en ordinarios bajo una proyección, éstos no pueden poseer ninguna *propiedad proyectiva* que los distinga de los ordinarios. Por esto, en la geometría proyectiva no hay diferencias entre los elementos ordinarios y los impropios.

§ 83. La idea de los elementos impropios surgió hace ya bastante tiempo. Pero la unificación de los elementos impropios y los habituales, que es natural desde el punto de vista de la geometría proyectiva, era ficticia, mientras las propiedades proyectivas de las figuras eran estudiadas con métodos de la geometría elemental, pues estos métodos se basan en la medida, y la métrica de la geometría elemental conduce inevitablemente a distinguir entre las imágenes finitas y las infinitas. A fin de dar un significado preciso al concepto de espacio proyectivo, fue necesario eliminar completamente de la geometría proyectiva todo lo que tiene que ver con mediciones.

El problema de liberar a la geometría proyectiva de los métodos que utilizan mediciones fue resuelto, en principio, por Staudt (1798 — 1867).

La geometría proyectiva, liberada de la métrica, se transformó en una disciplina que estudia únicamente las propiedades de la posición relativa de los objetos geométricos. Al mismo tiempo la geometría proyectiva se transformó en una disciplina geométrica independiente con su axiomática propia y su propia colección de objetos (como la recta proyectiva, el plano proyectivo y el espacio proyectivo).

2. Teorema de Desargues. Construcción de grupos armónicos de elementos

§ 84. Construiremos la geometría proyectiva basándonos en cierto sistema de axiomas, que se refieren a las relaciones mutuas entre los objetos básicos. Dichos objetos son puntos, rectas y planos; las relaciones mutuas que se mencionarán en los axiomas son las de incidencia y de orden. Los axiomas de la geometría proyectiva, al igual que los teoremas que siguen de ellos, expresan determinadas propiedades del espacio euclidiano, completado con elementos impropios. Pero, claro está, por puntos, rectas y planos en la geometría proyectiva pueden entenderse objetos cualesquiera, y las relaciones mutuas entre ellos pueden interpretarse arbitrariamente, siempre y cuando se observe todo lo que se menciona en los axiomas. Entonces las deducciones que se obtengan de los axiomas expresarán resultados determinados, que se referirán a los objetos escogidos. Consecuentemente, el espacio proyectivo es un conjunto cualquiera de objetos, denominados puntos, rectas y planos, para los cuales se han definido relaciones mutuas de manera que se observen todas las condiciones contenidas en los axiomas que a continuación se presentan.

Los axiomas de la geometría proyectiva pueden ser reunidos en tres grupos, de los cuales

el grupo I contiene nueve axiomas de incidencia,

el grupo II contiene seis axiomas de orden,

el grupo III contiene un axioma de continuidad.

En la presente sección se analizan los axiomas del I grupo y sus consecuencias más importantes.

GRUPO I. AXIOMAS PROYECTIVOS DE INCIDENCIA.

Suponemos que las rectas y los planos pueden encontrarse en determinadas relaciones con los puntos, que denotaremos con los términos: «la recta pasa por el punto», o «el punto está sobre la recta», «el plano pasa por el punto», o «el punto está sobre el plano». Las condiciones que deben cumplir estas relaciones se expresan en los axiomas I, 1 — I,9.

I, 1. *Cualesquiera que sean dos puntos A y B, existe una recta a que pasa por estos puntos.*

I, 2. *Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A y B, existe no más de una recta que pasa por A y B.*

I, 3. *En cada recta hay no menos de tres puntos. Existen al menos tres puntos que no están sobre una misma recta.*

I, 4. *Por cada tres puntos A, B, C que no están sobre una misma recta, pasa algún plano α. En cada plano hay no menos de un punto.*

I, 5. *Por cada tres puntos A, B, C no pertenecientes a una misma recta, pasa no más de un plano.*

I, 6. *Si dos puntos diferentes A, B de una recta a están sobre un plano α, cada punto de la recta a estará en α.*

I, 7. *Si dos planos α, β tienen un punto común A, tendrán al menos otro punto común B.*

I, 8. *Existen al menos cuatro puntos que no están sobre un mismo plano.*

I, 9. *Dos rectas cualesquiera, ubicadas en un mismo plano, tienen algún punto común.*

Si se confrontan los axiomas I, 1 — I, 9 que acabamos de enunciar con los del primer grupo de Hilbert (véase el cap. II, § 12), se puede notar, ante todo, que todas las condiciones de los axiomas del primer grupo de Hilbert están contenidas también en los axiomas proyectivos I, 1 — I, 9. Por esto, *todos los teoremas de la geometría elemental, basados únicamente en los axiomas de incidencia, son válidos también en la geometría proyectiva*. Sólo en dos puntos difieren los axiomas proyectivos de incidencia de los axiomas de incidencia de la geometría elemental:

1) En el axioma I, 3 del sistema proyectivo se exige que en cada recta existan no menos de tres puntos, mientras que en el axioma correspondiente I, 3 del sistema de Hilbert se pone la condición de que cada recta tenga al menos dos puntos.

2) Los axiomas proyectivos de incidencia contienen la condición I,9, que no se impone, ni tampoco se cumple, en la geometría elemental. Gracias al axioma I, 9, en la geometría proyectiva no hay paralelismo, pues dos rectas cualesquiera de un plano se cortan.

Los axiomas proyectivos de incidencia contienen, entonces, más condiciones que los axiomas de incidencia de la geometría elemental, por lo cual de los primeros pueden ser deducidos teoremas que no se desprenden de los axiomas de incidencia de Hilbert.

En particular, de los axiomas I, 1 — I, 9 sigue que

1) una recta y un plano tienen siempre un punto común;

2) dos planos tienen siempre una recta común;

3) tres planos tienen siempre un punto común.

§ 85. Sin detenernos en los corolarios triviales de los axiomas I, 1 — I, 9, pasaremos a demostrar el teorema de Desargues, que constituye la base de la geometría proyectiva del plano.

Convendremos en llamar *trivértice* al conjunto de tres puntos que no están sobre una misma recta, y las tres rectas que unen estos puntos, dos a dos. Llamaremos vértices a los tres puntos en cuestión, y lados del trivértice, a las rectas que los unen (evitamos llamar triángulo a una tal figura, guardando este término para denotar una figura un tanto diferente, que se mencionará más adelante, luego de haber presentado los axiomas proyectivos de orden).

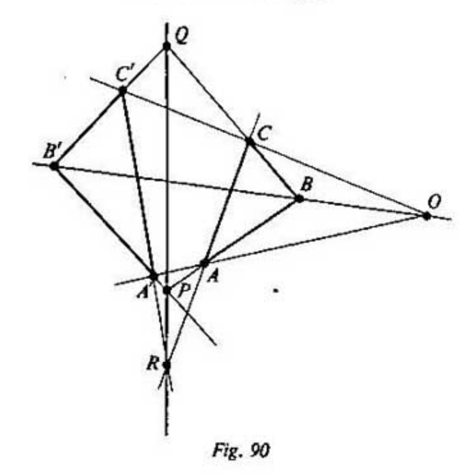


Fig. 90

Consideremos dos trivértices, cuyos vértices denotaremos con las letras A, B, C y A', B', C'. Llamaremos correspondientes a los vértices denotados con las mismas letras (A y A', B y B', C y C'); llamaremos, asimismo, correspondientes a los lados que pasan por vértices correspondientes.

TEOREMA 1 (PRIMER TEOREMA DE DESARGUES, TEOREMA DIRECTO). *Si los lados correspondientes de los trivértices ABC y $A'B'C'$ se intersecan en puntos P, Q, R pertenecientes a una misma recta, las rectas que unen los vértices correspondientes se cortarán en un mismo punto (fig. 90).*

TEOREMA 2 (SEGUNDO TEOREMA DE DESARGUES, RECÍPROCO). *Si las rectas que unen los vértices correspondientes de los trivértices ABC y $A'B'C'$ se cortan en un mismo punto, los lados correspondientes de estos trivértices se intersecarán en puntos pertenecientes a una misma recta**).

Convendremos en llamar *eje de perspectiva, o eje de homología* a la recta que contiene a los puntos de intersección de los lados correspondientes de los trivértices; *centro de perspectiva* (o *centro de homología*), al punto común de las rectas que unen vértices correspondientes. Entonces los dos teoremas de Desargues pueden ser enunciados en forma concisa como sigue:

Si dos trivértices poseen eje de homología, también tendrán un centro de homología, y recíprocamente.

Demostremos el primer teorema de Desargues.

Sean ABC y $A'B'C'$ trivértices situados en un mismo plano α, que posean un eje u de perspectiva (fig. 91). La recta u contiene, entonces, los puntos P, Q, R de corte de los pares de lados correspondientes AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, AC y $A'C'$. Hay que demostrar que las rectas AA', BB' y CC' convergen a un mismo punto, es decir, que los trivértices dados tienen centro de perspectiva**).

---

*) Nos interesa únicamente el caso en que los trivértices ABC y $A'B'C'$ pertenezcan a un mismo plano.

**) Supondremos que la recta u no contiene ningún vértice de los trivértices considerados (en caso contrario el teorema es también verdadero, cosa que resulta evidente).

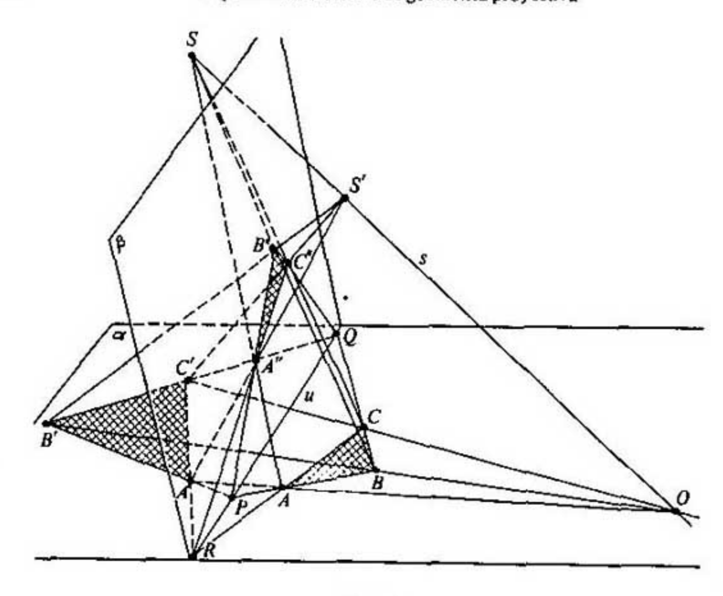


Fig. 91

Para probar esto, fijemos algún punto B'' que no pertenezca al plano α (su existencia queda asegurada por el axioma I, 8). Los puntos P, Q y B'' no están sobre una misma recta; por esto, existe un único plano β que los contiene. En virtud del axioma I, 3, podemos escoger sobre la recta $B''Q$ algún punto C'', diferente de B'' y de Q. Por el axioma I, 6, este punto pertenece al plano β, al igual que el punto R; por esto, la recta RC'' se encuentra en el plano β. Como las rectas RC'' y PB'' están en un mismo plano, tendrán un punto común, en virtud del axioma I, 9; lo denotaremos con A''. Hemos obtenido en el plano β un trivértice $A''B''C''$ que se encuentra en una posición especial con respecto a los trivértices ABC y $A'B'C'$; precisamente, los trivértices ABC, $A'B'C'$ y $A''B''C''$ tienen un eje común de homología u; además, los lados correspondientes AB, $A'B'$ y $A''B''$ de estos trivértices convergen a un mismo punto P. Análogamente, los lados BC, $B'C'$ y $B''C''$ convergen a un mismo punto Q, mientras que los lados AC, $A'C'$ y $A''C''$ convergen a un mismo punto R.

Dada esta disposición, los trivértices ABC y $A''B''C''$, así como $A'B'C'$ y $A''B''C''$, tienen un centro de homología; no es difícil probar esto. A pesar de que aquí tenemos que establecer, con respecto a los trivértices ABC y $A''B''C''$ (o bien $A'B'C'$ y $A''B''C''$), el mismo resultado que afirma el teorema de Desargues con respecto a los trivértices ABC y $A'B'C'$, la demostración se simplifica notablemente, gracias a que los trivértices ABC y $A''B''C''$ (o bien $A'B'C'$ y $A''B''C''$) están en distintos planos.

Consideremos los planos PAA'', QBB'' y RCC''; como se observó al final del § 84, tres planos cualesquiera tienen un punto común. Sea S el punto común de los planos indicados. Obsérvese que la recta AA'' es común a los planos PAA'' y RCC''; ahora, es de suma importancia establecer que los planos PAA'' y RCC'' son distintos. En efecto, el plano PAA'' contiene la recta BB''. Pero, en virtud de la elección del punto B'', las rectas BB'' y u no tienen puntos comunes. Esto implica que el punto R no puede pertenecer al plano PAA'', de modo que los planos PAA'' y RCC'' son, efectivamente, diferentes. Por esto, la recta común AA'' de estos planos contiene todos sus puntos comunes, en particular el punto S. Dicho de otro modo, la recta AA'' pasa por S. De razonamientos análogos sigue que las rectas BB'' y CC'' pasan también por el punto S. Con esto queda establecida la existencia de un centro de homología de los trivértices ABC y $A''B''C''$. Análogamente se puede establecer que los trivértices $A'B'C'$ y $A''B''C''$ poseen centro de perspectiva S'.

Tracemos por los puntos S y S' la recta s; ésta cortará al plano α en algún punto O. Es fácil comprobar que O es, precisamente, centro de homología de los trivértices ABC y $A'B'C'$. En efecto, proyectemos la figura tridimensional, formada por los trivértices $A'B'C'$, $A''B''C''$ y el punto S', desde el centro S sobre el plano α. Evidentemente, la proyección del trivértice $A'B'C'$ será ese mismo trivértice, mientras que la del $A''B''C''$ será el ABC. Las rectas $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ se proyectarán, respectivamente, en las rectas AA', BB', CC'. Y como las rectas $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ convergen al punto S', sus proyecciones, es decir, las rectas AA', BB', CC' convergerán a la proyección del punto S', es decir, al punto O. Hemos demostrado, con esto, que las rectas que unen los vértices correspondientes de los trivértices ABC y $A'B'C'$ convergen a un mismo punto, cosa que deseábamos mostrar.

Pasemos a la demostración del teorema recíproco.

Sean dados los trivértices ABC y $A'B'C'$, situados en un mismo plano, con respecto a los cuales se sabe que poseen centro de homología, es decir, que las rectas AA', BB', CC' convergen a un mismo punto O. Hay que demostrar que tienen eje de perspectiva, es decir, que los puntos P, Q, R de corte de los lados correspondientes AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, AC y $A'C'$, están sobre una misma recta.

Para lo que sigue resulta cómodo eliminar de nuestra discusión el caso poco interesante en que los trivértices tengan un lado común, digamos, cuando las rectas BC y $B'C'$ coincidan. En tal caso el punto Q queda indeterminado y se puede considerar que está en una misma recta con los puntos P y R. En este caso el teorema es, en consecuencia, verdadero. Se supondrá, además, que los lados correspondientes de los trivértices ABC y $A'B'C'$ son diferentes.

Haremos la demostración por el método de reducción al absurdo. *Supongamos que AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, AC y $A'C'$ se intersecan en tres puntos P, Q, R que no están en una misma recta*. En tal caso, los puntos P y Q son necesariamente distintos y determinan cierta recta u, que se interseca con las rectas AC y $A'C'$ en puntos DIFERENTES R_1 y R_2, de forma que R_1, A' y C' no están sobre una misma recta (fig. 92). Por esto, la recta R_1A' corta a $B'C'$ en algún punto C'', diferente de C'. El punto C'' no está sobre la recta $C'CO$. En efecto, si C'' perteneciese a dicha recta, el punto B' también le pertenecería y, por ende, el B estaría sobre la misma recta. Pero entonces los lados correspondientes BC y $B'C'$ tendrían que coincidir, caso que hemos excluido. Así, pues, la recta $C''C$ no pasa por el punto O. Considere-

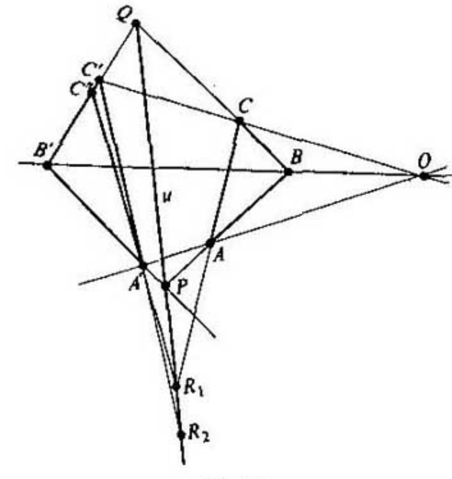


Fig. 92

mos los trivértices ABC y $A'B'C''$. Por lo que acabamos de probar, éstos no poseen centro de perspectiva; sin embargo, tienen eje de perspectiva: precisamente, la recta u, sobre la cual se encuentran los puntos P, Q y R_1.

Hemos obtenido una contradicción con el teorema directo de Desargues, quedando así demostrado el teorema recíproco.

Ahora pasaremos a definir y construir los elementos armónicos, lo que es de importancia fundamental en la geometría proyectiva. Los razonamientos que siguen se basarán en el teorema de Desargues.

§ 86. Una figura plana, constituida por cuatro puntos, de los cuales no hay tres que estén sobre una misma recta, más las seis rectas que unen estos puntos dos a dos, se denomina *cuadrivértice completo*.

Los puntos indicados se denominan *vértices*; las rectas que los unen, *lados* del cuadrivértice. En la fig. 93 se representa un cuadrivértice con vértices $ABCD$. Los lados que no tienen vértice común son llamados *opuestos*. Así, el cuadrivértice $ABCD$ posee los pares de lados opuestos AB y CD, AC y BD, BC y AD. Los puntos de intersección de los lados opuestos llevan el nombre de *puntos diagonales* del cuadrivértice. En la fig. 93 los puntos diagonales serán P, Q, R.

Mediante el cuadrivértice completo se define el concepto de grupo armónico de elementos.

Un par de puntos S, T de una recta arbitraria u será llamado ARMÓNICO CONJUGADO *del par de puntos P, Q de la misma recta, si P y Q son puntos diagonales de algún cuadrivértice, mientras que S y T se determinan por la intersección de la recta con el par de sus lados opuestos que pasan por el tercer punto diagonal* (fig. 93).

Por el significado mismo de esta definición, los puntos P y Q, que constituyen el primer par, son equitativos; otro tanto puede decirse de los puntos S y T del segun-

do par (pero todavía no estamos en condiciones de afirmar la igualdad de derechos de los pares P, Q y S, T).

Convendremos en llamar al punto T el *cuarto armónico* de los tres puntos P, Q, S, si el par S, T es armónico conjugado del par P, Q (aquí en el orden de escritura de los puntos es importante que en los dos primeros lugares se escriban los puntos que constituyen el primer par del grupo armónico). Evidentemente, si T es el cuarto armónico de los tres puntos P, Q, S, entonces S será el cuarto armónico de los tres puntos P, Q, T.

La definición dada de pares armónicos encierra, asimismo, un método de determinación del cuarto armónico de tres puntos dados. A fin de construir el cuarto armónico de tres puntos arbitrarios P, Q, S de una recta u, debe escogerse en el plano, fuera de u, algún punto B y, sobre la recta PB, un punto A, diferente de P y de B (la existencia del punto A queda asegurada por el axioma (I, 3)). Entonces, por la intersección de las rectas BS y AQ quedará determinado el punto C, luego de lo cual se determina el punto D con el corte de las rectas PC y BQ; trazando la recta AD, se halla el punto T, que será el buscado.

Es de suma importancia establecer que, dados los puntos P, Q, S, la posición del cuarto armónico T se determina de manera única, es decir, no depende de la elección de los puntos B y A.

Esto es una consecuencia inmediata del teorema que sigue.

TEOREMA 3. *Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ dos cuadrivértices con puntos diagonales comunes* P y Q (fig. 93). *Si los lados BC y $B'C'$ de estos cuadrivértices se intersecan en el punto S de la recta PQ, sus lados AD y $A'D'$ se cortarán en el punto T de la misma recta.*

La demostración se basa en la proposición de Desargues.

Consideremos los trivértices ABC y $A'B'C'$. Sus lados correspondientes se cortan en tres puntos P, S, Q que están sobre una misma recta. En virtud del primer teorema de Desargues, de aquí se desprende que las rectas AA', BB' y CC' concurren a un mismo punto O. Los lados correspondientes de los trivértices BCD y $B'C'D'$ también se intersecan en tres puntos situados sobre una recta: en los mis-

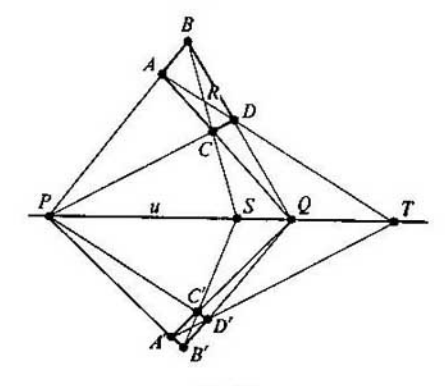


Fig. 93

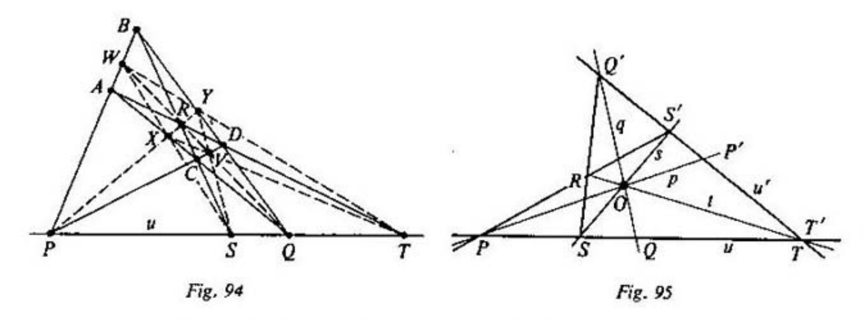


Fig. 94

Fig. 95

mos puntos P, Q, S. Aplicando nuevamente el primer teorema de Desargues, concluimos que las rectas BB', CC' y DD' tienen un punto común O'. Evidentemente, los puntos O y O' coinciden, pues cada uno de ellos queda determinado por la intersección de las rectas BB' y CC'. Así, entonces, todas las rectas AA', BB' y DD' se cortan en el punto O. En particular, las rectas AA', BB' y DD' concurren a un mismo punto. Según el segundo teorema de Desargues, los lados correspondientes de los trivértices ABD y $A'B'D'$ se cortarán entonces en tres puntos alineados. Esto significa que el punto T de intersección de las rectas AD y $A'D'$ está situado sobre la recta PQ, y el teorema queda probado.

De la definición de grupos armónicos de puntos y del teorema que acabamos de demostrar se desprende directamente la siguiente proposición, que expresa la univocidad de la definición del cuarto punto armónico.

TEOREMA 4. *Si el par S, T es armónico conjugado del par P, Q y si $ABCD$ es algún cuadrivértice con puntos diagonales P, Q, cuyo lado BC pasa por el punto S, el lado AD pasará por el punto T.*

Demostremos ahora el siguiente teorema importante.

TEOREMA 5. *Si el par de puntos S, T de la recta u es armónico conjugado del par P, Q, entonces el par P, Q será armónico conjugado del par S, T.*

Para probar esto, fijemos algún cuadrivértice $ABCD$ con puntos diagonales P, Q, tal que el par de lados opuestos BC y AD corte a la recta u en los puntos S y T (fig. 94). Sea R el tercer punto diagonal del cuadrivértice $ABCD$; tracemos las rectas PR y QR. Estas rectas, al cortarse con los lados del cuadrivértice considerado, determinarán cuatro puntos, que denotaremos con las letras X, Y, V, W, como se muestra en la fig. 94.

Consideremos ahora el cuadrivértice $AXRW$; éste tendrá puntos diagonales P, Q y su lado AR pasará por el punto T. Como el punto S es el cuarto armónico de los tres puntos P, Q, T, en virtud del teorema 4 el lado XW del cuadrivértice $AXRW$ tendrá que pasar por S. Así, los puntos W, X, S, están sobre una misma recta. Considerando los cuadrivértices $RWBY$, $YDVR$, $RVCX$ concluimos, por razonamientos análogos, que los puntos de cada una de las ternas que siguen: W, Y, T; Y, V, S y X, V, T están sobre una misma recta.

De aquí sigue que $XVYW$ es un cuadrivértice con puntos diagonales S, T y con lados XY, VW, que pasan por los puntos P, Q. Esto significa, precisamente, que el par P, Q es armónico conjugado del par S, T.

El teorema que acabamos de probar establece la reciprocidad de la conjugación armónica de pares. Por esto, en lo sucesivo, al considerar dos pares de puntos sobre una recta, uno de los cuales es armónico conjugado del otro, no distinguiremos cuál de los dos es conjugado del otro, y los llamaremos *mutuamente armónicos*.

Una de las propiedades más importantes de los grupos armónicos de puntos es expresada por el siguiente

TEOREMA 6. *Sean p, q y s, t dos pares de rectas de algún haz con centro O, que al cortarse con una recta u determinan los pares de puntos P, Q y S, T respectivamente, y al cortarse con la recta u', los pares de puntos P', Q' y S', T'. Entonces si P, Q y S, T son pares mutuamente armónicos, también lo serán los pares P', Q' y S', T'.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos primero la afirmación en el caso particular en que dos de los puntos correspondientes P, Q, S, T y P', Q', S', T', digamos, los puntos T y T', coinciden (fig. 95).

Tracemos la recta SQ' y denotemos con R su punto de intersección con la recta OT. Como los pares de puntos P, Q y S, T son mutuamente armónicos, en virtud del teorema 4 la recta RS' deberá pasar por el punto P (para comprobarlo, debe considerarse el cuadrivértice $ROS'Q'$, con puntos diagonales S, T). Se obtiene el cuadrivértice $RPSO$ con puntos diagonales S', T' y lados OP y RS, que pasan por los puntos P' y Q'. De aquí sigue que los pares P', Q' y S', T' son mutuamente armónicos, con lo que queda probado el teorema en el caso particular analizado.

Pasemos a considerar el caso general de posición de las rectas u y u'. Construimos la recta $P'T$ (fig. 96). Las rectas p, q, s, t determinan sobre $P'T$ los puntos P'', Q'', S'', T''. Como los puntos T y T'' coinciden, al ser armónicos conjugados los pares P, Q y S, T, también lo serán, por el análisis precedente, los pares P'', Q'' y S'', T''. Pero, como también coinciden los puntos P'' y P', al ser armónicos conjugados los pares P'', Q'' y S'', T'', también lo serán los pares P', Q' y S', T'. Queda así totalmente demostrado el teorema.

En virtud de este teorema, si dos pares de rectas de un haz determinan, al cortarse con alguna recta, dos pares de puntos armónicos conjugados, la misma propiedad la poseerán los pares de puntos determinados por la intersección de los pares de rectas considerados, con cualquier otra recta. Así, la propiedad de dos pares de rectas de un haz, de determinar sobre alguna recta pares armónicos conjugados de puntos, no depende de la elección de la recta, y viene así a ser una propiedad intrínseca de los pares de rectas en cuestión. Los pares de rectas de un haz que posean esta propiedad se llamarán *armónicos conjugados*.

Diremos que las rectas p, q, s, ..., que parten del punto O hacia los puntos P, Q, S, ..., *proyectan* estos puntos desde O. La construcción de las rectas proyectantes p, q, s, ... a partir de los puntos dados P, Q, S, ... se llamará *operación de proyección;* la determinación de los puntos P, Q, S, ... a partir de las rectas dadas p, q, s, ..., *operación de sección*.

Utilizando esta terminología, podemos enunciar la siguiente proposición (como corolario del teorema 6).

Como resultado de las operaciones de proyección o de sección de pares armónicos conjugados de elementos (sean éstos puntos de una recta o bien rectas de un haz), siempre se obtienen nuevamente pares de elementos armónicos conjugados.

O, dicho de otra forma:

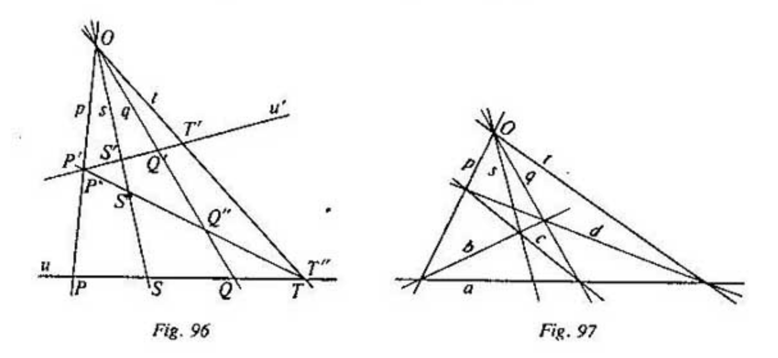


Fig. 96 Fig. 97

La propiedad de conjugación armónica es invariante con respecto a las proyecciones y a las secciones.

Recurriendo a una terminología similar a la que utilizamos con respecto a los grupos armónicos de puntos sobre una recta, diremos que la recta t de un haz es la cuarta armónica de la terna de rectas p, q, s del mismo haz, si los pares p, q y s, t son armónicos conjugados (en la escritura de la terna p, q, s, se pone en los dos primeros lugares al par p, q).

El lector puede fácilmente dilucidar el método de construcción de la cuarta recta armónica t a partir de tres rectas dadas p, q, s, analizando la fig. 97 (al reconstruir la figura representada en la fig. 97, hay que trazar primeramente, de manera arbitraria, las dos rectas a, b que pasen por algún punto de la recta p; luego se traza la recta c y, por último, la d; hecho esto, la posición de la recta t queda unívocamente determinada).

§ 87. Todos los teoremas que hemos demostrado en esta sección tienen que ver con la geometría proyectiva del plano. La fuente de éstos la constituye el teorema de Desargues que, por su contenido, es también un teorema de la geometría plana. Sin embargo, su demostración fue efectuada utilizando razonamientos de la geometría del espacio. Es natural plantearse la pregunta de si es posible demostrar el teorema de Desargues de forma que en la prueba no se recurra a configuraciones en el espacio.

Se conocen demostraciones de este tenor, pero todas ellas son de carácter métrico y, por esto, no son aplicables en la geometría proyectiva. Un análisis de esta cuestión, llevado a cabo por Hilbert, reveló que es imposible demostrar el teorema de Desargues con los medios de la geometría proyectiva, sin recurrir a construcciones en el espacio.

Dicho con más precisión: si se eliminan de la lista de axiomas I,1 — I,9 todas las aseveraciones que se refieren al espacio, de las restantes —que serán únicamente los axiomas I,1— I,3 — no sigue el teorema de Desargues. La independencia de este teorema de los axiomas I,1 — I,3 (e inclusive de los axiomas de una lista más larga, que contenga, amén de los axiomas I,1 — I,3, también los axiomas proyectivos de orden y de continuidad, que detallaremos más adelante) puede ser demostrada, en principio, con el mismo método que fue descrito en detalle y aplicado varias veces

en el capítulo IV. (La demostración de Hilbert se expone en sus «Fundamentos de la Geometría»).

En virtud de lo indicado, la proposición de Desargues puede considerarse como un axioma de la geometría proyectiva plana.

§ 88. Para concluir esta sección, haremos dos observaciones. La primera tendrá que ver con la demostración de la proposición acerca de la invariancia de los grupos armónicos de elementos con respecto a proyecciones. Tal proposición fue demostrada con métodos de la geometría plana. Si no renunciamos a utilizar configuraciones en el espacio, es posible dar otra demostración, más esclarecedora.

Sean u y u' dos rectas de un plano α (fig. 98); sean P, Q, S, T, puntos de la recta u, y P', Q', S', T', sus proyecciones sobre la recta u' desde un centro O (situado asimismo en el plano α). Supongamos que los pares P, Q y S, T son armónicos conjugados. Tracemos por u y u' planos β y β' respectivamente, diferentes del plano α. Como los pares de puntos P, Q y S, T son armónicos conjugados, en el plano β puede construirse un cuadrivértice Ω, que tenga P, Q por puntos diagonales y un par de lados opuestos que pasen por S y T. Proyectando el cuadrivértice Ω desde el centro O sobre el plano β' (que hace las veces de pantalla), obtenemos en el plano β' un cuadrivértice Ω', situado con respecto a los pares P', Q' y S', T' del mismo modo que Ω está con respecto a los pares P, Q y S, T. De aquí sigue inmediatamente que los pares P', Q' y S', T' son armónicos conjugados.

La segunda observación se refiere a la posibilidad de generalizar el teorema de la invariancia de los grupos armónicos de elementos con respecto a proyecciones.

Hasta aquí hemos considerado proyecciones desde algún centro. A veces debe considerarse también la proyección axial (en la geometría proyectiva del espacio), amén de la proyección central.

Sea o alguna recta, y sea $P, Q, S, \ldots$ un sistema de puntos sobre otra recta u, que no esté en un mismo plano con o (fig. 99). El sistema de planos $\pi, \varkappa, \sigma, \ldots$, que pasan por la recta o y por los puntos $P, Q, S, \ldots$, se llama haz de planos con eje o, que proyecta los puntos $P, Q, S, \ldots$ Si u' es alguna nueva recta, que interseca a los planos $\pi, \varkappa, \sigma, \ldots$ en los puntos $P', Q', S', \ldots$, diremos que $P', Q', S', \ldots$ fueron obtenidos mediante una proyección axial de los puntos $P, Q, S, \ldots$

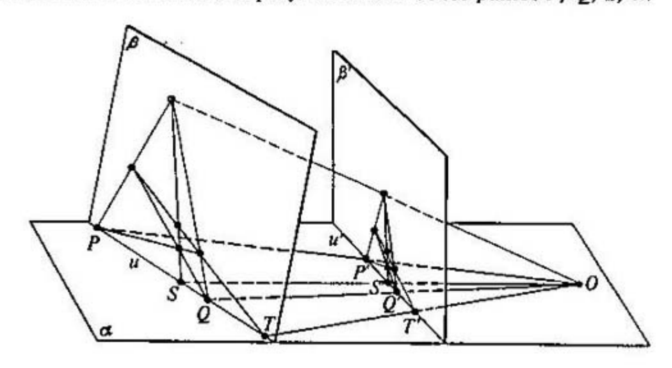


Fig. 98

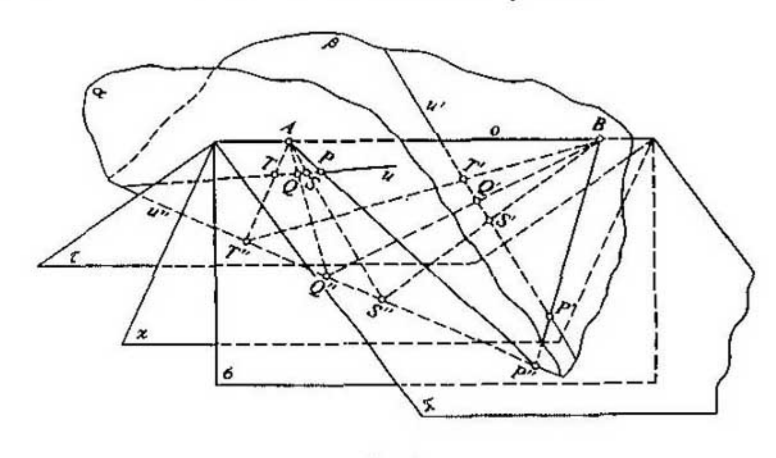


Fig. 99

Sucede que *la invariancia de la conjugación armónica de pares de los puntos tiene lugar también bajo una proyección axial.*

Sea P, Q, S, T una cuaterna armónica de puntos de una recta u, que se transforma en la cuaterna P', Q', S', T' de alguna recta u', bajo una proyección axial (en el caso general, las rectas u y u' no están sobre un mismo plano). Mostraremos que la cuaterna de puntos P', Q', S', T' es también armónica.

Con este fin, tracemos una recta u'', que interseque a las dos rectas u y u' (fig. 99). Las rectas u y u'' están en un mismo plano α; las rectas u' y u'' también están en un mismo plano β. Sean A y B los puntos en los cuales los planos α y β se intersecan con el eje del haz proyectante de planos, y P'', Q'', S'', T'', los puntos en los cuales los planos de este haz cortan a la recta u''. Evidentemente, el grupo de puntos P'', Q'', S'', T'' puede considerarse como obtenido por medio de una proyección central de los puntos P, Q, S, T, desde el centro A, dentro del plano α. Por esto, de la armonicidad del grupo de puntos P, Q, S, T sigue que el grupo P'', Q'', S'', T'' es armónico. Ahora bien, considerando el grupo P', Q', S', T' como la proyeccion central del grupo P'', Q'', S'', T'' desde el centro B, podemos concluir que la primera cuaterna es armónica, en virtud de que la segunda lo es.

Así, entonces, si dos pares de planos π, $\varkappa$ y σ, τ de cierto haz determinan, al cortarse con cierta recta, dos pares de puntos armónicos conjugados, estos planos determinarán dos pares de puntos armónicos conjugados también al intersecarse con cualquier otra recta. En este caso, los pares de planos π, $\varkappa$ y σ, τ se llaman *armónicos conjugados.*

No es difícil comprobar que al intersecar pares de planos armónicos conjugados de un haz por algún plano que no pase por el eje de dicho haz, se obtienen en el plano secante dos pares armónicos conjugados de rectas de un haz lineal. La demostración es inmediata y no nos detendremos en ella.

3. Orden de los puntos sobre la recta proyectiva

§ 89. Como ya sabemos, en la geometría elemental, como base de la definición del orden de los puntos de una recta, se toma el concepto de la posición de un punto entre otros dos (véase el cap. II, § 13). En la geometría proyectiva, donde la recta se piensa como una línea cerrada, no tiene sentido introducir este concepto. En efecto, considerando tres puntos arbitrarios de la recta proyectiva (o bien tres puntos de una circunferencia), no podemos, en su posición relativa, distinguir a alguno de ellos en comparación con los otros dos.

Para definir el orden de los puntos de una recta proyectiva, se parte de la consideración de dos pares de puntos. Vamos a permitirnos, primeramente, el uso de un dibujo. Sean A, B, C, D cuatro puntos de una recta proyectiva u, situados tal como se representa en la fig. 100 (donde la recta proyectiva tiene la forma de una línea cerrada). Si quisiésemos desplazar el punto C sobre la recta u hasta hacerlo coincidir con el D, tendríamos necesariamente que hacer coincidir en algún momento el punto C con el A, o bien con el B. Análogamente, para hacer coincidir el punto A con el B, tendríamos que hacer pasar el punto A por la posición del punto C, o bien por la del D. En tal caso se dice que el par A, B separa al par C, D.

En este mismo grupo de puntos A, B, C, D, los pares A, D y B, C son tales que para hacer coincidir los puntos B y C no hay necesidad de hacer pasar a alguno de ellos por la posición del A, o bien del D; análogamente, para superponer los puntos A y D no hay necesidad de hacer pasar a ninguno de ellos por la posición del B, o bien por la del C. Se dice entonces que los pares A, D y B, C no se separan entre sí. De la misma manera, no se separan entre sí los pares A, C y B, D. Así, nuestra idea intuitiva de la recta proyectiva (o de la circunferencia) nos permite distinguir pares de puntos que se separan y pares que no se separan.

En un desarrollo lógico de la geometría proyectiva, la separación de pares de puntos sobre la recta se adopta como relación básica de orden. Las propiedades necésarias de ésta relación se presentan en los axiomas del segundo grupo.

GRUPO II. AXIOMAS PROYECTIVOS DE ORDEN.

Suponemos que dos puntos de una recta pueden encontrarse en una determinada relación con dos otros puntos de esta recta; denotaremos esta relación con el término «separan». Además, deben satisfacerse las condiciones indicadas en los axiomas siguientes, que son, precisamente, los axiomas de orden.

II,1. *Cualesquiera que sean tres puntos diferentes A, B, C de una recta arbitraria u, existe sobre esta recta algún punto D tal que el par A, B separa al par C, D.*

Si el par A, B separa al par C, D, los cuatro puntos A, B, C, D son diferentes.

II,2. *Si el par A, B separa al C, D, también el par B, A separa al C, D y el par C, D separa al A, B (es decir, la propiedad de separación es reflexiva y no depende del orden en que se tomen los puntos del par).*

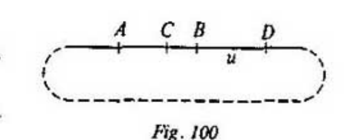


Fig. 100



Fig. 101 *Fig. 102*

II,3. *Cualesquiera que sean cuatro puntos diferentes A, B, C, D de una recta u, de ellos siempre, y de manera única, se pueden formar dos pares separados.*

II,4. *Sean dados sobre la recta u los puntos A, B, C, D, E; si los pares C, D y C, E separan al par A, B, entonces el par D, E no separa al A, B* (fig. 101).

II,5. *Sean dados sobre la recta u los puntos A, B, C, D, E; si los pares C, D y C, E no separan al A, B, entonces el par D, E tampoco separará al A, B* (fig. 102).

II,6. *Sean A, B y C, D dos pares de puntos de una recta u; A', B' y C', D', sus proyecciones, desde un centro arbitrario, sobre una recta cualquiera u'. Si los pares A, B y C, D se separan, los pares A', B' y C', D' también se separarán. En forma concisa: la separación de dos pares de puntos es una propiedad invariante con respecto a las proyecciones.*

Basándonos en el axioma II,6 puede darse la definición del concepto de pares separados de rectas de un haz plano.

Precisamente, si *a, b* y *c, d* son dos pares de rectas que pasan por algún punto y *s* es alguna recta que corta a *a, b* y *c, d* en los puntos *A, B* y *C, D,* respectivamente, entonces, como se desprende del axioma II,6, los pares de puntos *A, B* y *C, D,* cualquiera que sea la elección de la recta *s,* o bien estarán siempre separados, o bien no separados. En el primer caso diremos que los pares de rectas *a, b* y *c, d* se separan mutuamente; en el segundo, que no se separan. Así, el concepto de separación de pares de rectas se reduce al de separación de pares de puntos; el último es, para nosotros, un concepto básico, que no se reduce a otros primitivos.

Al exponer la geometría proyectiva, no es nuestra finalidad construirla sobre la base de requisitos mínimos. Por esto, no trataremos de aclarar si todos los axiomas enunciados son efectivamente necesarios o si algunos de ellos pueden ser demostrados. Lo importante es que estos axiomas bastan para la demostración de los teoremas que constituyen el cuerpo de la geometría proyectiva *).

TEOREMA 7. *Supongamos que sobre una recta arbitraria u se han fijado dos puntos A y B. Entonces todos los puntos de la recta u, diferentes de A y B, pueden ser separados en dos clases, de modo que dos puntos cualesquiera de una misma clase formen un par que no separa a A, B, y cada par de puntos de clases diferentes separen al par A, B.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del axioma I,3, sobre la recta *u* existe algún punto *C*, diferente de *A* y de *B*. Pongamos en una clase el punto *C* y todo otro punto de la recta *u*, si este punto, conjuntamente con el *C*, forma un par que no separa al *A, B*. En la otra clase pondremos cada punto de *u* que, conjuntamente con el *C*, separe al par *A, B*. Entonces todos los puntos de la recta *u* (excepción hecha de *A* y de *B*) se separan en dos clases. Tenemos que demostrar que esta distribución satisface las condiciones planteadas en el enunciado del teorema.

---

*) Conjuntamente con el axioma de continuidad, expuesto en el § 94, estos axiomas conforman un sistema completo.

Sean C_1 y C_2 dos puntos de la primera clase. De acuerdo con las condiciones usadas para determinar la primera clase, los pares C, C_1 y C, C_2 no separan al A, B. Por el axioma II,5, de aquí sigue que el par C_1, C_2 no separa al A, B. Sean, ahora, D_1 y D_2 dos puntos de la segunda clase. Según la definición de la segunda clase, los pares C, D_1 y C, D_2 separan al A, B. En virtud del axioma II,4, de esto concluimos que el par D_1, D_2, al igual que en el primer caso, no separa al par A, B. Así, entonces, si dos puntos pertenecen a una misma clase, no separan al par A, B.

Sean ahora M y N dos puntos de clases diferentes. Supongamos, por ejemplo, que M se escoge en la primera clase, y N, en la segunda. Entonces el par C, M no separa al A, B, mientras que el C, N lo separa. Si el par M, N no separase al A, B, entonces, como además el par M, C no separa al A, B, por el axioma II,5 el par C, N no tendría que separar al A, B, lo que contradiría la hipótesis asumida. Consecuentemente, el par M, N separa al A, B. El teorema queda demostrado.

Obsérvese que si la construcción descrita de las dos clases se aplica partiendo no del punto C, sino de cualquier otro punto de la primera clase, se obtienen las mismas dos clases construidas en el primer caso. Si, en cambio, se toma como inicial algún punto de la segunda clase y se efectúa nuevamente la distribución de puntos, se obtendrán otra vez las clases anteriores, sólo que en orden inverso.

Aplicando la terminología usual en la geometría intuitiva, llamaremos *segmento* a cada una de las dos clases en cuestión. Entonces el contenido del teorema precedente puede expresarse en los siguientes términos.

Dos puntos A, B de una recta la dividen en dos segmentos; si M y N son puntos de un mismo segmento, el par M, N no separa al A, B; si, en cambio, M y N son puntos de segmentos diferentes, los pares M, N y A, B separan uno al otro.

A fin de distinguir uno de los dos segmentos considerados con respecto al otro, debe indicarse alguno de sus puntos. Por esto, en la geometría proyectiva el segmento a veces se denota con tres letras; por ejemplo, ACB denota el segmento de extremos A, B y punto interior C. Si el par C, D separa al A, B, entonces ACB y ADB son segmentos diferentes de extremos A, B. Los segmentos ACB y ADB se llamarán *complementarios* (mutuamente).

Ahora demostraremos un teorema que nos permitirá definir en la geometría proyectiva una figura totalmente análoga a un triángulo euclidiano.

TEOREMA 8. *Sean A, B, C tres puntos que no pertenecen a una misma recta, u y u', dos rectas que no pasan por ninguno de los puntos A, B, C; sean, además, P, Q, R, los puntos en los que la recta u interseca a las rectas AB, BC y AC; P', Q', R', los puntos en los cuales estas mismas rectas cortan a u'. Entonces, si el par P, P' no separa al par A, B y el par Q, Q' no separa al B, C, el par R, R' no separará al A, C* (fig. 103).

DEMOSTRACIÓN. Denotemos con O el punto de intersección de las rectas u y u'. Proyectando los pares A, B y P, P' desde el punto O, como centro, sobre la recta AC, obtenemos como proyecciones los pares A, S y R, R'. Por la hipótesis del teorema, los pares A, B y P, P' no separan uno al otro. Entonces, en virtud del axioma II,6, los pares A, S y R, R' también tendrán que estar no separados. Proyectando nuevamente desde el centro O, sobre la recta AC, los pares B, C y Q, Q', obtenemos los pares S, C y R, R'. Como B, C no separa a Q, Q', por el mismo axioma II,6 los pares S, C y R, R' no se separarán. Así, los pares S, A y S, C no separan al R, R'. Del axioma II,5 hallamos, entonces, que A, C no separa a R, R'. El teorema queda demostrado.

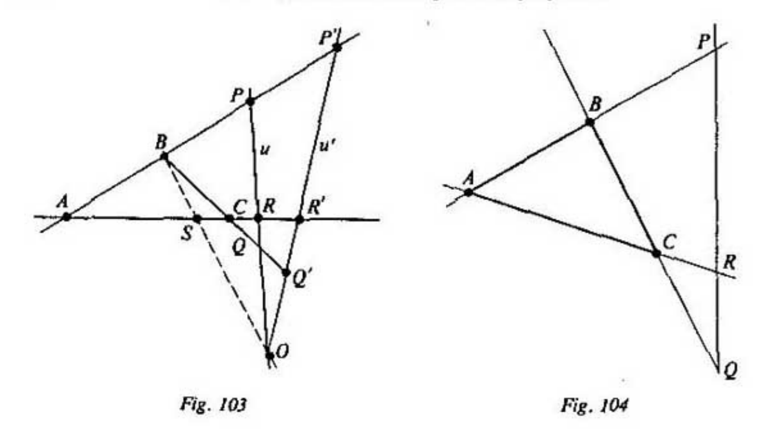


Fig. 103 *Fig. 104*

Fijados tres puntos A, B, C no alineados, escojamos uno de los dos segmentos de extremos A, B y uno de los dos segmentos de extremos B, C (en la fig. 104 los segmentos escogidos se representan por trazos gruesos). Convengamos en denotar con AB y BC precisamente los segmentos escogidos. Tomemos sobre el segmento complementario a AB algún punto P, en el complementario a BC, algún punto Q y tracemos la recta PQ. Sea R el punto en que la recta PQ corta a la AC. Ahora variaremos arbitrariamente los puntos P y Q, dejando siempre el primero en el segmento complementario al AB y el segundo en el complementario a BC. Entonces, como sigue inmediatamente del teorema anterior, el punto R, al desplazarse por la recta AC, permanecerá siempre dentro de un segmento fijo de los dos que quedan determinados por los puntos A y C. El segmento de extremos A y C COMPLEMENTARIO a aquél que contiene al punto R, se convendrá en denotar con AC. Podemos ver que *el segmento AC queda determinado de manera unívoca al fijar los segmentos AB y BC.* La figura formada por los puntos A,B, C y los segmentos AB, BC y AC se llamará *triángulo*; llamaremos *sus lados* a los segmentos AB, BC y AC.

No es difícil establecer que cada trivértice ABC determina cuatro triángulos con vértices comunes A, B, C. Los lados de estos triángulos son segmentos complementarios mutuamente sobre las rectas que hacen de lados del trivértice. En la fig. 105 se representan los triángulos I, II, III, IV, determinados por un (único) trivértice ABC.

Ahora mostraremos que *en la geometría proyectiva vale la proposición de Pasch* (véase el cap. II, § 13), *es decir, si se dan un triángulo ABC y, en el plano de éste, alguna recta a, que no pase por ninguno de los puntos A, B, C y si esta recta pasa por algún punto del lado AB, entonces pasará o bien por algún punto del lado BC, o bien por alguno del lado AC.*

Para demostrar esto observemos, ante todo, que de acuerdo con la definición de triángulo existe una recta u que interseca a las rectas AB, BC y AC en tres puntos P, Q, R respectivamente, de forma que P está en el segmento complementario a AB, Q, en el complementario a BC y R, en el complementario a AC (fig. 106). Además,

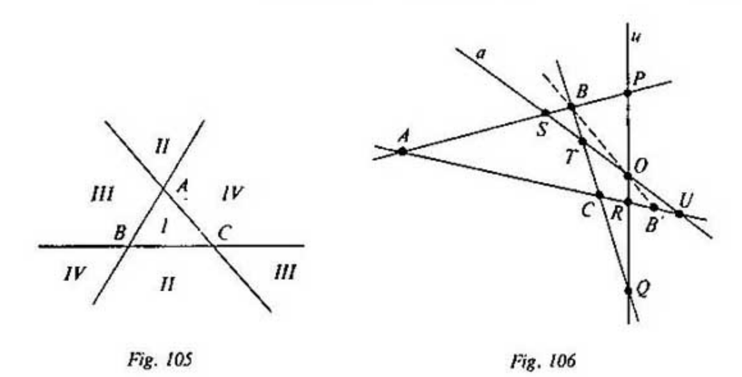


Fig. 105 Fig. 106

como nuestro análisis se efectúa en el plano proyectivo, por el axioma I,9 la recta dada a tiene un punto T en común con la recta BC, y un punto U en común con la recta AC. Denotemos con S el punto de corte de las rectas a y AB.

Supongamos que el punto T está en el segmento BQC y el U en el ARC. Entonces, por el teorema 8, el punto S tendrá que pertenecer al segmento APB, cosa que contradice la hipótesis de que el punto S pertenece al segmento AB. Así, la recta a interseca al menos a uno de los dos lados BC y AC de nuestro triángulo. Con esto queda demostrada la proposición de Pasch.

§ 90. Fijemos en el espacio proyectivo algún plano y denotémoslo con α_∞. Convengamos en llamar «impropio» a este plano. También llamaremos «impropios» a todos los puntos y rectas pertenecientes al plano α_∞. Los demás elementos del espacio se llamarán «propios». (Escribimos entre comillas los términos «propios» e «impropios», pues el plano α_∞ fue escogido arbitrariamente y la diferencia entre los elementos «propios» y los «impropios» es convencional.)

Evidentemente, cada recta «propia» contiene un punto impropio, y sólo uno, precisamente, el punto de su intersección con el plano α_∞. En el conjunto de los puntos restantes, es decir, los «propios», de cualquier recta «propia», introduciremos una relación, expresada con el término «entre», por medio de una condición bien determinada y general para todas las rectas.

Sea a una recta «propia» arbitraria; O_∞, su punto «impropio». Consideremos tres puntos «propios» A, B, C cualesquiera de la recta a. Si el punto B, conjuntamente con el O_∞, forma un par B, O_∞ que separa al A, C, diremos que en el conjunto de los puntos «propios» de la recta a, el punto B está entre los puntos A y C. No es difícil comprobar que de esta manera el concepto «entre» establecido satisface las hipótesis de los axiomas de Hilbert de orden II,1 — II,3.

En efecto, de acuerdo con el axioma proyectivo II,2, si el par B, O_∞ separa al par A, C, éste separará también al par C, A; por ende, si por nuestra definición el punto B está entre A y C, entonces B estará, asimismo, entre C y A. Esto significa, a su vez, que el axioma de Hilbert II,1 se satisface.

Además, cualesquiera que sean los puntos «propios» A y C, en virtud del axioma proyectivo II,1 siempre existe algún punto D, tal que el par C, O_∞ separa al

A, D. Por lo tanto, en el conjunto de los puntos «propios» de la recta a siempre existe algún punto D, tal que C está entre A y D. Esto significa que el axioma de Hilbert II,2 también se observa.

Por último, según el axioma proyectivo II,3, de cuatro puntos A, B, C, O_∞ se pueden formar sólo de una manera dos pares separados. Por consiguiente, dados tres puntos A, B, C, no más de uno de ellos está entre los otros dos. En esto consiste, precisamente, el axioma de Hilbert II,3.

Al establecer en el conjunto de puntos «propios» de una recta el concepto «entre», podemos dar la definición usual en la geometría intuitiva de segmento, llamando segmento al conjunto de puntos de una recta situados entre dos puntos dados de ésta. Evidentemente, el segmento, entendido en este sentido, no es otra cosa que uno de los dos segmentos complementarios en los que se divide, por medio de los puntos A, B, la recta proyectiva que pasa por ellos; precisamente, el segmento que no contiene al punto impropio.

Es evidente también que la figura llamada triángulo en el sentido de las relaciones que hemos introducido en el sistema de elementos «propios» del espacio proyectivo, es asimismo un triángulo en el sentido en que hemos definido este concepto en la geometría proyectiva (véase el parágrafo precedente). Por esto, puede afirmarse que en el sistema de elementos «propios» del espacio proyectivo vale el axioma de Pasch, pues lo hemos demostrado para todo el espacio proyectivo.

Así, pues, en el sistema de elementos «propios» hemos introducido el concepto «entre» de forma que se satisfagan todos los axiomas de Hilbert de orden.

Supongamos, ahora, que el plano «impropio» α_∞, conjuntamente con los puntos «impropios» y rectas «impropias» que le pertenecen, fue totalmente excluido del espacio proyectivo, o, como suele decirse en tales casos, que *el espacio proyectivo ha sido cortado a lo largo del plano* α_∞. No es difícil comprobar que las relaciones de pertenencia mutua de los elementos restantes están sujetas a los axiomas de incidencia de Hilbert. De aquí y de la exposición precedente podemos afirmar que, con respecto al espacio proyectivo cortado a lo largo de alguno de sus planos, valen todos los teoremas de la geometría elemental, que se basen únicamente en los axiomas de los dos primeros grupos de Hilbert.

En particular, se puede afirmar que hay una cantidad infinita de puntos, rectas y planos en el espacio proyectivo.

El proceso que acabamos de describir viene a ser el inverso del descrito en la sección anterior. Allí se mostró que completando el espacio euclidiano con elementos nuevos se lo podía transformar en un espacio proyectivo. Ahora vemos que el espacio proyectivo, definido por medio de axiomas especiales, se transforma en cierto sentido en un análogo del euclidiano, si le quitamos alguno de sus planos.

En lo que sigue utilizaremos a veces el corte del espacio a lo largo de uno u otro plano, como método que nos permitirá efectuar demostraciones de los dos primeros grupos de axiomas de la geometría *elemental*, que ya conocemos del capítulo II.

En particular, ahora recurriremos a este método para caracterizar el orden de posición de los puntos en una recta proyectiva.

Sean A y B dos puntos de una recta proyectiva u; éstos dividen a u en dos segmentos complementarios. Consideremos uno de ellos, y convengamos en denotar por AB precisamente a este segmento. El conjunto de los puntos interiores de AB se

ordenará, suponiendo que el punto M precede al N, si el par A, N separa al M, B. Hay que mostrar que se cumple la condición de transitividad, es decir, que si M precede a N, y N precede a P, entonces M precede a P. Lo más sencillo para esto es introducir en la recta u un punto impropio (punto del infinito). Como tal resulta cómodo tomar el punto B. Entonces la condición «N precede a P» puede expresarse así: «en el conjunto de los puntos propios de la recta u, el punto N está entre A y P», o bien «N está en el interior del segmento AP». Para demostrar la transitividad de la relación de orden introducida, basta en tal caso establecer, para el conjunto de los puntos propios de la recta u, la siguiente proposición: «si M está dentro del segmento AN, y N, dentro del AP, entonces M está, asimismo, en el interior del segmento AP». Pero esta proposición fue deducida en su oportunidad a partir de los dos primeros grupos de axiomas de Hilbert (véase el cap. II, § 14).

Diremos que el orden establecido en el segmento AB corresponde al sentido del segmento desde A hacia B. En el segmento complementario a AB introduciremos el orden que corresponde al sentido desde B hacia A. Hecho esto, podemos establecer dentro de un segmento arbitrario ST de la recta u un orden bien definido, imponiendo que en las partes comunes del segmento ST con el AB y con el complementario de AB, el orden de los puntos de ST coincida con el de los puntos en estos segmentos. Analizando todos los casos posibles de posición del segmento ST, precisamente: 1) cuando ST está contenido dentro del segmento AB, 2) cuando el segmento ST está contenido dentro del segmento complementario de AB, 3) cuando ST cubre el segmento AB, 4) cuando ST cubre el complementario de AB, 5) cuando el segmento ST cubre parte del segmento AB y parte del complementario, el lector puede comprobar sin dificultad que en todos los casos el conjunto de los puntos interiores del segmento ST puede ser siempre ordenado, y además de manera única, observando la condición impuesta.

La propiedad de posición relativa de los puntos de la recta proyectiva que garantiza que en cada uno de sus segmentos se induzca —de la forma indicada arriba— un orden determinado de los puntos interiores, se llamará *orden cíclico*. Según cómo esté ordenado el conjunto de los puntos del segmento AB original —ya sea en el sentido desde A hacia B o bien desde B hacia A—, en la recta proyectiva pueden establecerse dos órdenes cíclicos diferentes. Estos son inversos uno del otro, en el sentido de que si según uno de ellos, dados dos puntos M, N dentro de algún segmento ST, el punto M precede al N, entonces según el otro orden cíclico el punto M seguirá al N, dentro del segmento ST.

Los axiomas II,1 — II,6 serán llamados axiomas proyectivos de orden, pues éstos fundamentan la introducción del orden cíclico sobre la recta proyectiva.

§ 91. Para funalizar la presente sección, introduciremos sobre la recta proyectiva una topología, es decir, dotaremos de un significado al concepto de proximidad entre sus puntos. Esto se conseguirá construyendo un sistema de entornos para cada punto de la recta proyectiva.

Supongamos fijada alguna recta proyectiva u. Convendremos en llamar entorno de uno de sus puntos arbitrarios M a cualquier segmento abierto (es decir, un segmento con los extremos excluidos) que contenga en su interior al punto M.

En este caso, tendrán lugar las siguientes proposiciones (que sirven de base a los teoremas topológicos del análisis elemental):

1. Cada entorno del punto M contiene este punto.

2. La parte común de dos entornos del punto M contiene algún entorno de este punto.

3. Un entorno de un punto M es, asimismo, entorno de cualquier otro de sus puntos.

4. Dados dos puntos diferentes M y N, existen entornos disjuntos de éstos.

La primera y la tercera de estas afirmaciones son una consecuencia inmediata de nuestra definición de entornos; la segunda y la cuarta, a pesar de ser intuitivamente evidentes, requieren una demostración.

A fin de hacerla lo más sencilla posible, puede cortarse la recta proyectiva, reduciendo así el problema al análisis de segmentos en el sentido euclidiano. No nos dedicaremos aquí a efectuar los razonamientos necesarios.

Una vez construido un sistema de entornos en la recta proyectiva, hemos abierto la posibilidad de hablar de puntos límite (puntos de acumulación) de conjuntos, de límites de sucesiones de puntos, de continuidad de funciones definidas sobre la recta proyectiva, etc.: en una palabra, de toda la colección de resultados denominados topológicos.

Esta posibilidad será utilizada en las secciones subsiguientes.

4. Separación de los pares armónicos; continuidad de la correspondencia armónica

§ 92. Para lo que sigue resulta esencial demostrar que *los puntos diagonales de un cuadrivértice no están sobre una misma recta.*

Sea $ABCD$ un cuadrivértice completo, con puntos diagonales P, Q, R (la notación corresponde a la fig. 93). Hay que mostrar que la recta PQ no pasa por R. Efectuemos un corte del plano por la recta PQ (es decir, eliminemos la recta PQ); en el conjunto de los elementos restantes establezcamos relaciones de orden en la forma hecha en el § 90. Entonces se cumplirán los axiomas I, II de la geometría elemental.

Según las relaciones de orden establecidas, el punto D está del mismo lado que el C con respecto a la recta AB, y del mismo lado que el B con respecto a la recta AC.

Por consiguiente, el punto D está dentro de $\angle BAC$. De aquí, en virtud del teorema 11a del § 16 del capítulo II concluimos que la recta AD interseca a la BC, es decir, que existe un punto común de estas rectas. Esto significa que el punto R no fue eliminado al efectuar el corte, con lo que queda demostrada la afirmación.

De aquí tenemos un corolario:

Si P, Q, S son tres puntos diferentes de una recta u y T es su cuarto armónico, los cuatro puntos P, Q, S, T son distintos.

De la fig. 93, donde se representa la construcción de los pares mutuamente armónicos P, Q y S, T, es fácil entrever el siguiente teorema, totalmente evidente desde el punto de vista intuitivo.

TEOREMA 9. *Los pares mutuamente armónicos separan uno al otro.*

Este teorema será de gran importancia en lo que sigue; ahora daremos su demostración rigurosa.

Sean dados, sobre una recta u, dos pares de puntos mutuamente armónicos P, Q y S, T. Consideremos algún cuadrivértice $ABCD$, para el cual P, Q sean puntos diagonales y S, T pertenezcan a lados opuestos BC y AD, que pasen por el tercer punto diagonal R (fig. 94).

Proyectemos los puntos P, Q, S, T desde el centro B sobre la recta AD; sus proyecciones serán los puntos A, D, R, T, respectivamente. Proyectemos nuevamente los puntos obtenidos sobre la recta u, pero esta vez tomando como centro de proyección el punto C. Las proyecciones de los puntos A, D, R, T serán los puntos Q, P, S, T, respectivamente.

Así, luego de dos proyecciones el grupo $PQST$ se transforma en sí mismo, pero sus puntos intercambian su orden, tal como lo muestra el esquema $\begin{pmatrix} PQST \\ QPST \end{pmatrix}$, en donde debajo de cada punto fue escrito el que le corresponde bajo la transformación.

Obsérvese ahora que los cuatro puntos P, Q, S, T pueden ser dispuestos en dos pares sólo de tres formas: 1) (PQ), (ST), 2) (PS), (QT) y 3) (PT), (QS). Es fácil notar que los pares (PS) y (QT) no pueden separar uno al otro. En efecto, si se tratase de pares separados, por el axioma II,6 también lo estarían los pares (QS) y (PT), pues se obtienen de los pares (PS) y (QT) como resultado de dos proyecciones. Por lo tanto, en este caso la segunda y la tercera de las tres formas posibles de disposición de los puntos $PQST$ en pares, producen pares que se separan. Pero esto contradice al axioma II,3, en virtud del cual dados cuatro puntos hay sólo una manera deformar pares separados.

De igual modo, si asumiésemos que son los pares (PT) y (QS) los cuales se separan, nos veríamos forzados a concluir que los pares (PS) y (QT) también uno al otro, con lo cual tendríamos nuevamente una contradicción. Como, por el axioma II,3, una de las tres maneras de formar pares dados cuatro puntos conduce necesariamente a pares separados, concluimos que los separados serán precisamente los pares (PQ) y (ST). El teorema queda demostrado.

Es útil enunciar este teorema también como sigue: si el par M, M' es conjugado armónico del par A, B, los puntos M y M' se encontrarán en segmentos mutuamente complementarios diferentes, determinados por los puntos A, B. Si los puntos A, B están fijos, entonces M' depende únicamente de M; esto lo simbolizaremos con la escritura $M' = f(M)$. Como $MM'AB$ y $M'MAB$ son en igual medida grupos armónicos de puntos, conjuntamente con la relación $M' = f(M)$ tendrá lugar la relación $M = f(M')$. La correspondencia $M' = f(M)$ se llama armónica. Evidentemente, bajo una correspondencia armónica los segmentos mutuamente complementarios con extremos comunes A, B se transforman biyectivamente el uno en el otro. Más adelante estudiaremos esta correspondencia con mayor detalle.

§ 93. Consideremos sobre una recta proyectiva arbitraria u, tres puntos dados M_1, M_2, M_3. Sea M el cuarto armónico de los puntos considerados; precisamente, el punto tal que el par M, M_3 resulte conjugado armónico del par M_1, M_2. Convendremos en utilizar la escritura simbólica $M = f(M_1, M_2, M_3)$, considerando a M como función de los tres puntos M_1, M_2, M_3. Evidentemente,, $f(M_1, M_2, M_3) = f(M_2, M_1, M_3)$ y, si $M = f(M_1, M_2, M_3)$, entonces $M_3 = f(M_1, M_2, M)$.

Si fijamos los puntos M_1 y M_2, haciendo $M_1 = A$, $M_2 = B$, y en lugar de M_3

escribimos M, la función $f(A, B, M)$ coincidirá con la función $f(M)$ introducida al final del parágrafo precedente.

Tiene lugar el siguiente teorema importante.

TEOREMA 10. *La función $M = f(M_1, M_2, M_3)$ es continua para todas las posiciones de los puntos M_1, M_2, M_3.*

De acuerdo con la forma en que definimos en el § 91 los entornos de los puntos sobre la recta proyectiva, este teorema puede enunciarse también como sigue: cualesquiera que sean los puntos M_1, M_2, M_3 y cualquiera que sea el segmento abierto Δ que contenga al punto M, siempre pueden indicarse segmentos abiertos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ que contengan los puntos M_1, M_2, M_3, respectivamente, tales que si estos puntos varían permaneciendo dentro de los segmentos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, el punto M variará sin salirse del segmento Δ.

Así, la demostración del teorema 10 tendrá que ser de carácter puramente constructivo, pues se reduce a determinar los segmentos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ a partir del segmento Δ dado. Haremos la demostración sólo en dos casos particulares, los únicos que necesitaremos en el futuro, o sea, 1) cuando el tercer argumento de la función $f(M_1, M_2, M_3)$ es un punto fijo $M_3 = C$; 2) cuando los dos primeros argumentos de la función $f(M_1, M_2, M_3)$ son puntos fijos $M_1 = A, M_2 = B$.

En el primer caso tendremos la función de dos variables $M = f(M_1, M_2, C)$. Sean dadas posiciones determinadas de los puntos M_1 y M_2. La construcción del punto M que les corresponde se representa en la fig. 107, *a*), donde Q_1, Q_2, G, H es el cuadrivértice de puntos diagonales M_1, M_2, Q, uno de cuyos lados Q_1Q_2 pasa por C, y el otro, HG, por M.

Supongamos que el plano proyectivo se ha seccionado a lo largo de la recta Q_1Q_2. Entonces, al considerar algún segmento cuyos extremos son conocidos, no habrá necesidad de indicar cuál de los dos segmentos mutuamente complementarios con los extremos dados se toma en consideración, pues sobre el plano proyectivo cortado dos puntos dados determinan un segmento de manera unívoca.

En la fig. 107, *b*) se representa la misma construcción con las mismas notaciones, pero la recta Q_1Q_2 ha sido dispuesta en el infinito; en esta figura, las rectas que van al punto Q_1(o al Q_2, o al Q) son paralelas; el punto M es el punto medio del segmento M_1M_2. Resulta más sencillo seguir los razonamientos ulteriores en la fig. 107, *b*).

Imaginémonos que los puntos M_1 y M_2 varían la posición suya sobre la recta u. Como el punto C permanece invariable, podemos, para determinar el punto M, siempre utilizar cuadrivértices con vértices constantes Q_1 y Q_2; entonces el punto diagonal Q también quedará fijo, pues se trata del cuarto armónico de los tres puntos fijos Q_1, Q_2, C, cosa que se comprueba fácilmente.

Si el punto M_1 al desplazarse permanece dentro de algún segmento $M_1'M_1''$ y el M_2, al desplazarse independientemente de M_1, permanece dentro de un segmento $M_2'M_2''$, el vértice variable H del cuadrivértice que utilizamos para determinar el punto M dados M_1, M_2, C, al variar quedará dentro del cuadrilátero $PSTR$. La proyección del punto H desde el punto Q sobre la recta u es, precisamente, el punto M. Cuando los puntos M_1 y M_2 ocupan las posiciones extremas M_1' y M_2', el punto H coincide con el punto T, y M va a parar a algún punto M'; cuando M_1 y M_2 ocupan las posiciones extremas M_1'' y M_2'', el punto H coincide con el P, y M se encuentra en

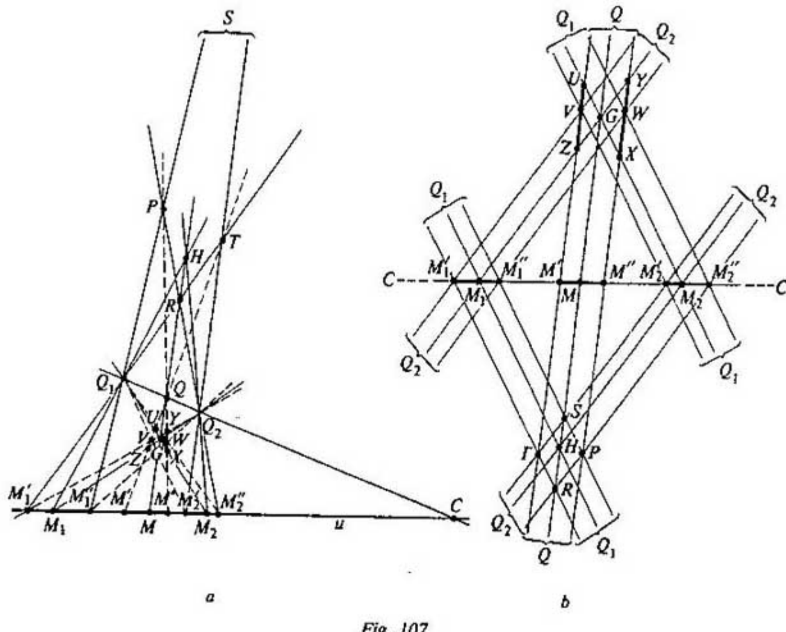


Fig. 107

un punto M''. Para todas las demás posiciones de los puntos M_1 y M_2, el punto M permanece entre M' y M''.

Resulta ahora sencillo pensar cómo construir, a partir de un entorno prefijado $\Delta = M'M''$ del punto M, entornos Δ_1 y Δ_2 de los puntos M_1 y M_2, tales que al variar estos puntos, su pertenencia a los entornos Δ_1 y Δ_2, respectivamente, asegure la pertenencia del punto M al entorno Δ. Para esto debe procederse como sigue: se proyectan los puntos M' y M'' desde el punto Q; sobre las semirrectas proyectantes se marcan los segmentos ZU y XY, cortados por las rectas Q_1M_2 y Q_2M_1; dentro del segmento ZU se toma un punto arbitrario V, dentro del segmento XY, un punto cualquiera W. Las proyecciones de los puntos V, W desde Q_2 sobre la recta u serán los puntos $M_1'M_1''$, que delimitan el segmento $\Delta_1 = M_1'M_1''$; las proyecciones de estos mismos puntos V, W desde Q_1 serán los puntos M_2', M_2'', que delimitan el segmento $\Delta_2 = M_2'M_2''$.

Los segmentos Δ_1 y Δ_2 construidos son los entornos buscados de los puntos M_1 y M_2, es decir, si M_1 y M_2 varían su posición, pero permanecen dentro de Δ_1 y Δ_2, respectivamente, entonces $M = f(M_1, M_2, C)$ cambiará su posición, pero se conservará dentro de Δ. Como los entornos Δ_1 y Δ_2 con las propiedades indicadas pueden ser determinados cualesquiera que sean los puntos M_1, M_2 y el entorno Δ, la función $M = f(M_1, M_2, C)$ es continua para posiciones cualesquiera de los puntos M_1 y M_2 sobre la recta proyectiva u.

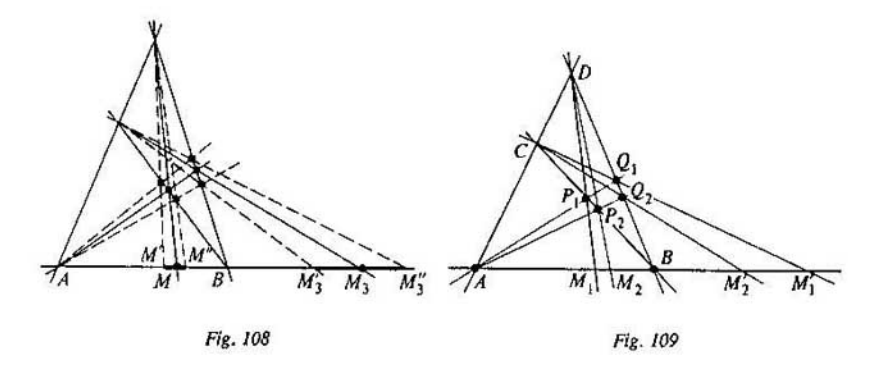


Fig. 108 *Fig. 109*

Pasando al otro particular que queríamos considerar, precisamente, cuando en la relación $M = f(M_1, M_2, M_3)$ están fijos $M_1 = A$ y $M_2 = B$, nos limitaremos a referirnos a la fig. 108; de esta figura, sin más aclaraciones, se aprecia cómo construir, a partir de un entorno dado $\Delta = M'M''$ del punto M, un entorno $\Delta_3 = M_3'M_3''$ del punto M_3, tal que al variar M_3, mientras éste permanezca dentro de Δ_3, el punto M se quede dentro de Δ. La posibilidad de tal construcción significa la continuidad de la función $M = f(A, B, M_3)$.

No nos detendremos en probar la continuidad de la función $M = f(M_1, M_2, M_3)$ en la totalidad de sus variables, pues el teorema 10 no nos hará falta en toda su generalidad.

Por el contrario, estudiaremos desde otro punto de vista la función de una variable $M' = f(A, B, M)$.

Supongamos que sobre la recta u se ha introducido algún orden cíclico, de manera que el conjunto de puntos de uno de los segmentos de extremos A, B ha sido ordenado en el sentido desde A hacia B, mientras que el conjunto de los puntos del segmento complementario se ha ordenado en el sentido desde B hacia A. Convendremos en denotar con AB el primero de estos segmentos.

Si el punto M se encuentra en el interior del segmento AB, en virtud del teorema 9 el punto $M' = f(A, B, M)$ tendrá que encontrarse en el segmento complementario al AB. Sean M_1 y M_2 dos posiciones arbitrarias del punto variable M dentro de AB, y M_1' y M_2', las posiciones correspondientes del punto M'. Ahora mostraremos que si el punto M_1 sobre el segmento AB precede al punto M_2, entonces el punto M_1', en el segmento complementaio al AB, sigue al punto M_2' (fig. 109).

A fin de mostrar esto, construimos los cuadrivértices completos CDP_1Q_1 y CDP_2Q_2 con puntos diagonales A, B comunes, de forma que los lados opuestos DP_1 y CQ_1 del primero de ellos pasen por M_1 y M_1', y los lados opuestos DP_2 y CQ_2 del segundo, por M_2 y M_2'. Proyectemos el grupo de puntos ABM_1M_2 desde el centro D sobre la recta CB. Como proyección, se obtiene el grupo de puntos CBP_1P_2. Este grupo se proyecta ahora desde el centro A sobre la recta DB; entonces, el grupo de puntos CBP_1P_2 se transformará en el DBQ_1Q_2. Proyectando, por último, el grupo de puntos DBQ_1Q_2 deste el centro C sobre la recta u, hallamos co-

mo proyección el grupo $ABM_1'M_2'$. Así, después de una serie de proyecciones los puntos ABM_1M_2 se transforman en los $ABM_1'M_2'$.

Si en el orden establecido de los puntos del segmento AB, el punto M_1 precede al M_2, entonces, por definición de este orden, el par A, M_2 separa al par M_1, B. En virtud de la invariancia de la propiedad de separación de dos pares bajo proyecciones (véase el axioma II,6), el par B, M_1' habrá de separar al A, M_2'. Pero esto significa, precisamente, que si el conjunto de puntos del segmento complementario al AB se ordena en el sentido desde B hacia A, en este orden M_1' sigue a M_2'.

El resultado obtenido puede describirse gráficamente como sigue: si el punto variable M recorre el segmento AB en el sentido desde A hacia B, el punto armónico M' que le corresponde recorrerá el segmento complementario al AB en el sentido opuesto, es decir, también desde A hacia B.

Si en el segmento AB se ha fijado un grupo de puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, dispuestos de manera que cada punto de subíndice menor precede a cada uno de subíndice mayor, entonces en el segmento complementario al AB, a los puntos de este grupo le corresponderán puntos $M_1', M_2', \ldots, M_n'$, dispuestos de forma que cada punto de subíndice menor sigue a cada uno de subíndice mayor.

Una aplicación de un segmento orientado sobre otro (también orientado), bajo la cual el orden de los puntos de cualquier grupo ordenado o bien se conserva siempre, o bien se transforma siempre en el opuesto, se denomina *ordenada* (*en forma directa* y *en forma inversa*, respectivamente, o «aplicación que conserva la orientación» y «aplicación que invierte la orientación», respectivamente).

Utilizando esta terminología y tomando en cuenta todo lo expuesto hasta aquí, podemos enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 11. *La aplicación armónica $M' = f(A, B, M)$ del segmento AB sobre su complementario es continua y ordenada en forma inversa.*

OBSERVACIÓN. Hasta ahora hemos asumido que los puntos del grupo armónico eran diferentes y la definición del cuarto armónico para tres puntos dados fue presentada sólo para el caso en que los puntos dados eran diferentes. Por esto, en el teorema 10 el caso de coincidencia de las variables M_1, M_2, M_3 de la función $M = f(M_1, M_2, M_3)$ debe considerarse, en rigor, como un caso singular, que merece una consideración especial.

Sin detenernos en el análisis de esta cuestión para la función $M = f(M_1, M_2, M_3)$, consideraremos la función $M' = f(A, B, M)$ para $M = A$ y $M = B$.

Supongamos que AB denota alguno de los dos segmentos determinados en la recta proyectiva por los puntos A y B. Del teorema 11 sigue que si M, permaneciendo dentro de AB, se aproxima monótonamente al punto A, entonces M' se aproximará hacia A, al encuentro de M, permaneciendo dentro del segmento complementario al AB. Por esto, si deseamos definir la función $M' = f(A, B, M)$ para $M = A$ de forma que resulte ser continua para esta posición de M, tenemos que poner que para $M = A$ es, asimismo, $M' = A$, es decir, considerar que $f(A, B, A) = A$. Análogamente tendremos $f(A, B, B) = B$.

En la aplicación de la recta proyectiva sobre sí misma que pone en correspondencia al punto M el punto $M' = f(A, B, M)$, los puntos A y B se corresponden a sí mismos. Estos se llaman *puntos dobles* (o *fijos*, o *unidos*) de la aplicación armónica.

5. Axioma de continuidad. Sistema proyectivo de coordenadas sobre la recta

§ 94. Nos acercamos a un punto de gran importancia en la exposición de la geometría proyectiva: la presentación del principio de determinación de los puntos del espacio proyectivo por medio de coordenadas.

En la geometría euclidiana las coordenadas de los puntos se determinan de manera muy sencilla, recurriendo a mediciones. En la geometría proyectiva, donde no hay axiomas de congruencia, la construcción de un sistema de coordenadas requiere ciertas astucias. Nosotros expondremos esta cuestión siguiendo el método de F.Klein.

Necesitaremos, amén de los dos grupos de axiomas proyectivos considerados más arriba (de incidencia y de orden), el axioma de continuidad (de Debekind), que viene a ser el único axioma del tercer grupo. A fin de facilitar su enunciado, introduciremos una terminología adecuada.

Imaginémonos que el espacio proyectivo se ha cortado a lo largo de algún plano que, por comodidad, se considerará alejado al infinito. Entonces en el conjunto de puntos de cada recta propia (es decir, cada recta que no se encuentre en el plano impropio) puede introducirse una relación que se expresa con el término «entre» (véase el § 90). Precisamente, si O_∞ es el punto impropio de alguna recta propia a, y A, B, C son otros tres puntos de ella, el punto C se considera ubicado entre A y B en la recta a, si el par C, O_∞ separa al par A, B. Entonces, como ya sabemos, con respecto a los elementos propios del espacio se satisfarán todos los requisitos de los dos primeros grupos de axiomas de Hilbert. Basándonos en los axiomas referidos, podemos ordenar el conjunto de puntos propios de una recta, de forma que cada vez que un punto C siga a algún punto A y preceda a un punto B, resulte situado entre A y B en el sentido que acabamos de definir. Observando este requisito, el conjunto de puntos propios de una recta puede ser ordenado únicamente de dos maneras distintas; además, los órdenes así introducidos son opuestos uno del otro (véase el § 14). Convendremos en llamar a cada uno de ellos, *orden lineal* sobre la recta proyectiva cortada en el punto del infinito.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el axioma de continuidad, el único del tercer grupo y el último en la axiomática proyectiva.

GRUPO III. AXIOMA DE CONTINUIDAD (DE DEDEKIND).

III. *Sea a una recta proyectiva arbitraria, cortada en algún punto O_∞. Si el conjunto de los puntos restantes de esta recta se divide en dos clases de forma que:* 1) *cada punto pertenezca a una clase, y sólo a una;* 2) *cada clase contenga puntos;* 3) *cada punto de la primera clase, en uno de los dos órdenes lineales sobre la recta a, preceda a cada punto de la segunda clase, entonces o bien en la primera clase existe un punto que sigue a todos los demás de esta clase, o bien en la segunda existe un punto que precede a todos sus otros puntos.*

En forma más concisa, este axioma se expresará como sigue:

En cada cortadura de Dedekind del conjunto ordenado de puntos de una recta proyectiva cortada, exactamente una de las dos clases posee un elemento que la clausura.

§ 95. En las páginas que siguen se muestra cómo puede introducirse un sistema de coordenadas sobre la recta proyectiva.

Sean dadas una recta proyectiva arbitraria a y, sobre ella, tres puntos, de los cuales dos han sido marcados con los números 0 y 1 y el tercero, con el símbolo ∞ (fig. 110). Llamaremos impropio al punto ∞, y propios a los demás puntos de la recta a. Convengamos en imaginar a la recta a cortada en el punto ∞ e introduzcamos en esta recta un orden lineal, de modo que el punto 0 preceda al punto 1. Luego marquemos con el número 2 el punto que forma, conjuntamente con el punto 0, un par armónico conjugado del par 1, ∞. Por el teorema 9, el par 0, 2 separa al 1, ∞. Por esto, en el orden lineal sobre la recta cortada a, el punto 1 está entre 0 y 2; dicho de otro modo, el punto 2 sigue a los puntos 0 y 1. Marquemos, seguidamente, con el número 3 el punto que, conjuntamente con el punto 1, forme un par armónico conjugado del par 2, ∞; con el número 4, el punto que, conjuntamente con el punto 2, forme un par armónico conjugado del par 3, ∞, etc. Nos queda, así, una sucesión infinita de puntos marcados con los números 0, 1, 2, 3, 4, ... Evidentemente, en esta sucesión el punto p, para cualquier $p \geqslant 1$, sigue a cada uno de los puntos 0, 1, 2, ... , $p - 1$.

Hecho esto, marquemos con el número -1 el punto que, conjuntamente con el punto 1, forme un par armónico conjugado del par 0, ∞; con el número -2, el punto que, conjuntamente con el punto 0, forme un par armónico conjugado con el par -1, ∞, etc. Como resultado general obtenemos los puntos ... , $-m$, $-m + 1$, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... , n, ... , que siguen el uno al otro en el orden lineal que se tiene sobre la recta cortada a. Llamaremos a estos puntos *puntos enteros de la escala proyectiva.*

A fin de facilitar su construcción real, procedemos como sigue.

Se trazan por el punto ∞ de la recta a dos rectas arbitrarias, una de las cuales marcaremos con el número 1, y la otra, con la letra u; sobre la recta u se escoge algún punto A (fig. 110). Se trazan, asimismo, las rectas $A0$ y $A1$, que unen el punto A con los puntos 0 y 1. Estas rectas, al cortarse con la recta 1, determinan dos puntos, que denotaremos por (1, 0) y (1,1), respectivamente. Trazando, ahora, por los puntos 0 y (1, 1) una recta, hallamos el punto B en que ésta corta a la recta u. Hecho esto, trazamos la recta por los puntos B y 1, determinamos sobre la recta 1 el punto (1, 2) y, proyectándolo desde el punto A sobre la recta a, obtenemos el punto que arriba convinimos en marcar con el número 2, pues precisamente este punto, junto con el punto 0, forma un par armónico conjugado con el par 1, ∞. Para comprobarlo, basta considerar el cuadrivértice completo de vértices A, B, (1, 1) y (1, 2); los puntos 1 e ∞ son puntos diagonales de este cuadrivértice, mientras que los puntos 0 y 2 se encuentran sobre dos de sus lados opuestos; esto significa, precisamente, que los pares 0, 2 y 1, ∞ son armónicos conjugados. Una vez construido el punto 2, proyectándolo desde el punto B sobre la recta 1, obtenemos el punto (1, 3), y proyectando este último desde el punto A sobre la recta a, obtenemos el punto 3; una vez determinado el punto 3, proyectándolo desde el punto B sobre la recta 1, obtenemos el punto (1, 4) y proyectando éste desde el punto A sobre la recta a, obtenemos el punto 4, etc.

De la misma forma pueden ser obtenidos los puntos enteros marcados con números negativos. Por ejemplo, proyectando el punto (1, 0) desde el punto B, obte-

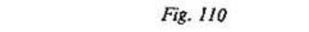

A
B
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
(3,-3)
(2,-3)
(3,-2)
(2,-2)
(3,-1)
(3,0)
(3,1)
(2,-1)
(1,-2)
(2,0)
(3,2)
(3,3)
(2,1)
(1,-1)
(3,4)
(3,5)
(2,2)
(2,3)
(2,4)
(1,0)
(1,1)
(1,2)
(1,3)
(1,4)
3
4
u
2
1
-1
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{3}{2}$
2
$\frac{5}{2}$
3
$\frac{7}{2}$
4
5
6
7
a
∞

Fig. 110

nemos sobre la recta a el punto -1; proyectando este último desde A sobre la recta 1, determinamos el punto $(1, -1)$, y proyectándolo desde el punto B, obtenemos sobre la recta a el punto -2, etc.

Por construcción, dos rectas, una de las cuales une el punto B con algún punto entero n y la otra une A con el punto entero $n + 1$, para cualquier n se cortan sobre la recta 1.

Además SE PUEDE DEMOSTRAR que dos rectas, una de las cuales une el punto B con algún punto entero n y la otra une A con el punto entero $n + 2$, para todo n se cortan asimismo sobre una recta determinada. Esta recta fue marcada en la fig. 110 con el número 2, y los puntos situados sobre ella que corresponden a intersecciones dos a dos de las rectas indicadas fueron denotados por ... , $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2,2)$, ...

Análogamente, dos rectas, una de las cuales une el punto B con un punto n y la otra, el punto A con el punto $n + 3$, para todo n se intersecan sobre una recta determinada 3; sobre ella aparece, así, el sistema de puntos ...,$(3, -3)$, $(3, -2)$, $(3, -1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, ...

Dos rectas, una de las cuales une el punto B con el punto n, y la otra, el punto A con el $n + 4$, para todo n se intersecan sobre una recta determinada 4, etc.

Bastará dar la demostración de estas afirmaciones para el sistema de puntos ... , $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, ... Hecho esto, quedará clara su generalización a los demás sistemas de puntos.

Mostraremos, pues, que los puntos ... , $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, ... están sobre una misma recta.

Con este fin, observaremos, ante todo, que para cualquier n el par de puntos A, $(1, n)$ es conjugado armónico con el par $(2, n)$, n.

Efectivamente, estos pares se obtienen proyectando desde el punto B los dos pares mutuamente armónicos (por construcción) ∞, $n - 1$ y $n - 2$, n de la recta a y, consecuentemente, por el teorema 6 del § 86 son a su vez armónicos conjugados entre sí.

Marquemos con el número 2 la recta que va del punto ∞ al punto $(2, 0)$. Como se ve, los dos pares de rectas u, 1 y 2, a, que parten del punto ∞, proyectan los dos pares armónicos conjugados de puntos A, $(1, 0)$ y $(2, 0)$, 0. Por esto, las semirrectas indicadas, al cortarse con cualquier recta, determinan sobre ésta dos pares armónicos conjugados de puntos (véase el § 86, teorema 6).

En particular, la recta que une los puntos A y n, interseca las semirrectas u, 1 y a en los tres puntos A, $(1, n)$ y n, y a la recta 2, en un punto que tiene que ser el cuarto armónico de los tres indicados. Pero éste es, como hemos visto, el punto $(2, n)$. Y como el cuarto armónico de tres puntos dados se determina de manera única, concluimos que el punto $(2, n)$, para todo n, está sobre la recta 2.

Una vez probado que los puntos ... , $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, ... están sobre una recta, es fácil mostrar que los puntos ... , $(3, -3)$, $(3, -2)$, $(3, -1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, ... también se encuentran alineados. Para esto debe observarse, ante todo, que el par A, $(2, n)$, para todo n, es armónico conjugado del par $(3, n)$, $(1, n)$. Hecho esto, utilizando la alineación de los dos sistemas de puntos ... , $(1, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ $(1, 2)$, ... y ... , $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, ... , se puede probar la alineación del sistema de puntos ... , $(3, -2)$, $(3,$

-1), (3, 0), (3, 1) (3, 2), ... haciendo una analogía exacta con el razonamiento precedente. De idéntica manera puede probarse que los puntos ... , (4, -2), (4, -1), (4, 0), (4, 1), (4, 2), ... están sobre una recta, etc. Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema auxiliar, de gran importancia para lo que sigue:

TEOREMA A. *Si x e y son dos números enteros y $z = \frac{x + y}{2}$ también es un entero, entonces el punto entero z, conjuntamente con el punto ∞, forma un par que separa armónicamente el par de puntos enteros x e y.*

Un punto que, conjuntamente con el punto ∞, forme un par que separe armónicamente sobre la recta a un par de puntos dados P y Q, se convendrá en llamar *centro proyectivo del segmento PQ* (el centro proyectivo depende, claro está, de la elección del punto ∞). Entonces, el teorema que acabamos de enunciar puede expresarse como sigue:

Si x, y y $z = \frac{x + y}{2}$ son números enteros, entonces el punto entero z es el centro proyectivo del segmento determinado por los puntos enteros x e y.

Al demostrar este teorema supondremos, para fijar ideas, que $y > x$. De la hipótesis sigue que la diferencia $y - x$ es un número par. En el caso $y - x = 2$ la afirmación del teorema es, evidentemente, correcta, pues el hecho que para $y - x = 2$, el punto $\frac{x + y}{2}$ sea centro proyectivo del segmento xy, fue tomado como base de la determinación de la escala proyectiva. Precisamente en esta propiedad se basa la construcción presentada en la fig. 110, donde puede apreciarse que la recta que une el punto A con el y, y la recta que une el B con el x, al cortarse con la recta 1 determinan dos puntos que, conjuntamente con los puntos A y B, constituyen los vértices de un cuadrivértice que posee puntos diagonales $\frac{x + y}{2}$ e ∞ y un par de lados opuestos que pasan por los puntos xy. Esto significa, precisamente, que el punto $\frac{x + y}{2}$ es el centro proyectivo del segmento xy. De manera similar puede verificarse el teorema en el caso $y - x = 4$, $y - x = 6$, etc.

Sea, por ejemplo, $y - x = 4$. Consideremos la recta que une el punto A con el y, la recta que une el B con el x, y los puntos de intersección de estas rectas con la recta 2. Estos puntos, conjuntamente con A y B, constituyen los vértices de un cuadrivértice que tiene puntos diagonales $\frac{x + y}{2}$ e ∞ y un par de lados opuestos que pasan por los puntos x e y. Esto significa, precisamente, que el punto $\frac{x + y}{2}$ es el centro proyectivo del segmento xy. En la fig. 110 se indica con trazo grueso el cuadrivértice cuyo análisis permite apreciar que el punto $1 = \frac{3 + (-1)}{2}$ es el centro

proyectivo del segmento de extremos 3 y -1; en este caso, precisamente, es $y - x = 3 - (-1) = 4$.

Si $y - x = 6$, la verificación del teorema se hace de la misma manera, sólo que ahora habrá que recurrir a la recta 3; para $y - x = 8$, a la recta 4, etc.

En la fig. 110, CON TRAZO PUNTEADO grueso, se indica el cuadrivértice cuyo análisis permite apreciar que el punto $2 = \frac{5 + (-1)}{2}$ es el centro proyectivo del segmento de extremos 5 y -1; en este caso será $y - x = 5 - (-1) = 6$.

Hasta ahora hemos trabajado únicamente con puntos enteros. Ahora nos dedicaremos a «densificar» la escala proyectiva, completándola con nuevos puntos con marcas fraccionarias.

Determinemos, primero, el centro proyectivo del segmento (0, 1) e indiquémoslo con el número $\frac{1}{2}$. Hecho esto, partiendo de los tres puntos $0, \frac{1}{2}$ e ∞ se construye una escala proyectiva de la misma manera que lo hicimos partiendo de los puntos $0, 1, \infty$. Se obtiene así un sistema de puntos que, en la nueva escala, harán las veces de enteros; los marcaremos con los números: $\ldots, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ No es difícil constatar que todos los puntos de la forma $\ldots, -\frac{4}{2}, -\frac{2}{2}, 0, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ de la nueva escala coinciden con los puntos $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ de la escala vieja, respectivamente. En efecto, el punto $\frac{2}{2}$ de la nueva escala coincide con el punto 1 de la inicial, pues los segmentos $\left(0, \frac{2}{2}\right)$ y (0, 1) tienen un centro proyectivo común, precisamente, el punto $\frac{1}{2}$; el punto $\frac{4}{2}$ de la nueva escala coincide con el punto 2 de la antigua, pues los segmentos $\left(0, \frac{4}{2}\right)$ y (0, 2) tienen un centro proyectivo común. En efecto, en virtud del teorema A, el segmento $\left(0, \frac{4}{2}\right)$ tiene por centro proyectivo el punto $\frac{2}{2}$ de la nueva escala y, por el mismo teorema, el segmento (0, 2) tiene por centro proyectivo el punto 1 de la escala inicial; pero, como acabamos de observar, los puntos $\frac{2}{2}$ y 1 coinciden. Prosiguiendo, el punto $\frac{6}{2}$ de la nueva escala coincide con el punto 3 de la antigua, pues los segmentos $\left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right)$ y (1,3) tienen origen común (ya sabemos que los puntos $\frac{2}{2}$ y 1 son idénticos) y centro proyectivo común, el cual viene a ser el punto $\frac{4}{2}$ de la nueva escala y, al mismo tiempo, el punto 2 de la inicial. Continuando el razonamiento, se

establece la identidad de todos los puntos de la forma $\frac{2n}{2}$ y n; análogamente se establece la identidad de los puntos $-\frac{2n}{2}$ y $-n$.

Ahora resulta claro que todos los puntos de la nueva escala, es decir, la escala determinada a partir de los puntos $0, \frac{1}{2}, \infty$, puede obtenerse también si a los puntos de la escala inicial se agregan los centros proyectivos de los segmentos tipo $(n, n+1)$.

Además, es evidente que como generalización del teorema A puede ahora enunciarse el siguiente teorema.

TEOREMA B. *Cualesquiera que sean los números enteros x e y, el número $z = \frac{x+y}{2}$ determina siempre el centro proyectivo del segmento xy.*

No tiene sentido detener en este primer paso la densificación de la escala, que efectuamos agregando a los puntos enteros los centros proyectivos de los segmentos $(n, n+1)$. Considerando los puntos tipo $\frac{n}{2}$ (entre los cuales están todos los enteros, determinados por las fracciones reducibles), construimos el centro proyectivo de cada segmento $\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ y lo marcamos con el número $\dfrac{\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}}{2} = \frac{2n+1}{2^2}$. Así se obtienen puntos que, conjuntamente con los ya hallados, se determinan por números de la forma $\frac{n}{2^2}$; aplicando el mismo método a estos puntos, obtenemos puntos que se determinan por números de la forma $\frac{n}{2^3}$, etc.

Así, cualquiera que sea la fracción binaria $\frac{n}{2^m}$, en la recta proyectiva cortada a existe un punto bien determinado, que en nuestra construcción es marcado con el número $\frac{n}{2^m}$. A base de lo expuesto, podemos afirmar que para m fijado los puntos tipo $\frac{n}{2^m}$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ constituyen una escala proyectiva, determinada por los puntos $0, \frac{1}{2^m}$ e ∞. De aquí se obtiene la siguiente generelización del teorema B.

TEOREMA C. *Cualesquiera que sean las fracciones binarias x e y, el número $z = \frac{x+y}{2}$ es siempre el centro proyectivo del segmento xy.*

En efecto, sean $x = \frac{n}{2^p}$ e $y = \frac{m}{2^p}$; reduciendo estas fracciones a común denominador, las representamos en la forma $x = \frac{M}{2^r}$ e $y = \frac{N}{2^r}$, después de lo cual pode-

mos considerar x e y como puntos enteros de la escala determinada por los puntos $0, \frac{1}{2^r}$ e ∞. Entonces, resulta evidente que el teorema C es un corolario directo del teorema B.

§ 96. Ahora demostraremos que los puntos marcados con fracciones binarias (que llamaremos en lo sucesivo racionales binarios) son DENSOS en toda la recta proyectiva a.

Daremos la demostración por el método de reducción al absurdo. Supongamos que cierto segmento PQ no contiene puntos racionales binarios en su interior y supongamos, para fijar ideas, que en el orden lineal sobre la recta proyectiva cortada a, el punto P precede al Q.

En la hipótesis hecha habrá que considerar tres casos:

1) Existen puntos racionales binarios que preceden al punto P y también números racionales binarios que siguen al punto Q.

2) Existen puntos racionales binarios que preceden a P, pero no los hay que sigan a Q.

3) Existen puntos racionales binarios que sigan a Q, pero ninguno que preceda a P.

Tenemos que demostrar que en todos estos casos, asumiendo que el segmento PQ no tiene puntos racionales binarios, se obtiene una contradicción.

Tomemos el primer caso.

Distribuyamos todos los puntos de la recta proyectiva cortada a en dos clases, poniendo en la SEGUNDA clase cada punto racional binario que siga al punto Q y, además, cada otro punto de la recta a, que siga a un tal punto racional binario; en la primera clase pondremos todos los demás puntos. Evidentemente, la distribución indicada de puntos es una cortadura de Dedekind. En virtud del axioma III, existe un punto que realiza esta cortadura, es decir, que clausura una de susclases; lo denotaremos con Q_0. No es difícil verificar ante todo, que Q_0 no puede preceder a Q. Además, si Q y Q_0 son diferentes, entre ellos no habrá puntos racionales binarios; en caso contrario, el punto Q_0 sería un punto de la segunda clase y no será el primero (es decir, el punto de clausura). Ahora, cualquier entorno del punto Q_0 en la recta a contiene puntos racionales binarios. En efecto, si existiese un entorno del punto Q_0 que no contuviese puntos racionales binarios, todos los puntos de este segmento —incluido el propio Q_0— pertenecerían a la primera clase, y el punto Q_0 no sería el último punto allí (es decir, el de clausura). Obsérvese, además, que Q_0 no puede coincidir con el punto ∞, pues, por hipótesis, el punto Q es seguido por puntos racionales binarios, que necesariamente separan Q_0 de ∞.

Efectuemos ahora una distribución de todos los puntos de la recta proyectiva cortada a en dos clases, poniendo esta vez en la primera clase cada punto racional binario que preceda al punto P y, además, todo otro punto de la recta a que preceda a un tal punto racional binario; en la segunda clase se ponen todos los demás puntos. Nuevamente obtenemos alguna cortadura de Dedekind; sea P_0 el punto que la realiza. En forma análoga a la discusión precedente, podemos establecer, en primer lugar, que P_0 no puede seguir a P y que, si P_0 y P son diferentes, entre ellos no habrá puntos racionales binarios; en segundo lugar, que cada entorno del punto P_0 contiene puntos racionales binarios y, por último, que P_0 no puede coincidir con el punto ∞.

Así, pues, el segmento P_0Q_0, al igual que el PQ, debe estar libre de puntos racionales binarios, pero en cualquier entorno del punto P_0 y en cualquier entorno del punto Q_0 habrá tales puntos.

Sean X e Y dos puntos arbitrarios de la recta a, distintos del punto ∞, y $Z = f(X, Y, \infty)$, el punto que, conjuntamente con ∞, forma un par Z, ∞ que separa armónicamente el par X, Y. El punto Z no es otra cosa que el centro proyectivo del segmento X, Y. Sea, además, $R_0 = f(P_0, Q_0, \infty)$ el centro proyectivo del segmento P_0Q_0. Como sabemos, el punto R_0 está en el interior del segmento P_0Q_0. Por el teorema 10, la función $f(X, Y, \infty)$ es continua para $X = P_0$, $Y = Q_0$. Por esto, existen entornos Δ_1 y Δ_2 de los puntos P_0 y Q_0, tales que si el punto X está dentro de Δ_1, y el punto Y, dentro de Δ_2, el punto $Z = f(X, Y, \infty)$ estará dentro del segmento P_0Q_0. De acuerdo con lo expuesto arriba, Δ_1 y Δ_2 contienen puntos racionales binarios. Si x es una fracción binaria que corresponde a algún punto X en el interior de Δ_1, e y, una fracción binaria correspondiente a un punto Y de Δ_2, entonces $Z = f(X, Y, \infty)$, en virtud del teorema C, será un punto racional binario, al cual le corresponderá la fracción binaria $\frac{x + y}{2}$. Consecuentemente, dentro del segmento P_0Q_0 necesariamente habrá algún punto racional binario. Pero, por construcción, este segmento estaba libre de puntos racionales binarios. Así, entonces, al asumir que existe algún segmento PQ que no contenga puntos racionales binarios, hemos llegado a una contradicción, por ahora, en el primero de los tres casos enumerados arriba.

Pasemos al segundo caso.

En esencia, ahora tenemos que mostrar que los puntos racionales binarios no pueden preceder todos a algún punto P de la recta proyectiva cortada. Suponiendo lo contrario, separemos todos los puntos de la recta cortada, en dos clases. En la primera clase pondremos cada punto racional binario y todo otro punto que preceda a algún racional binario. Todos los demás puntos se adjudicarán a la segunda clase. Se obtiene, así, una cortadura de Dedekind. Por el axioma III, existe un punto P_0 que la realiza. En forma similar a como lo hicimos en la discusión del caso precedente, se puede probar, en primer lugar, que si P_0 y P son diferentes, entonces entre ellos no hay puntos racionales binarios, es decir, que no hay puntos racionales binarios en todo lo que va de la recta desde P_0 hasta ∞ y, en segundo lugar, que cada entorno del punto P_0 contiene puntos racionales binarios.

De aquí se puede obtener de inmediato una contradicción.

En efecto, sea X un punto arbitrario de la recta cortada, e Y, el punto que se determina a partir del punto dado X de forma que el par $0, Y$ separe armónicamente al par X, ∞. Utilizando la notación que ya introdujimos, podemos escribir: $Y = f(X, \infty, 0)$. Pongamos $R_0 = f(P_0, \infty, 0)$; este punto está en el interior del segmento (P_0, ∞), pues 0 precede a P_0. Por el teorema 10, la función $Y = f(X, \infty, 0)$ es continua para $X = P_0$. Por esto, existe un entorno Δ del punto P_0, tal que si X está dentro de Δ, el punto Y estará dentro del segmento (P_0, ∞). El entorno Δ, al igual que todo otro entorno del punto P_0, contiene puntos racionales binarios. Sea x una fracción binaria que corresponde a algún punto X del interior de Δ; Y, el punto racional binario determinado por la fracción binaria $y = 2x$. En virtud del teorema C, el punto X es el centro proyectivo del segmento $(0, Y)$; por ende, Y corresponde a

X en la relación $Y = f(X, \infty, 0)$. Pero como X está dentro de Δ, Y estará en el interior del segmento (P_0, ∞). Así, entonces, este segmento contiene algún punto racional binario, en contra de su definición. La contradicción obtenida nos lleva a rechazar la hipótesis del segundo de los tres casos enumerados arriba.

No tiene sentido estudiar por separado el tercer caso, pues, en líneas generales, no difiere del precedente. Nuestra afirmación queda, así, totalmente demostrada.

§ 97. Hemos comprobado que los puntos racionales binarios son densos sobre toda la recta proyectiva. Pero éstos no agotan todos sus puntos. Existe un conjunto infinito de otros puntos, a los cuales ahora pondremos en correspondencia, por una ley determinada, números reales diferentes de las fracciones binarias.

Sea M un punto cualquiera de la recta proyectiva cortada. Sea $\{P\}$ el conjunto de todos los puntos racionales binarios que preceden al punto M, y $\{Q\}$, el de todos los puntos racionales binarios que siguen a M; además, si el propio M es un punto racional binario, lo incluiremos, por ejemplo, en el primero de estos conjuntos. Denotemos con $\{p\}$ el conjunto de las fracciones binarias que corresponden a puntos de $\{P\}$; con $\{q\}$, el conjunto de las que corresponden a puntos de $\{Q\}$. Entonces:

1) si p es una fracción arbitraria de $\{p\}$ y q, una arbitraria de $\{q\}$, será $p < q$;

2) los conjuntos $\{p\}$ y $\{q\}$, tomados a la vez, forman todo el conjunto de las fracciones racionales binarias.

Por esto, existe un único número x, que es mayor que cualquier número de $\{p\}$ *) y menor que cualquier número de $\{q\}$. Este número, precisamente, se pondrá en correspondencia al punto M.

Así, cada punto de la recta proyectiva cortada obtiene un número bien determinado que le corresponde; en lo sucesivo lo llamaremos su *coordenada proyectiva*.

La correspondencia que acabamos de establecer de una coordenada determinada para cada punto (excepto ∞) posee las siguientes propiedades:

1. A puntos distintos corresponden coordenadas diferentes; además, si el punto M_1, de coordenada x_1, precede al punto M_2, de coordenada x_2, entonces $x_1 < x_2$.

Efectivamente, como el conjunto de puntos racionales binarios es denso en toda la recta proyectiva, entre M_1 y M_2 habrá algún punto racional binario P con coordenada p. Pero, entonces, $x_1 < p < x_2$.

2. Cualquiera que sea el número real x, existe un punto de coordenada x.

En efecto, si x es una fracción binaria, entonces, como se sabe de la discusión precedente, existe un punto racional binario al que le corresponde como coordenada la fracción dada x. Si, en cambio, x es otro número real, para probar nuestra afirmación separamos todas las fracciones binarias en dos conjuntos: $\{p\}$ y $\{q\}$. En el conjunto $\{p\}$ pondremos cada fracción binaria p, si $p < x$; en el $\{q\}$, cada fracción binaria q, si $x < q$. Simultáneamente, podemos imaginarnos el conjunto de los puntos racionales binarios distribuidos en dos conjuntos: $\{P\}$ y $\{Q\}$, formados por los puntos con coordenadas de $\{p\}$ y de $\{q\}$, respectivamente. A continuación, efectuamos en el conjunto de la totalidad de los puntos de la recta proyectiva cortada, una cortadura de Dedekind, poniendo en la primera clase de ésta cada punto de $\{P\}$ y cada otro punto de la recta, si éste precede a algún punto de $\{P\}$; en la segunda clase ponemos todos los demás puntos.

---

*) O bien es el mayor de estos números, si M es un punto racional binario.

Por el axioma III, existe un punto M que realiza esta cortadura de Dedekind. Evidentemente, M sigue a cada punto de $\{p\}$ y precede a todo punto de $\{Q\}$. Por esto, la coordenada del punto M tendrá que ser mayor que cada fracción de $\{p\}$ y menor que cada una de $\{q\}$. Pero tal número puede ser únicamente el número dado x. Consecuentemente, la coordenada de M es x.

3. La correspondencia entre puntos de la recta proyectiva cortada y sus coordenadas es continua, es decir, si una sucesión M_n de puntos tiene como límite el punto M, la coordenada x del punto M será el límite de la sucesión de coordenadas x_n de los puntos M_n, y recíprocamente. En forma más concisa; $M_n \to M$ implica $x_n \to x$, y, recíprocamente, $x_n \to x$ implica $M_n \to M$. Esta propiedad se desprende de que 1) la correspondencia entre los puntos de la recta proyectiva cortada y de sus coordenadas es biyectiva; 2) cada número real es coordenada de algún punto; 3) el orden de disposición de los puntos coincide con el orden de sus coordenadas. En virtud de esto, si x es la coordenada del punto M, entonces a cada entorno de M en la recta proyectiva cortada le corresponde, sobre el eje numérico, un entorno de su coordenada x; a cada entorno de la coordenada x sobre el eje numérico le corresponde un entorno del punto M en la recta proyectiva cortada. Así, si M_n cae dentro de algún entorno del punto M, entonces x_n caerá dentro del entorno correspondiente de x y, recíprocamente, si x_n cae en algún entorno de x, M_n caerá en el entorno correspondiente del punto M. Esto significa que si $M_n \to M$, entonces $x_n \to x$, y si $x_n \to x$, entonces $M_n \to M$.

4. Si M_1 y M_2 son dos puntos arbitrarios de coordenadas x_1 y x_2, entonces el centro proyectivo del segmento M_1M_2 tiene por coordenada al número $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

Para demostrarlo, consideremos una sucesion de fracciones binarias $p_1^{(n)}$ que converja a x_1, y otra sucesión de fracciones binarias $p_2^{(n)}$ que converja a x_2. Así, $\lim\limits_{n \to \infty} p_1^{(n)} = x_1$ y $\lim\limits_{n \to \infty} p_2^{(n)} = x_2$. Denotemos con $P_1^{(n)}$ y $P_2^{(n)}$ los puntos racionales binarios de coordenadas $p_1^{(n)}$ y $p_2^{(n)}$, con $c^{(n)}$, la coordenada del centro proyectivo del segmento $P_1^{(n)}$ y $P_2^{(n)}$ y con c, la coordenada del centro proyectivo del segmento M_1M_2. Del teorema 10 sigue que $c = \lim\limits_{n \to \infty} c^{(n)}$. Por otra parte, en virtud del teorema C (que con respecto a los puntos racionales binarios afirma precisamente lo que queremos demostrar ahora para puntos arbitrarios), se tiene: $c^{(n)} = \frac{p_1^{(n)} + p_2^{(n)}}{2}$.

De aquí sigue que $c = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{p_1^{(n)} + p_2^{(n)}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Esto es, precisamente, lo que había que mostrar.

Las primeras tres propiedades mostradas del sistema proyectivo de coordenadas pueden expresarse conjuntamente como sigue: al construir un sistema proyectivo de coordenadas, se realiza una correspondencia biyectiva y continua entre el conjunto de todos los puntos de la recta proyectiva cortada y el de todos los números reales; esta correspondencia, además, es tal que los puntos de la recta y los números que les corresponden (sus coordenadas) se encuentran en iguales relaciones de orden. Cabe observar que estas propiedades las tienen muchos otros sistemas de coordenadas, además del que hemos descrito arriba (el proyectivo).

Por el contrario, la cuarta propiedad es característica para este sistema y desde un comienzo fue puesta como base de su definición. Dicho de otro modo, entre todos los sistemas coordenados posibles sobre la recta proyectiva cortada, el sistema proyectivo se destaca por que en éste las coordenadas del centro proyectivo de un segmento son siempre iguales a la media aritmética de las coordenadas de sus extremos.

Queremos subrayar, para finalizar esta sección, que el sistema proyectivo se determina fijando los tres puntos 0, 1, ∞. Al cambiarlos, se obtienen diferentes sistemas proyectivos de coordenadas, sobre una misma recta.

6. Sistema proyectivo de coordenadas en el plano y en el espacio

§ 98. Supongamos que sobre un plano proyectivo arbitrario se ha fijado alguna recta. La denotaremos con el símbolo ∞, convendremos en llamarla recta impropia (recta del infinito) e imaginaremos que el plano proyectivo se ha cortado a lo largo de esta recta.

Ahora indicaremos un método determinado, por el cual a los puntos del plano proyectivo cortado se les podrá poner en correspondencia biyectiva los pares de números reales. Estos números se denominarán coordenadas proyectivas de los puntos correspondientes.

El sistema proyectivo de coordenadas queda determinado cuando se fijan los siguientes elementos geométricos: algún punto O, al cual llamaremos origen del sistema de coordenadas; dos rectas que pasen por O, una de las cuales se llamará eje x, y la otra, eje y, y además un punto E, que no pertenezca a ninguno de los ejes.

Sean ∞_x e ∞_y los puntos del infinito de los ejes x e y, es decir, los puntos de su intersección con la recta ∞(fig. 111). Proyectemos el punto E desde ∞_y sobre el eje x, y desde ∞_x sobre el eje y; marquemos cada proyección obtenida con el número 1. Hecho esto, introduzcamos sobre el eje x un sistema lineal de coordenadas proyectivas, determinado por los tres puntos 0, 1, ∞_x, en la misma forma a como lo hicimos en la sección precedente; análogamente, introduzcamos un sistema de coordenadas sobre el eje y, partiendo de los puntos 0, 1, ∞_y.

Consideremos ahora un punto M, situado arbitrariamente en el plano proyectivo cortado. Sea M_x la proyección del punto M desde ∞_y sobre el eje x y M_y, la proyección del mismo punto M desde ∞_x sobre el eje y. El punto M_x, en el sistema lineal de coordenadas sobre el eje x, tiene cierta coordenada x; análogamente, el punto M_y tiene sobre el eje y una coordenada y. Llamaremos a los números x e y *coordenadas proyectivas del punto M en el plano.*

Evidentemente, cada punto del eje x tiene coordenadas del tipo $(x, 0)$, cada punto del eje y, coordenadas tipo $(0, y)$; las coordenadas del punto O son $(0, 0)$. El punto E tiene ambas coordenadas iguales a 1; por esto, a veces se lo llama «punto de las unidades».

Pasaremos, ahora, a demostrar la propiedad básica de las coordenadas proyectivas, enunciada en el siguiente teorema.

TEOREMA 12. *En coordenadas proyectivas, cada recta se determina por una ecuación algebraica de primer grado.*

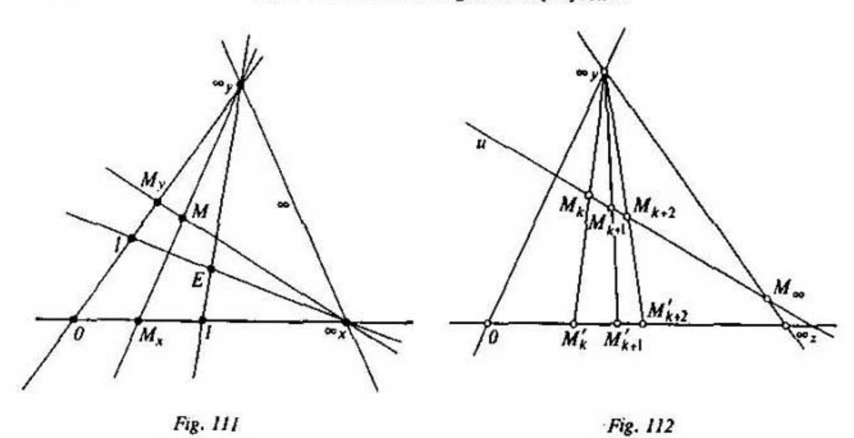


Fig. 111

Fig. 112

DEMOSTRACIÓN. Sea dada alguna recta u; fijemos en ella dos puntos arbitrarios M_0 y M_1 y denotemos con M_∞ el punto del infinito de la recta u (es decir, el punto de su intersección con la recta ∞). Partiendo de los tres puntos M_0, M_1 y M_∞, construimos sobre la recta u una escala proyectiva (igual a como lo hicimos en la sección precedente, partiendo de los puntos 0, 1, ∞), con puntos enteros ... , M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, M_3, ... Consideremos tres puntos vecinos M_k, M_{k+1}, M_{k+2} y el punto M_∞ (fig. 112). Por la propiedad básica de la escala proyectiva, el punto M_{k+1} debe ser el centro proyectivo del segmento M_kM_{k+2}, es decir, el par M_k, M_{k+2} debe ser armónicamente separado por el par M_{k+1}, M_∞. Proyectando los cuatro puntos indicados desde ∞_y sobre el eje x, obtenemos como proyecciones, los puntos M'_k, M'_{k+1}, M'_{k+2}, ∞_x. Como la propiedad de conjugación armónica es invariante bajo proyecciones, el par M'_k, M'_{k+2} se separa armónicamente por el par M'_{k+1}, ∞_x. Dicho de otro modo, el punto M'_{k+1} es el centro proyectivo del segmento $M'_kM'_{k+2}$. Por esto, entre las coordenadas de los puntos M_k, M_{k+1}, M_{k+2} tiene lugar la relación

$$\frac{x_k + x_{k+2}}{2} = x_{k+1}. \qquad (*)$$

Análogamente,

$$\frac{y_k + y_{k+2}}{2} = y_{k+1}. \qquad (**)$$

Sea ahora M un punto arbitrario del plano con coordenadas x, y, y $L(M) = Ax + By$ una función lineal de este punto. Escojamos los números A, B, C de forma que se cumplan las igualdades:

$$\left.\begin{array}{l} L(M_0) + C = Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ L(M_1) + C = Ax_1 + By_1 + C = 0. \end{array}\right\} \qquad (***)$$

De las relaciones (*) y (**) hallamos:

$$L(M_k) + L(M_{k+2}) - 2L(M_{k+1}) = 0.$$

Consecuentemente, si $L(M_k) + C = 0$ y $L(M_{k+1}) + C = 0$, entonces también $L(M_{k+2}) + C = 0$. Por esto y por consecuencia de las igualdades (***), obtenemos, para todo punto entero M_n:

$$L(M_n) + C = Ax_n + By_n + C = 0.$$

Así, las coordenadas de todos los puntos enteros de la recta u satisfacen la ecuación de primer grado

$$Ax + By + C = 0.$$

No resulta difícil comprobar que esta ecuación es satisfecha no sólo por las coordenadas de los puntos, sino también por las de todos los puntos racionales binarios. En efecto, los puntos racionales binarios fueron introducidos en su oportunidad por un proceso de «densificación» sucesiva de la escala proyectiva; convengamos en llamar «primera densificación» de la escala, a la colección de todos los puntos enteros junto con los centros proyectivos de los segmentos que éstos determinan; «segunda densificación», al conjunto de todos los puntos de la «primera densificación» junto con los centros proyectivos de los segmentos que éstos determinan, etc.

Si el punto $M_{k+½}$ es el centro proyectivo del segmento M_kM_{k+1}, para sus coordenadas tendrán lugar las igualdades

$$x_{k+½} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad y_{y+½} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2},$$

en virtud de lo cual

$$L(M_k) + L(M_{k+1}) - 2L(M_{k+½}) = 0.$$

Por esto, en el caso $L(M_k) + C = 0$ y $L(M_{k+1}) + C = 0$, debe ser $L(M_{k+½}) + C = 0$. Así, la ecuación $Ax + By + C = 0$ es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la primera densificación; razonando análogamente, se comprueba que también es satisfecha por todos los puntos de la segunda densificación, etc. Como la función $Ax + By + C = 0$ es continua e igual a cero en los puntos de un conjunto denso sobre la recta u, esta función será igual a cero en todos los puntos de dicha recta. En otras palabras, las coordenadas de cada punto de la recta u satisfacen la ecuación $Ax + By + C = 0$; por otra parte, es evidente que las coordenadas de los puntos de la recta u agotan todos los pares (x, y) de soluciones de esta ecuación, por consecuencia, ésta no es otra que la ecuación de la recta u. Se aprecia que se trata de una ecuación algebraica de primer grado; nuestra afirmación queda, así, demostrada.

Conjuntamente con la ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

que llamaremos *ecuación general de la recta*, utilizaremos también sus siguientes formas especiales:

1) Ecuación despejada con respecto a alguna de las coordenadas, por ejemplo, y:

$$y = kx + l;$$

por su aspecto exterior, es idéntica a la ecuación con coeficiente angular, que se utiliza con frecuencia en la geometría analítica del plano euclidiano. Pero, por supues-

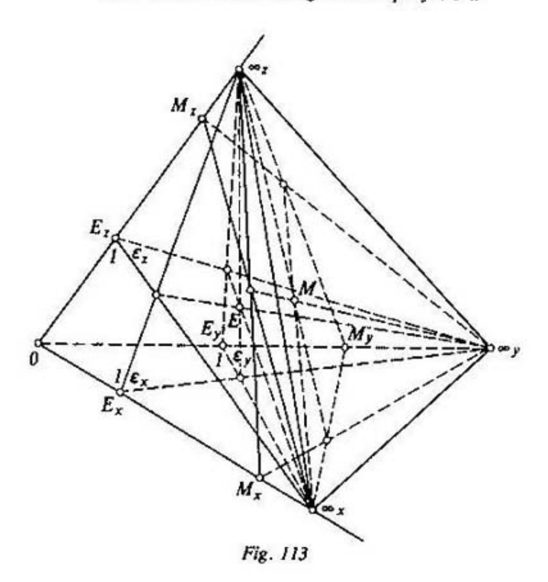


Fig. 113

to, ahora no cabe llamar al parámetro k coeficiente ANGULAR de la recta, pues en la geometría proyectiva faltan todos los conceptos métricos, entre ellos, el de magnitud de un ángulo.

2) Ecuación que contiene las coordenadas x_0, y_0 de alguno de los puntos de la recta:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

3) La ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

por su escritura coincide con la llamada ecuación segmentaria de la recta, bien conocida en la geometría analítica elemental. Pero ahora debemos concebir a y b no como las longitudes de los segmentos que la recta determina sobre los ejes, sino como las coordenadas proyectivas de los puntos de intersección de la recta con los ejes.

§ 99. Pasemos al estudio de las coordenadas proyectivas en el espacio.

Supongamos fijado algún plano en el espacio proyectivo; lo denotaremos con el símbolo ∞, convendremos en llamarlo plano del infinito (plano impropio) y nos imaginaremos que el espacio ha sido cortado a lo largo de este plano.

En el espacio proyectivo cortado introduciremos un sistema de coordenadas, fijando algún punto O, que denominaremos origen del sistema; tres rectas no coplanares que pasen por O y que llamaremos eje x, eje y y eje z, respectivamente, y además un punto E, que no pertenezca a ninguno de los tres planos determinados por los ejes, tomados dos a dos (fig. 113).

Sean ∞_x, ∞_y, ∞_z los puntos del infinito de los ejes, es decir, los puntos de intersección de estos ejes con el plano ∞. Sea ε_x el plano determinado por los puntos E, ∞_y, ∞_z; ε_y, el que se determina por los puntos E, ∞_x, ∞_z; ε_z, el plano determinado por los puntos E, ∞_x, ∞_y. El plano ε_x intersecará el eje x en algún punto E_x; el plano ε_y cortará el eje y en cierto punto E_y, y el plano ε_z intersecará el eje z en algún punto E_z; marquemos cada punto obtenido con el número 1.

Hecho esto, introduzcamos en el eje x un sistema lineal de coordenadas proyectivas, determinado por los tres puntos O, 1, ∞_x; análogamente, introduzcamos sistemas de coordenadas en los ejes y y z, partiendo de los puntos O, 1, ∞_y y O, 1, ∞_z, respectivamente.

Consideremos, ahora, un punto M, situado arbitrariamente en el espacio proyectivo cortado.

Sea M_x el punto de intersección del plano $M\infty_y\infty_z$ con el eje x; M_y, el punto de intersección del plano $M\infty_x\infty_z$ con el eje y, y M_z, el punto de corte del plano $M\infty_x\infty_y$ con el eje z. El punto M_x tiene cierta coordenada x en el sistema lineal de coordenadas sobre el eje x; análogamente, los puntos M_y sobre el eje y y M_z sobre el z, tienen coordenadas y y z, respectivamente.

Llamaremos a los números x, y, z *coordenadas proyectivas del punto M en el espacio*. Ahora probaremos la propiedad básica de las coordenadas proyectivas, enunciada en el siguiente teorema.

TEOREMA 13. *En coordenadas proyectivas, cada plano se determina por una ecuación algebraica de primer grado.*

DEMOSTRACIÓN. A fin de facilitar la demostración de este teorema, nos limitaremos a deducir únicamente las ecuaciones de los planos que no pasan por el origen de coordenadas o por alguno de los puntos ∞_x, ∞_y, ∞_z.

Sea dado algún plano α, que interseca los ejes de coordenadas en los puntos A, B, C. Si estos puntos tienen coordenadas a, b, c respectivamente, con la restricción impuesta arriba será $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Demostraremos que el plano α tiene ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (*)$$

Consideremos sobre el plano α un punto M arbitrario; sean $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sus coordenadas. Denotemos con μ el plano determinado por los puntos M, ∞_y, ∞_z; con R, el punto de intersección del plano μ con el eje x; con P y Q, los puntos en los cuales la recta de intersección de los planos α y μ corta los planos Oxy y Oxz (fig. 114). Evidentemente, la recta PQ contiene el punto M.

En el sistema proyectivo de coordenadas sobre el plano $R\infty_y\infty_z$, la recta PQ tiene una ecuación de tipo

$$\frac{y}{p} + \frac{z}{q} = 1.$$

Esta ecuación debe satisfacerse por las coordenadas $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$, pues el punto M pertenece a la recta PQ. Por consecuencia, tenemos:

$$\frac{\bar{y}}{p} + \frac{\bar{z}}{q} = 1. \qquad (**)$$

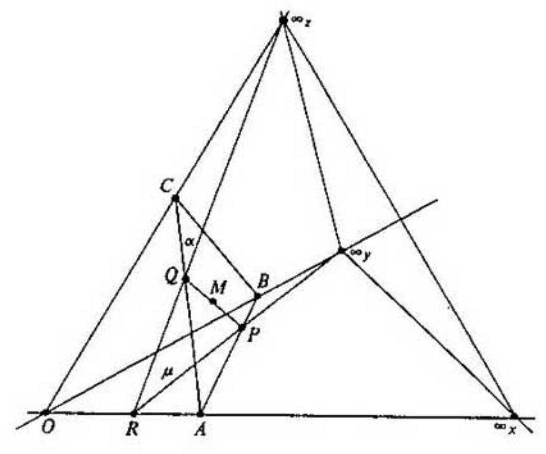


Fig. 114

Determinemos ahora los parámetros p y q. Con este fin, obsérvese que la ecuación de la recta AB en las coordenadas proyectivas del plano Oxy es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Pero las coordenadas proyectivas del punto P en el plano Oxy son los números $\bar{x}$, p (y en el espacio, los números $\bar{x}$, p, 0). Por esto, tiene lugar la relación

$$\frac{\bar{x}}{a} + \frac{p}{b} = 1,$$

de donde

$$p = b\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right).$$

Análogamente, de la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1,$$

que determina la recta AC en el plano Oxz, para $\bar{x} = x$, $z = q$, se halla:

$$q = c\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right).$$

Para estos valores de p y q, la igualdad (**) nos da:

$$\frac{\bar{y}}{b\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)} + \frac{\bar{z}}{c\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)} = 1,$$

o bien
$$\frac{\bar{x}}{a} + \frac{\bar{y}}{b} + \frac{\bar{z}}{c} = 1.$$

Así, pués, las coordenadas de cualquier punto del plano α satisfacen la ecuación (*), quedando demostrado lo que se proponía*).

Dejamos que el lector deduzca las formas particulares de la ecuación del plano, en el caso en que éste contenga el origen, o bien los puntos impropios de los ejes. Todos ellos quedan abarcados por la fórmula general
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Por cuanto el plano queda determinado por una ecuación de primer grado, la recta en el espacio puede ser dada por medio de dos ecuaciones de tipo
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$
Estas ecuaciones, mediante transformaciones algebraicas, pueden reducirse a la forma «canónica»
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$
donde x_0, y_0, z_0 son las coordenadas de algún punto de la recta.

§ 100. Hasta ahora hemos construido un sistema de coordenadas en la recta proyectiva cortada, en el plano proyectivo cortado y en el espacio proyectivo cortado. Dicho de otro modo, cuando considerabamos la recta proyectiva, poníamos a sus puntos en correspondencia coordenadas, de forma que un punto (que era denotado con el símbolo ∞) no obtenía coordenada alguna. Al considerar el plano proyectivo y el espacio proyectivo, a sus puntos les poníamos en correspondencia pares y ternas de coordenadas, respectivamente, de manera que los puntos de cierta recta —y, en el espacio, de cierto plano— (denotados con el símbolo ∞), no recibían ninguna coordenada.

A fin de efectuar una aritmetización global de la recta, del plano y del espacio proyectivos, es necesario utilizar las COORDENADAS HOMOGÉNEAS. Describiremos, ante todo, el sistema de coordenadas homogéneas de la recta proyectiva.

Sea dada cierta recta proyectiva a. Fijemos sobre ésta tres puntos de manera arbitraria; indiquemos dos de ellos con los números 0 y 1, y el tercero, con el símbolo ∞. Introduzcamos seguidamente en la recta a, el sistema proyectivo de coordenadas determinado por los puntos 0, 1, ∞. En este sistema, cualquier punto de la recta posee una coordenada bien determinada, a excepción del punto ∞. Sea M un punto cualquiera de la recta a, de coordenada x. Diremos que dos números x_1 y x_2, *que no son simultáneamente iguales a* 0, son las coordenadas homogéneas del punto M, si la razón $x_1 : x_2$ es igual a x. Al punto ∞ le ponemos en correspondencia las coordenadas homogéneas x_1, x_2, con la condición $x_2 = 0$. El sistema de coordenadas homogéneas así construido posee las propiedades siguientes:

1) Cada punto de la recta proyectiva tiene coordenadas homogéneas.

---

*) Además tendríamos que mostrar que las coordenadas de cualquier punto que no esté sobre el plano α no satisfacen la ecuación (*); pero esto sigue directamente de observar que en dicha ecuación cada coordenada se puede despejar de manera única.

2) Si x_1, x_2 son coordenadas homogéneas del punto M, también ρx_1, ρx_2, siendo ρ cualquier número diferente de 0, son coordenadas homogéneas del punto M.

3) A distintos puntos le corresponden siempre cocientes diferentes de sus coordenadas homogéneas.

4) Si $x_1 \to x_1^0$, $x_2 \to x_2^0$, entonces el punto variable M de coordenadas homogéneas x_1, x_2 tiene por límite el punto M^0, de coordenadas homogéneas x_1^0, x_2^0.

Al operar con las coordenadas homogéneas, es de particular importancia tener una buena idea del significado de la segunda propiedad. Precisamente, cada punto de la recta proyectiva tiene un número infinito de pares de coordenadas homogéneas, las cuales, entonces, no quedan determinadas de manera única por el punto que les corresponde: queda determinado su cociente. Escogiendo adecuadamente el factor ρ, se puede conseguir que una de las coordenadas ρx_1, ρx_2 sea igual a cualquier número distinto de 0 (por ejemplo, a la unidad). Así, serán coordenadas homogéneas de los puntos 0 e ∞, que ahora convendremos en denotar con A_1 y A_2, los pares de números (0, 1) y (1, 0). Como coordenadas homogéneas del punto 1, que ahora denotaremos con E, se puede tomar el par (1, 1). Evidentemente, las coordenadas homogéneas sobre la recta proyectiva quedan determinadas al fijar los puntos A_1 (0, 1), A_2 (1, 0) y E (1, 1).

§ 101. A fin de efectuar una aritmetización global del plano proyectivo, introducimos en éste, ante todo, un sistema de coordenadas proyectivas no homogéneas, con origen en el punto O, ejes Ox, Oy, con punto de unidades E y recta impropia ∞ (denotaremos con ∞_x e ∞_y los puntos impropios de los ejes). Entonces, todos los puntos del plano proyectivo, a excepción de los puntos de la recta ∞, poseerán coordenadas proyectivas.

A continuación introducimos en el plano proyectivo coordenadas homogéneas; ante todo, lo haremos para los puntos que no pertenecen a la recta ∞. Si el punto M no está sobre la recta ∞, diremos que sus coordenadas homogéneas son tres números x_1, x_2, x_3, QUE NO SON IGUALES A CERO A LA VEZ, y tales que $x_1 : x_3 = x$, $x_2 : x_3 = y$, siendo x, y las coordenadas proyectivas (no homogéneas) del punto M. Si el punto M pertenece a la recta ∞, entonces carece de coordenadas no homogéneas, por lo cual la definición precedente para sus coordenadas homogéneas no es aplicable. Diremos que los tres números x_1, x_2, x_3, son coordenadas homogéneas del punto M_∞, situado sobre la recta ∞, si se cumplen las condiciones:

1) $x_3 = 0$;

2) al menos uno de los dos números x_1, x_2 es diferente de 0;

3) la razón $x_1 : x_2$ es igual al cociente $B : - A$, donde A y B son los coeficientes de la ecuación

$$Ax + BY + C = 0$$

de CUALQUIER recta que pase por el punto M_∞; es decir, x_1 y x_2 daben ser tales que

$$Ax_1 + Bx_2 = 0.$$

Demostremos que la tercera condición es correcta; precisamente, mostremos que la razón $B : - A$ no depende de la elección de la recta que pase por el punto M_∞.

Sean

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

las ecuaciones de dos rectas que pasen por M_∞. Ya que ambas tienen por único punto común a M_∞, y a este punto, por estar en la recta ∞, no le corresponden ningunos números como coordenadas no homogéneas, entonces las ecuaciones (*) tienen que ser incompatibles. Por esto, es necesario que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde $B_1 : -A_1 = B_2 : -A_2$. Esto prueba que la tercera condición es correcta.

De la definición de coordenadas homogéneas sigue que cualquiera que sea el punto M que pertenezca a la recta $Ax + By + C = 0$, sus coordenadas homogéneas satisfarán la relación $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$. Llamaremos a esta relación, ecuación de la recta en coordenadas homogéneas y, cambiando la notación de los coeficientes A, B, C por u_1, u_2, u_3, la escribiremos en la forma:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

(ésta no contiene término independiente, es decir, es homogénea; este hecho es característico de las coordenadas homogéneas).

Las propiedades básicas de las coordenadas homogéneas en el plano proyectivo son análogas a las que poseen las coordenadas proyectivas en la recta; precisamente:

1) Cada punto del plano proyectivo posee coordenadas homogéneas.

2) Si x_1, x_2, x_3 son coordenadas homogéneas del punto M, también ρx_1, ρx_2, ρx_3 (donde ρ es cualquier número diferente de 0) son coordenadas homogéneas del punto M.

3) A puntos distintos les corresponden siempre cocientes diferentes $x_1 : x_2 : x_3$ de sus coordenadas homogéneas.

4) Si $x_1 \to x_1^0, x_2 \to x_2^0, x_3 \to x_3^0$, el punto variable M de coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3 tiene por límite el punto M^0 de coordenadas homogéneas x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Es importante recalcar que para ningún punto las tres coordenadas homogéneas se anulan simultáneamente. Cualquiera de las tres coordenadas ρx_1, ρx_2, ρx_3 que sea diferente de 0 puede hacerse igual a la unidad, escogiendo adecuadamente el factor ρ. Por ejemplo, para el punto O pueden tomarse, como coordenadas homogéneas, los tres números 0, 0, 1; para el punto ∞_x, los tres números 1, 0, 0; para el punto ∞_y, los tres números 0, 1, 0, y para el punto E, los tres números 1, 1, 1. En lo que sigue escribiremos A_1, A_2, A_3 en lugar de ∞_x, ∞_y y 0, y llamaremos a estos puntos, *vértices del triedro de coordenadas*. Evidentemente, el triedro de coordenadas $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$ y el punto de las unidades E (1, 1, 1), una vez escogidos, determinan el sistema de coordenadas homogéneas en el plano proyectivo. La elección de estos cuatro puntos debe estar sujeta a una única condición: ninguna terna de ellos debe pertenecer a una misma recta.

La recta A_1A_2 del plano proyectivo (que antes se denotaba con el símbolo ∞) contiene los puntos de tercera coordenada nula. La relación $x_3 = 0$ no es otra cosa que la ecuación de la recta A_1A_2. Las rectas A_2A_3 y A_1A_3 tienen ecuaciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, respectivamente.

§ 102. La construcción de las coordenadas homogéneas en el espacio proyectivo se efectúa de un modo plenamente análogo a la construcción sobre el plano recién descrita. Primero, fijando los ejes Ox, Oy, Oz y el plano ∞, debe introducirse un sistema de coordenadas no homogéneas proyectivas. En este sistema tienen coorde-

nadas todos los puntos del espacio, excepto los del plano ∞. Luego se determinan las coordenadas homogéneas. Si el punto M no pertenece al plano ∞, entonces se llaman coordenadas homogéneas del mismo CUATRO números cualesquiera x_1, x_2, x_3, x_4 que *sean desiguales a cero a la vez*, tales que $x_1 : x_4 = x$, $x_2 : x_4 = y$, $x_3 : x_4 = z$, donde x, y, z son coordenadas no homogéneas del punto M.

Si el punto M_∞ pertenece al plano ∞, entonces sus coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 vienen determinadas por las siguientes condiciones:

1) $x_4 = 0$;

2) entre tres números x_1, x_2, x_3 hay al menos uno diferente de cero;

3) la relación*) $x_1 : x_2 : x_3$ es igual a la $m : n : p$, donde m, n, p son parámetros en las ecuaciones

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

de cualquier recta que pase por el punto M_∞.

Demostremos que la tercera condición es admisible, a saber, probemos que la relación $m : n : p$ no depende de la elección de la recta que pasa por el punto M_∞.

Sean

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (*)$$

y

$$\frac{x' - x'_0}{m'} = \frac{y' - y'_0}{n'} = \frac{z' - z'_0}{p'} \qquad (**)$$

ecuaciones de dos rectas que pasan por el punto M_∞ del plano ∞. Debido a que ambas rectas pasan por un mismo punto, debe existir un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (\alpha)$$

que contenga las dos rectas. Esta circunstancia impone cierta restricción analítica sobre los parámetros de las ecuaciones (*) y (**). Para obtener dicha restricción, designemos con t cada una de las relaciones iguales (*) y con t', cada una de las relaciones iguales (**). Entonces, en vez de (*) y (**) se podrá escribir los dos sistemas siguientes de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{array}{lcl} x = x_0 + mt, & & x' = x'_0 + m't', \\ y = y_0 + nt, & \text{y} & y' = y'_0 + n't', \\ z = z_0 + pt & & z' = z'_0 + p't'. \end{array} \qquad (\beta)$$

Si la primera recta se halla en el plano (α), entonces las coordenadas de cada uno de sus puntos deben satisfacer la ecuación del referido plano, por eso la igualdad

$$Ax + By + Cz + D = (Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$$

debe verificarse para cualquier t. Consiguientemente,

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

---

*) Véase la llamada al comienzo del § 71 (pág. 175).

Dado que la segunda recta también está en el plano (α), análogamente tendrá lugar

$$Am' + Bn' + Cp' = 0, \qquad Ax_0' + By_0' + Cz_0' + D = 0.$$

De aquí tenemos un sistema de relaciones

$$\left.\begin{aligned} A(x_0 - x_0') + B(y_0 - y_0') + C(z_0 - z_0') &= 0,\\ Am + Bn + Cp &= 0,\\ Am' + Bn' + Cp' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

que puede estimarse como sistema de ecuaciones homogéneas con las incógnitas A, B, C. Dicho sistema tiene soluciones no triviales, puesto que el la ecuación del plano (α) los tres coeficientes A, B, C no pueden ser iguales a cero. Así que el sistema (γ) es compatible de un modo no trivial, a consecuencia de lo cual

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_0' & y_0 - y_0' & z_0 - z_0' \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix} = 0. \qquad (\delta)$$

Al observarse precisamente esta condición, las dos rectas se hallan en un mismo plano.

Ahora es fácil mostrar que si las dos rectas en cuestión tienen un punto común sobre el plano ∞, entonces m, n, p y m', n', p' son proporcionales. En efecto, por cuanto el punto común de las referidas rectas está sobre el plano ∞, el mismo no posee coordenadas no homogéneas. Por ende, cualesquiera que sean los valores de t y t', las relaciones (β) no podrán conducir a las igualdades $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Si suponemos tales igualdades, entonces tendremos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} mt - m't' + (x_0 - x_0') &= 0,\\ nt - n't' + (y_0 - y_0') &= 0,\\ pt - p't' + (z_0 - z_0') &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

respecto a los números t, $-t'$ y 1. Debido a que el determinante (δ) de este sistema es igual a cero, una de las ecuaciones es un corolario lineal de otras dos. Si a la par de esto al menos uno de los tres determinantes $\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} n & n' \\ p & p' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} p & p' \\ m & m' \end{vmatrix}$ difiere de cero, entonces el sistema (ε) admite soluciones, lo cual, según observamos más arriba, es imposible. De tal manera,

$$\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} n & n' \\ p & p' \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} p & p' \\ m & m' \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$m : n : p = m' : n' : p'.$$

Con esto mismo queda demostrado lo que se requería.

Así pues, determinamos las coordenadas homogéneas para todos los puntos del espacio proyectivo, sin excluir ninguno. Las propiedades básicas de dichas coordenadas son plenamente análogas a las enumeradas para las coordenadas homogéneas sobre la recta y sobre el plano.

Una propiedad bien importante de las coordenadas homogéneas que introdujimos, consiste en que cualquiera que sea el punto M perteneciente a un plano determinado en coordenadas no homogéneas por la ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

las coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 del punto M siempre satisfacen la relación

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0. \tag{2}$$

Efectivamente, si el punto M no se halla en el plano ∞, entonces $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x}$ $(x_4 \neq 0)$, y de (1) se infiere inmediatamente (2); y si el punto M pertenece al plano ∞, entonces $x_4 = 0$, $x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p$, donde m, n, p son parámetros de las ecuaciones de cualquier recta que pase por el punto M. Más, según vimos más arriba, entre A, B, C y m, n, p se verifica la dependencia

$$Am + Bn + Cp = 0$$

lo cual, a consecuencia de las relaciones $x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p$, da:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

Y esta relación, si $x_4 = 0$, coincide con la igualdad (2).

La dependencia (2) entre las coordenadas homogéneas de puntos del plano la llamaremos ecuación de dicho plano en coordenadas homogéneas. Cambiando las notaciones de coeficientes de la ecuación del plano, en lo ulterior la escribiremos en forma de

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Según la definición de las coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 del punto arbitrario M, al menos una de ellas difiere de cero; haciendo variar una misma cantidad de veces las cuatro coordenadas, se puede igualar a uno la coordenada diferente de cero. Por ejemplo, para el punto O, a título de coordenadas homogéneas, se puede señalar cuatro números 0, 0, 0, 1, para el punto ∞_x, cuatro números 1, 0, 0, 0, para el ∞_y, cuatro números 0, 1, 0, 0, para el ∞_z, cuatro números 0, 0, 1, 0 y para el E, cuatro números 1, 1, 1, 1. En lo sucesivo, en vez de ∞_x, ∞_y, ∞_z y O escribiremos A_1, A_2, A_3, A_4, llamando a estos puntos *vértices del tetraedro de coordenadas.* Evidentemente, el sistema de coordenadas homogéneas en el espacio proyectivo se determina por la elección del tetraedro de coordenadas A_1 (1, 0, 0, 0), A_2 (0, 1, 0, 0), A_3 (0, 0, 1, 0), A_4 (0, 0, 0, 1) y del punto de unidades E (1, 1, 1, 1). La elección de los referidos cinco puntos debe obedecer a una sola condición: ningunos cuatro de ellos deben estar en un mismo plano.

La cuestión de cómo varían las coordenadas homogéneas al cambiar los puntos determinantes, se resuelve en el § 114, donde serán deducidas las fórmulas de transformación de coordenadas homogéneas.

7. Correspondencia proyectiva entre elementos de las variedades unidimensionales

§ 103. En la geometría proyectiva es un concepto fundamental el de aplicación proyectiva. Entre los puntos de dos rectas proyectivas a y a', sea establecida alguna correspondencia biunívoca. Si M es un punto arbitrario de la recta a, M', su punto correspondiente de la recta a', entonces llamaremos al punto M' función del punto M empleando el símbolo usual de la dependencia funcional: $M' = f(M)$. Está claro que el punto M, a su vez, puede considerarse como función del punto M' : $M = \varphi(M')$; conviene llamar recíprocamente inversas las funciones $f(M)$ y $\varphi(M')$.

La correspondencia biunívoca $M' = f(M)$ entre los puntos de dos rectas proyectivas a y a' se llama PROYECTIVA *si a los pares armónicos conjugados de puntos M, N y P, Q de la recta a siempre les corresponden también pares armónicos conjugados de puntos M', N' y P', Q' de la recta a'.*

La representación sobre la recta a' de los puntos $M' = f(M)$ que correspondan proyectivamente a los puntos M de la recta a, se llama también *aplicación proyectiva* de la recta a sobre la a'. En el caso de coincidir a y a', se dice que está dada la aplicación proyectiva de la recta sobre sí misma.

Un importante caso particular de la aplicación proyectiva de una recta sobre otra es la aplicación determinada por la proyección central. Sean a y a' dos rectas situadas en el plano α, S, algún punto del referido plano que no pertenece a ninguna de las dos rectas a y a'. Consideraremos como imagen del punto arbitrario M de la recta a al punto $M' = f(M)$ de la recta a', situado junto con el punto M sobre una recta que parte de S. Tal aplicación $M' = f(M)$ es proyectiva. En rigor, conforme al teorema 6 del § 86, si M_1, M_2 y M_3, M_4 son pares armónicos conjugados de puntos de la recta a, tomados arbitrariamente, entonces los pares de puntos correspondientes M_1', M_2' y M_3', M_4' de la recta a' serán también armónicos conjugados. Precisamente esta circunstancia sirve de rasgo característico de la aplicación proyectiva.

De tal suerte, la aplicación proyectiva puede considerarse como generalización de la proyección central.

Ahora vamos a demostrar dos teoremas sencillos.

TEOREMA 14a. *Si la aplicación $M' = f(M)$ de la recta a sobre la a' es proyectiva, entonces la aplicación inversa de ella $M = \varphi(M')$ es también proyectiva.*

La demostración es bien sencilla. En efecto, supongamos que la aplicación $M = \varphi(M')$ no es proyectiva. Entonces, sobre la recta a' existen dos pares armónicos conjugados de puntos A', B' y C', D' cuyos pares correspondientes sobre la recta a son dos pares $A = \varphi(A')$, $B = \varphi(B')$ y $C = \varphi(C')$, $D = \varphi(D')$ que no guardan relación de conjugación armónica. Designemos con D^* el punto de la recta a, que junto con el punto C constituye un par C, D^* armónico conjugado con el par A, B. Por lo visto, los puntos D y D^* son diferentes.

Sea $D^{*\prime} = f(D^*)$. Como la aplicación $M' = f(M)$ es biyectiva, D' y $D^{*\prime}$ también serán diferentes. Dada la proyectividad de la aplicación $M' = f(M)$, los pares de puntos A', B' y C', $D^{*\prime}$ son armónicos conjugados. De tal forma, para tres puntos A', B', C' resultan obtenidos cuartos puntos armónicos D' y $D^{*\prime}$ diferentes, lo cual es imposible, según sabemos. La contradicción deducida prueba el teorema.

TEOREMA 14b. *Si* $M' = f_1(M)$ *es una aplicación proyectiva de la recta a sobre la* a', $M'' = f_2(M')$ *es una aplicación proyectiva de la recta* a' *sobre la* a'' *(en particular, las tres rectas* a, a', a'' *pueden coincidir una con otra), entonces la aplicación* $M'' = f_2 f_1(M)$ *de la recta a sobre la* a'' *es también proyectiva.*

Se puede decir en otros términos: *la aplicación resultante de dos aplicaciones proyectivas sucesivas es proyectiva.*

La afirmación enunciada de hecho es evidente. Efectivamente, dado que cada aplicación f_1 y f_2 conserva la conjugación armónica de los pares de puntos, la aplicación resultante de su realización sucesiva también conserva la conjugación armónica de los pares de puntos y, por consiguiente, es proyectiva.

La propiedad del conjunto de aplicaciones proyectivas expresada por el teorema 14b, se llama propiedad *de grupo* (es útil que el lector vuelva al § 19 donde se trata de la propiedad de grupo de un conjunto de movimientos).

En la geometría elemental el sistema de puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sobre alguna recta a se considera equivalente al sistema de puntos $M_1', M_2', \ldots, M_n'$ sobre la misma recta o sobre una otra recta a', si mediante cierto movimiento se puede hacer coincidir el primer sistema con el segundo. Análogamente a esto, en la geometría proyectiva el sistema de puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de la recta a se estima equivalente al sistema de puntos $M_1', M_2', \ldots, M_n'$ de la recta a', si existe una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', que haga pasar todo punto M_i al punto M_i' ($i = 1, 2, \ldots, n$).

En particular, el sistema $M_1, M_2, \ldots, M_n$ equivale (a menudo diremos también: *equivale proyectivamente*) al sistema $M_1', M_2', \ldots, M_n'$ si a consecuencia de una serie de proyecciones centrales, entre las cuales la primera es la proyección de la recta a sobre la a_1, la segunda es la proyección de la recta a_1 sobre la a_2, ... , la última es la proyección de la recta a_{n+1} sobre la recta a', todo punto M_i se aplica en el punto M_i'.

De los teoremas 14a y 14b se sigue que:

1) si un sistema de puntos rectilíneamente ubicados equivale proyectivamente a un otro sistema, entonces el segundo equivale proyectivamente al primero;

2) si dos sistemas equivalen proyectivamente a un tercer sistema, entonces los mismos equivalen proyectivamente uno a otro.

La aplicación proyectiva es un concepto fundamental de la geometría proyectiva precisamente porque mediante ella se determina la equivalencia proyectiva de dos sistemas de puntos. En este sentido la misma puede compararse con el concepto de traslación (movimiento) congruente de la geometría elemental.

En los párrafos inmediatos las aplicaciones proyectivas serán objeto independiente de nuestra investigación detenida.

En primer lugar, vamos a abordar la cuestión de mediante qué datos se determina unívocamente la correspondencia proyectiva.

El problema planteado lo resuelve el teorema de Staudt. Este será formulado y demostrado más abajo, después de que se establezcan los tres lemas subsiguientes necesarios para su demostración.

LEMA 1. *Sean dados sobre la recta proyectiva a dos pares de puntos M, N y P, Q. Para que sobre a exista un tercer par armónico conjugado tanto con el par M, N como con el P, Q, es nesesario y suficiente que los pares M, N y P, Q no separen uno a otro.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que existe el par X, Y que separa armónicamente al par M, N y al P, Q. Introduzcamos sobre la recta a un sistema proyectivo de coordenadas (no homogéneas) y atribuyamos el papel del punto nulo al X, el papel del punto infinitamente alejado, al Y, eligiendo arbitrariamente el punto de unidades. El punto X (punto nulo del sistema) es el centro proyectivo del segmento MN. Por ende, si x_1 y x_2 son las coordenadas de los puntos M y N, entonces $x_1 + x_2 = 0$. Consiguientemente, x_1 y x_2, siendo diferentes en signo, tienen un valor absoluto común x. Por esta misma razón las coordenadas de los puntos P, Q tienen un valor absoluto común y. Sabemos que en el sistema proyectivo de coordenadas sobre la recta proyectiva cortada, los puntos y las coordenadas correspondientes a ellos, están sujetos a unas mismas relaciones de orden. Por eso, si $x < y$, entonces los puntos M, N son interiores del segmento PQ, si $y < x$, entonces los puntos P, Q están dentro del segmento MN. Mas, en ambos casos los pares M, N y P, Q no separan uno a otro.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea dado que M, N y P, Q no están separados. Probemos que en este caso siempre existe un par X, Y que separa armónicamente tanto al par M, N como al P, Q. Debido a que los pares M, N y P, Q no separan uno a otro, ambos puntos P, Q son interiores a uno de los dos segmentos en que la recta proyectiva queda separada por M, N. Dentro de este segmento, tomemos un punto arbitrario E e introduzcamos sobre la recta proyectiva un sistema de coordenadas no homogéneas, adoptando al punto M por el punto nulo, al punto N, por un punto infinitamente alejado, al punto E, por el punto de unidades. Sean p, q las coordenadas de los puntos P, Q. Debido a la elección referida del punto de unidades, los números p y q son positivos. Luego, sea $y = f(x)$ la dependencia entre las coordenadas de los puntos X, Y que separan armónicamente al par P, Q. La función $y = f(x)$ es indefinida para $x = \frac{p+q}{2}$, pues $\frac{p+q}{2}$ es la coordenada del centro proyectivo del segmento PQ que es el cuarto armónico de los tres puntos P, Q, ∞; por ende, si $x = \frac{p+q}{2}$, se tiene: $y = f(x) = \infty$. Para los demás valores de x, la función $y = f(x)$ posee un determinado valor numérico, siendo continua; esto último se infiere del teorema 11 y de la propiedad 3 de las coordenadas proyectivas indicada en el § 97. Ahora hagamos constar que para $x \to \frac{p+q}{2}$ existirá $y \to \infty$, y, además, si $x \to \frac{p+q}{2}$ y $x < \frac{p+q}{2}$ entonces $y \to -\infty$; si $x = p$, entonces $y = p$ (véase la nota al final del § 93) y, por tanto, $y > 0$. Supongamos que las notaciones están elegidas de modo $p < q$; entonces, al variar x de p a $\frac{p+q}{2}$, la función $\varphi(x) = x + f(x)$, permaneciendo continua, varía de valores positivos a valores negativos. A consecuencia de esto, debe existir tal valor de x, que $x + f(x) = x + y = 0$. Sean X e Y puntos con las coordenadas precisamente de tal género x e y. Estas determinan el segmento XY con el centro proyectivo situado

en el punto nulo, es decir, en el punto M. Expresado en otros términos, el par X, Y separa armónicamente al par M, N (hagamos recordar que el punto N está adoptado como un punto infinitamente alejado). Dado que según la definición de la función $y = f(x)$, el par X, Y al mismo tiempo separa armónicamente al par P, Q, entonces precisamente el mismo es el par de puntos buscado.

LEMA 2. *La separación de los pares de puntos es una propiedad invariante respecto a las aplicaciones proyectivas.*

Este lema se infiere inmediatamente del precedente. En rigor, sean dados sobre la recta a dos pares de puntos M, N y P, Q; supongamos, por ejemplo, que los mismos no están separados. Entonces, según el lema 1, debe existir el par X, Y armónico conjugado tanto con el par M, N como con el P, Q. A causa de la aplicación proyectiva de la recta a sobre alguna recta a', los puntos M, N, P, Q, y X, Y se aplicarán en los puntos M', N', P', Q' y X', Y', resultando armónico conjugado el par X', Y' tanto con el par M', N' como con el P', Q' (esto se deduce inmediatamente de la definición de la aplicación proyectiva). Pero entonces, según el lema 1, los pares M'. N', y P', Q' no deben estar separados. Así pues, vemos que en la aplicación proyectiva los pares no separados pasan a pares no separados. Mas entonces, manifiestamente, los pares separados siempre pasan a pares separados.

En efecto, si los pares separados pudieran pasar a pares no separados, entonces, en la aplicación inversa (que es también proyectiva; véase el teorema 14a) los pares no separados pasarían a pares separados, pero tenemos probado que esto es imposible. El lema está demostrado.

El lema siguiente tiene un carácter puramente analítico.

LEMA 3. *Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones definidas para cualquier x, $-\infty < x < +\infty$; en cuanto a $f(x)$ se sabe que es monótona, y en cuanto a $\varphi(x)$, que es continua. De aquí, si $f(x)$ y $\varphi(x)$ coinciden en un conjunto de puntos siempre denso de la recta numérica, entonces las mismas coinciden idénticamente.*

Designemos con A un conjunto de puntos siempre denso de la recta numérica, sobre el cual, según el enunciado, las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ adoptan valores iguales, designando con x_0 un punto arbitrario exterior al conjunto A. Tenemos que demostrar que $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Supongamos que $f(x_0) > \varphi(x_0)$. Como el conjunto A es siempre denso, podemos elegir en él dos puntos x_1 y x_2 así que para $x_1 < x_0 < x_2$ la diferencia $x_2 - x_1$ será tan próxima a cero como se quiera. A cuasa de la continuidad de $\varphi(x)$, para la diferencia $x_2 - x_1$ bastante pequeña, las magnitudes $\varphi(x_1)$ y $\varphi(x_2)$ diferirán tan poco de $\varphi(x_0)$ que a la par de la desigualdad $f(x_0) > \varphi(x_0)$ tendrán lugar también las desigualdades $f(x_0) > \varphi(x_1)$ y $f(x_0) > \varphi(x_2)$. Pero a consecuencia de que sobre el conjunto A las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ tienen valores iguales, y x_1 y x_2 se han elegido en dicho conjunto, resulta que $\varphi(x_1) = f(x_1)$ y $\varphi(x_2) = f(x_2)$. De tal manera, si $x_1 < x_0 < x_2$, tenemos $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) < f(x_0)$, lo cual contradice a la condición de monotonía de la función $f(x)$.

Al reducir análogamente a la contradicción la hipótesis de $f(x_0) < \varphi(x_0)$, terminaremos la demostración del lema.

Ahora podemos demostrar el teorema fundamental de la geometría proyectiva, que se debe a Staudt.

TEOREMA 15. *La correspondencia proyectiva entre dos rectas se determina unívocamente al establecer tres pares de puntos correspondientes..*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y a' dos rectas proyectivas entre las cuales está establecida una correspondencia proyectiva tal que al punto M de la recta a le corresponde el punto $M' = f(M)$ de la recta a'. Luego, sean A, B, C tres puntos diferentes de la recta a, siendo $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ y $C' = f(C)$ sus puntos homólogos en la recta a'. Tenemos que mostrar que no existe una otra aplicación proyectiva $M' = \varphi(M)$ de la recta a sobre la a', que infiera también $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ y $C' = \varphi(C)$.

Para demostrarlo, introduzcamos sobre la recta a un sistema proyectivo de coordenadas (no homogéneas), adoptando el punto A como punto nulo, el B, como punto de unidades y el C, como punto infinitamente alejado. Al mismo tiempo, introduciremos coordenadas proyectivas sobre la recta a'; sobre ella eligiremos como punto nulo, punto de unidades y punto infinitamente alejado los puntos A', B' y C', respectivamente. Una vez introducidos los sistemas de coordenadas sobre las rectas a y a', podemos caracterizar todo punto M de la recta a (menos el infinitamente alejado) mediante su coordenada x, caracterizando con la coordenada x' todo punto M' de la recta a' (menos el infinitamente alejado). Al proceder así, tenemos la posibilidad de considerar el equivalente aritmético de la relación $M' = f(M)$, esto es, la función $x' = f(x)$, donde x y x' son las coordenadas de los puntos proyectivamente homólogos M y M'. Obviamente, el teorema será demostrado si establecemos que $x' = f(x)$ es una función del todo determinada. Ahora vamos a demostrar que $f(x) \equiv x$.

Si comparamos la definición de la correspondencia proyectiva con la de las coordenadas proyectivas, veremos fácilmente la fuente de la identidad $f(x) \equiv x$. En primer lugar, como los puntos A, B, C sobre la recta a y sus homólogos A', B', C' de la recta a' resultantes de la aplicación $M' = f(M)$, están elegidos como punto nulo, punto de unidades y punto infinitamente alejado, por tanto $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(\infty) = \infty$. Luego, el punto D marcado con 2 en la escala proyectiva de la recta a, junto con el punto A, forma un par armónico conjugado con el par B, C; debido a que la aplicación proyectiva conserva (según la definición) la propiedad de conjugación armónica, el punto D debe aplicarse en un punto D' tal que el par A', D' separe armónicamente al $B'C'$. Consecuentemente, el punto D' sobre la recta a', al igual que el D sobre la a, tiene la coordenada 2, es decir, $f(2) = 2$. Al razonar análogamente, nos cercioraremos de que $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, etc., $f(-1) = -1$, $f(-2) = -2$, etc. De tal forma, para cualquier n entero tenemos $f(n) = n$. La definición de la aplicación proyectiva también supone que los centros proyectivos de los segmentos con los extremos de números enteros sobre la recta a se aplican en los centros proyectivos de los segmentos correspondientes con los extremos de números enteros sobre la recta a'; por eso $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$. Del mismo modo, los centros proyectivos de los segmentos $\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ sobre la recta a se aplican en los centros proyectivos de los segmentos $\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ sobre la recta a'; por ende, $f\left(\frac{n}{2^2}\right) =$

Así pues, si x es una fracción binaria, entonces $f(x) = x$. Hay que mostrar que $f(x) = x$ para cualquier x. Con este objeto, hagamos notar que $f(x)$, siendo una

función definida para cualquier x, $-\infty < x < +\infty$, es monótona. Efectivamente, consideremos tres puntos M_1, M_2, M_3 de la recta a (diferentes del punto C) y los puntos M_1', M_2', M_3' de la recta a', correspondientes a ellos según una aplicación. Supongamos que el punto M_2 situado sobre la recta proyectiva a cortada se halla entre los puntos M_1 y M_3; esto quiere decir que el par M_2, C separa al par M_1, M_3. Pero, conforme al lema 2, entonces el par $M_2'C'$ separa al par M_1', M_3'. Por consiguiente, el punto M_2' sobre la recta a' cortada se halla entre M_1' y M_3'. De tal manera, la aplicación $M' = f(M)$ sujeta al examen, bien conserva el orden de puntos bien lo cambia por el contrario; en virtud de ello, la función $x' = f(x)$ será ora monótonamente creciente ora monótonamente decreciente.

Más arriba hemos visto que si x es una fracción binaria, entonces $f(x) = x$. Por tanto, dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x) = x$ toman valores iguales sobre cierto conjunto de puntos siempre denso de la recta numérica (precisamente, sobre el conjunto de fracciones binarias). Dado que entre estas dos funciones $f(x)$ es monótona, y $\varphi(x) = x$ es continua, entonces, según el lema 3, las mismas coinciden idénticamente, es decir, para cualquier x tenemos $x' = f(x) = \varphi(x) = x$.

Al establecer esto, de hecho ya tenemos demostrado el teorema. En rigor, si están dados tres pares de puntos A, A', B, B' y C, C' correspondientes en la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ de la recta a sobre la a', entonces, debido a la elección de los sistemas de coordenadas descrita arriba, a todo punto M le corresponde necesariamente el punto M' que tiene sobre la recta a' la misma coordenada que M tiene sobre la recta a. Luego, la correspondencia proyectiva se determina globalmente al fijar tres pares de puntos correspondientes.

Un importante corolario del teorema demostrado es el siguiente.

TEOREMA 16. *En la aplicación proyectiva no idéntica de la recta proyectiva sobre sí misma, el número de puntos fijos no puede ser superior a dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M' = f(M)$ una aplicación proyectiva no idéntica de cierta recta proyectiva u sobre sí misma. Supongamos que la referida aplicación tiene tres puntos fijos A, B, C, es decir, que existen los puntos A, B, C coincidentes con sus puntos homólogos A', B', C', de suerte que $A' = f(A) = A$, $B' = f(B) = B$, $C' = f(C) = C$. Junto con la aplicación $M' = f(M)$, consideremos también la aplicación idéntica de la recta u sobre sí misma, es decir, una aplicación tal que todo punto M coincide con su punto correspondiente M' : $M' \equiv M$. Respecto a la aplicación idéntica, todos los puntos de la recta u son fijos, comprendidos los puntos A, B, C. De tal forma, tanto la aplicación $M' = f(M)$ como la aplicación idéntica $M' \equiv M$ hacen pasar los puntos A, B, C a los mismos puntos A, B, C. Estas aplicaciones poseen, por tanto, tres pares comunes de puntos correspondientes. Por ser proyectiva cada una de ellas (la aplicación $M' = f(M)$ lo es según el enunciado, la $M' \equiv M$, de un modo evidente), en virtud del teorema antecedente, las referidas aplicaciones no se distinguen una de otra. Dicho en otros términos, $M' = f(M)$ debe ser una aplicación idéntica, lo cual, no obstante, queda excluido por el enunciado del teorema. Así pues, al admitir que $M' = f(M)$ posee tres puntos fijos, incurrimos en una contradicción. Así queda demostrado el teorema.

El mismo resultado puede formularse en otros términos del modo que sigue.

TEOREMA 17. *Si en la aplicación proyectiva de la recta sobre sí misma hay tres puntos fijos, entonces serán fijos todos los puntos de la recta, es decir, la aplicación es idéntica.*

§ 104. Convengamos en llamar *variedades proyectivas unidimensionales:*

1) al conjunto de puntos de la recta proyectiva;

2) al conjunto de rayos del haz plano, es decir, al conjunto de rectas que están en un mismo plano y pasan por algún punto, esto es, por el centro del haz;

3) al conjunto de planos que pasan por una misma recta del espacio (tal conjunto de planos se llama *haz*, la recta por la cual pasan los planos, *eje del haz*.

El concepto de correspondencia proyectiva definido más arriba para las rectas proyectivas, se extiende naturalmente al caso de las variedades unidimensionales arbitrarias.

Sean Π y Π' dos variedades unidimensionales cualesquiera. Imaginémonos que entre sus elementos se ha establecido cierta correspondencia biunívoca de modo que al elemento arbitrario x de la variedad Π le corresponde el elemento $x' = f(x)$ de la Π'. Llamaremos *proyectiva* a la correspondencia $x' = f(x)$ si a cualesquiera pares armónicos conjugados de elementos x_1, x_2 y x_3, x_4 de la variedad Π les corresponden también pares armónicos conjugados de elementos x_1', x_2' y x_3'; x_4' de la variedad Π'.

El teorema siguiente constituye la generalización del teorema 15 para el caso de la correspondencia proyectiva entre cualesquiera variedades de una dimensión:

TEOREMA 18. *La correspondencia proyectiva entre dos variedades unidimensionales se determina unívocamente al fijar tres pares de elementos correspondientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean dadas variedades unidimensionales Π y Π' entre las cuales se ha establecido una correspondencia proyectiva que hace corresponder un elemento $x' = f(x)$ de la variedad Π' a un elemento arbitrario x de la Π. Luego, sean a, b, c tres elementos diferentes de Π, a', b', c', sus elementos correspondientes en Π'. Hay que mostrar que no existe una correspondencia proyectiva entre Π y Π', diferente de $x' = f(x)$, que también haga corresponder elementos a', b', c' a los elementos a, b, c.

Para simplificar la exposición, consideremos algún caso determinado, suponiendo, por ejemplo, que Π y Π' son haces planos de rayos. En el plano de haz Π, tomemos una recta u cualquiera que no pase por el centro del haz; de manera análoga tomemos en el plano del haz Π' cierta recta u'. Denotemos con X el punto en que el rayo x del haz Π atraviesa a la recta u, y con X', el punto en que el rayo $x' = f(x)$ del haz Π' corta a la recta u'. Consideremos la correspondencia entre u y u', en la cual al punto X le corresponde el punto X'; apuntémoslo simbólicamente $X' = F(X)$. Es fácil comprender que la correspondencia $X' = F(X)$ es proyectiva. Lo imponen inmediatamente la definición de la correspondencia proyectiva entre los haces (formulada por nosotros algo más arriba para cualesquiera variedades de una dimensión) y la proposición sobre la invariación de la propiedad de conjugación armónica respecto a las proyecciones y cortaduras, formulada al final del § 86.

De tal manera, la correspondencia proyectiva $x' = f(x)$ entre los haces Π y Π' induce la correspondencia proyectiva $X' = F(X)$ entre las rectas u y u'. En tal caso, por lo visto, las correspondencias diferentes $x' = f(x)$ y $x' = \varphi(x)$ entre Π y Π' inducen correspondencias diferentes $X' = F(X)$ y $X' = \Phi(X)$ entre u y u'. Sean A, B, C puntos de intersección de la recta u con los rayos a, b, c, y A', B', C', puntos de intersección de la recta u' con los rayos a', b', c'. Si aparte de la correspondencia proyectiva $x' = f(x)$ entre Π y Π' existiera también una otra correspondencia $x' = \varphi(x)$, la cual, al igual que la primera, haga corresponder los rayos a, b, c a los a', b', c', entonces habría correspondencias proyectivas diferentes

$X' = F(X)$ y $X' = \Phi(X)$ entre las rectas u y u'; tanto $X' = F(X)$ como $X' = \Phi(X)$ harían pasar los puntos A, B, C a los puntos A', B', C'. Mas, esto contradice al teorema 15. Por consiguiente, aparte de la correspondencia proyectiva $x' = f(x)$ no existe una otra correspondencia proyectiva entre los haces Π y Π' que haga pasar a, b, c a a', b', c'. Así pues, la correspondencia proyectiva entre los haces se determina unívocamente al fijar tres pares de rayos correspondientes.

Si Π y Π' denotan variedades unidimensionales de otro género, siempre se puede reducir el asunto a las correspondencias proyectivas entre rectas mediante una operación de cortadura, y así obtener en todos los casos el teorema 18 como consecuencia del teorema 15.

Del teorema 18 se deduce evidentemente el siguiente

TEOREMA 19. *En la aplicación proyectiva no idéntica de cualquier variedad unidimensional sobre sí misma, el número de elementos fijos no puede ser superior a dos.*

Este teorema viene a ser la generalización del teorema 16 en que se trata de los puntos fijos en las aplicaciones proyectivas de la recta sobre sí misma.

§ 105. Hagamos constar una proposición más que necesitamos para lo ulterior.

TEOREMA 20. *Sean dadas las variedades proyectivas de una dimensión Π y Π'; luego, hágase corresponder todo elemento x de la variedad Π a un elemento $x' = f(x)$ de variedad Π', puestos en correspondencia los elementos diferentes x_1 y x_2 a los elementos también diferentes $x_1' = f(x_1)$ y $x_2' = f(x_2)$. Si en este caso a los pares armónicos conjugados de elementos de Π siempre les corresponden los pares armónicos conjugados de elementos de Π', entonces $x' = f(x)$ es una aplicación biyectiva de Π sobre Π'.*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar el caso cuando Π y Π' son rectas, puesto que los demás casos pueden reducirse al mismo mediante una operación de cortadura, análogamente a como lo hicimos al demostrar el teorema 18.

Así pues, supongamos que Π y Π' son rectas, designándolas con u y u', y que todo punto M de la recta u está aplicado en el punto $M' = f(M)$ de la u' de modo que puntos diferentes de la recta u se aplican en puntos diferentes de la u', y los pares armónicos conjugados de puntos de la recta u se aplican en los pares armónicos conjugados de la u'. Tenemos que mostrar que $M' = f(M)$ es una aplicación biyectiva de la recta u sobre la u', es decir, QUE TODO PUNTO DE LA RECTA u' CONSTITUYE LA IMAGEN DE CIERTO PUNTO DE LA u.

Es fácil comprender que esta afirmación se infiere inmediatamente de los razonamientos mediante los cuales se demostró el teorema 15. Efectivamente, tomemos sobre la recta u tres puntos cualesquiera, marcando con 0 y 1 dos de ellos, y con ∞, el tercero. Denotaremos correspondientemente con 0, 1 y ∞ las imágenes de los referidos puntos sobre la recta u'. Luego, sobre cada recta u y u' introduzcamos un sistema de coordenadas no homogéneas proyectivas determinado por los puntos 0, 1 y ∞. Entonces la relación simbólica $M' = f(M)$ puede sustituirse por la relación aritmética $x' = f(x)$ entre las coordenadas de los puntos M y M'.

El teorema quedará demostrado si establecemos que la función $x' = f(x)$, al variar X de $-\infty$ a $+\infty$, toma TODOS los valores que hay entre $-\infty$ y $+\infty$. Pero, al aducir nuevamente los razonamientos usados en la demostración del teorema 15, tendremos que concluir que $f(x) \equiv x$, de donde se deducirá lo requerido.

Sin embargo, aquí hay un punto resbaladizo. A saber, en el teorema 15 se usa el lema 2 referente a la aplicación proyectiva de una recta sobre otra. La aplicación

que estamos considerando ahora, lo mismo que la proyectiva, conserva la conjugación armónica de los pares de puntos y a distinción de la proyectiva, de antemano no se supone biyectiva.

Por ende, antes de usar en este caso la afirmación del lema 2, hay que lograr que al demostrar dicho lema, se prescinda de la condición de biyectividad de la aplicación. Recordemos que la demostración del referido lema se dividía en dos partes. Primero, establecimos que la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ de la recta u sobre la u' hacía pasar los pares no separados de puntos de la recta u a pares no separados de puntos de la u'. En esta parte no hace falta la biyectividad de la aplicación $M' = f(M)$. Luego mostramos que los pares separados de la recta u pasaban a pares también separados de la u'. Establecimos esta circunstancia considerando la aplicación inversa de la $M' = f(M)$, y la existencia de la aplicación inversa equivale a la biyectividad de la aplicación $M' = f(M)$. Por tanto, hay que modificar esta parte de la demostración del lema 2. La modificación no requerirá mucho trabajo. Una vez mostrado el hecho de que a causa de la aplicación $M' = f(x)$ los pares no separados pasan a pares no separados, podemos demostrar por reducción al absurdo el hecho de aplicarse los pares separados en pares separados. He aquí el método que sugerimos. Supongamos que a dos pares de puntos A, B y C, D que separan uno a otro sobre la recta u, les corresponden los pares de puntos A', B' y C', D' que no separan uno a otro sobre la recta u'. Como los pares A, B y C, D están separados, de acuerdo con el axioma II, 3, los pares A, C y B, D y los A, D y B, C no deben estarlo. Al contrario, por no estar separados los pares A', B' y C', D', conforme al mismo axioma II, 3, estarán separados bien los pares A', C' y B', D bien los A', D' y C', D'. De tal manera, nuestra suposición exige que sobre la recta u necesariamente haya pares no separados que se aplican en pares separados sobre la recta u'. Esto contradice a la premisa inicial del razonamiento. Así queda demostrado lo requerido.

8. Correspondencia proyectiva entre las variedades de dos y tres dimensiones

§ 106. Vamos a definir la aplicación proyectiva de las imágenes de dos y de tres dimensiones.

Primero consideremos el caso de dos dimensiones. Sea establecida correspondencia biunívoca entre los puntos de dos planos α y α', según la cual al punto arbitrario M del plano α le corresponde el punto $M' = f(M)$ del plano α'.

Esta correspondencia se llama *proyectiva* si a los puntos de cualquier recta perteneciente al plano α les corresponden en el plano α' los puntos también pertenecientes a cierta recta.

La fijación sobre el plano α' de los puntos $M' = f(M)$ correspondientes proyectivamente a los puntos M del plano α, también se llama *aplicación proyectiva del plano α sobre el plano α'*. En el caso de coincidir α y α', se dice que está dada una aplicación proyectiva del plano α' sobre sí mismo.

Según la definición de la aplicación proyectiva del plano α sobre el α', los puntos de cada recta a del plano α tienen por imágenes suyas a puntos situados sobre cierta recta a' del plano α'. Esta recta a' la llamaremos correspondiente a la recta a por consecuencia de la aplicación.

La definición de la correspondencia proyectiva exige que los puntos situados rectilíneamente pasen a puntos situados también rectilíneamente. Mas, la definición no dice nada sobre los puntos que no pertenecen a una misma recta, y no se excluye de antemano la posibilidad de aplicarse tales puntos sobre una misma recta. Sin embargo, en lo sucesivo probaremos que este caso queda eliminado, es decir, si las imágenes se hallan sobre una misma recta, entonces las preimágenes también están sobre una misma recta. Dicho en otros términos, demostraremos que la aplicación inversa de la proyectiva también es proyectiva (teorema 23a). Conjuntamente con esto se demostrará que en la aplicación proyectiva la correspondencia de las rectas, lo mismo que la de los puntos, es biunívoca.

Un importante caso particular de la aplicación proyectiva del plano sobre el plano es la aplicación determinada por la proyección central.

Al proyectar los puntos de algún plano α desde un centro arbitrario sobre un otro plano proyectivo α' (usándolo como pantalla), cada punto M del plano α se aplica en cierto punto $M' = f(M)$ del α'. La aplicación $M' = f(M)$ es proyectiva, puesto que cualquier recta del plano α se proyecta también en una recta del plano α'.

Demostremos el teorema que sigue.

TEOREMA 21. *Si el plano α está aplicado proyectivamente sobre el plano α', entonces a los grupos armónicos de elementos del plano α les corresponden, a causa de la aplicación sobre el plano α', también grupos armónicos de elementos.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea a una recta arbitraria del plano α, a', su recta correspondiente en el plano α', A, B y C, D, pares armónicos conjugados de puntos de la recta a, arbitrariamente elegidos. Hay que mostrar que los pares de puntos A', B' y C', D' de la recta a' correspondientes a los A, B, C, D a causa de la aplicación, también son armónicos conjugados. Ante todo, hagamos notar que sobre el plano α debe existir un punto exterior a la recta a, cuya imagen es exterior a la recta a'. En rigor, si todos los puntos del plano α, exteriores a la recta a se aplicaran sobre la a', entonces cierto conjunto de puntos de la recta a debería aplicarse sobre un conjunto de puntos del plano α', exteriores a la recta a' (por cuanto se supone biyectiva la aplicación proyectiva del plano α sobre el α'); pero esto queda excluido por la definición de la aplicación proyectiva (conforme a la cual se conserva el carácter rectilíneo de la posición de puntos). Denotemos con R algún punto del plano α, que no se halla sobre la recta a, y cuya imágen R' en el plano α' no está sobre la recta a'. A consecuencia de la conjugación armónica de los pares A, B y C, D, se puede construir en el plano α un cuadrivértice T con los puntos diagonales A, B y un par de lados opuestos que pasan por C, D; además, se puede elegir el punto R como uno de los vértices del cuadrivértice T (véase el § 86). Dado que la imagen R' del punto R no está sobre la recta a', entre las imágenes de todos los vértices del cuadrivértice T ningunas tres se encuentran sobre una misma recta. Por eso es imagen del cuadrivértice T cierto cuadrivértice T'.

Patentemente, los puntos A', B' constituyen los puntos diagonales del cuadrivértice T', y los lados opuestos suyos pasan por los puntos C', D'. De aqui se sigue que los pares de puntos A', B^1 y C', D' son armónicos conjugados.

2) Sea P un punto arbitrario del plano α, P', su imagen sobre el plano α', a, b y c, d, pares armónicos conjugados de rayos de un haz arbitrariamente elegidos sobre el plano α con el centro P. Hay que mostrar que en el haz con el centro P' los pares

de rayos a', b' y c', d' correspondientes a los rayos a, b, c, d merced a la aplicación, también son armónicos conjugados. Esto se deduce inmediatamente de lo que precede. En primer lugar notemos que sobre el plano α debe existir una recta que no pasa por P, y cuya imagen no pasa por P'. En efecto, tomemos sobre el plano α algún punto Q diferente de P, designando con Q' su imagen sobre α'. Como fue mostrado algo más arriba, sobre el plano α existe un punto R que no pertenece a la recta PQ, cuya imagen es exterior a $P'Q'$. Por lo visto, justamente la recta QR será la recta de tal género, que no pasa por P, y cuya imagen no pasa por P'. Denotemos con t la recta QR, denotando con t' su imagen. Sean A, B, C, D puntos en que los rayos a, b, c, d cruzan a la recta t, A', B', C', D', puntos en que los rayos a', b', c', d' atraviesan a la recta t'. Está claro que A', B', C', D' con las imágenes de los puntos A, B, C, D. Como los pares de rayos a, b y c, d son armónicos conjugados, según la proposición formulada al final del § 86, los pares de puntos A, B y C, D serán armónicos conjugados. De aquí, en virtud de la primera parte de la demostración, se deduce que los pares de puntos A', B', y C', D' que son las imágenes de los puntos A, B y C, D, también son armónicos conjugados; pero debido a que los rayos a', b', c', d' pasan por los puntos A', B', C', D', respectivamente, de acuerdo a la proposición del § 86, mencionada más arriba, los pares de rayos a', b', y c', d' obedecen a la relación de conjugación armónica. Con esto mismo queda demostrado plenamente el teorema.

De los teoremas 20 y 21 se desprende el siguiente

TEOREMA 22. *Si el plano α está aplicado proyectivamente sobre el plano α', entonces en este caso*

1) *el conjunto de puntos de toda recta a del plano α se aplica biyectivamente sobre el conjunto de puntos de la recta correspondiente a' del plano α' y*

2) *el conjunto de rayos de un haz arbitrario sobre el plano α con el centro P se aplica biyectivamente sobre el conjunto de rayos del haz cuyo centro P' es el punto del plano α', correspondiente al punto P gracias a la aplicación.*

De aquí puede deducirse sin dificultades el siguiente

TEOREMA 23a. *Si $M' = f(M)$ es una aplicación proyectiva del plano α sobre el α', entonces la aplicación inversa $M = \varphi(M')$ del plano α' sobre el α también es proyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a' una recta arbitraria del plano α' Tomemos sobre ella dos puntos A' y B' cualesquiera; sobre el plano α, lès corresponden los puntos $A = \varphi(A')$ y $B = \varphi(B')$. Designemos con a la recta determinada por los puntos A, B. Como la aplicación $M' = f(M)$ es proyectiva, a practicarse ésta, todos los puntos de la recta a se aplican sobre la a'. Según el teorema 22, la aplicación de la recta a sobre la a', obtenida por este medio, resulta biyectiva, es decir, las inágenes de los puntos de la recta a «llenan» la recta a'. Expresado en otros términos, todo punto de la recta a' constituye la imagen de algún punto de la recta a. Y esto quiere decir que en el caso de estar el punto M' sobre a', el punto $M = \varphi(M')$ se halla sobre a. Así pues, la aplicación $M = \varphi(M')$ hace pasar los puntos del plano α' situados sobre una recta arbitraria, a puntos ubicados sobre una misma recta sobre el plano α, lo cual viene a constituir una propiedad característica de la aplicación proyectiva. El teorema está demostrado.

Es interesante que tiene lugar el siguiente teorema sorprendente a primera vista.

Sea aplicado biyectivamente el conjunto de todos los puntos del plano α sobre cierto conjunto G' de puntos del plano α'. Si todo género de puntos del plano α, pertenecientes a una misma recta se aplican en puntos del plano α', también pertenecientes a una misma recta, entonces son posibles sólo dos casos: 1) *ora el conjunto G' está situado por entero en una sola recta cualquiera del plano α',* 2) *ora el conjunto G' coincide con todo el plano α' (entonces la aplicación indicada es una aplicación proyectiva del plano α sobre todo el plano α').*

DEMOSTRACIÓN. Podemos realizar el primer caso tomando de antemano cualquier conjunto de puntos G' de potencia de continuo sobre alguna recta del plano α' y aplicando biyectivamente de cualquier modo el plano α sobre G'.

Ahora, supongamos que el conjunto G' contiene puntos del plano α' que no están sobre una misma recta. En tal caso, a los grupos armónicos de elementos del plano α les corresponden según la aplicación también grupos armónicos de elementos del plano α' (se demuestra análogamente al teorema 21).

De aquí y de los teoremas 20, 21 se infiere que 1) el conjunto de puntos de toda recta a del plano M se aplica biyectivamente sobre el conjunto de puntos de la recta correspondiente a' del plano α'; 2) el conjunto de rayos de un haz arbitrario sobre el plano α con el centro P se aplica biyectivamente sobre el conjunto de rayos del haz cuyo centro P' es el punto del plano α', que corresponde al punto P según la aplicación.

Sobre el plano α, tomemos algún punto P y designemos con P' su imagen situada sobre α'. Sea M' un punto del todo arbitrario del plano α'; sea a' la recta que une M' con P'. Conforme a lo dicho más arriba, la recta a', siendo un rayo del haz con el centro P' en el plano α', debe corresponder a cierta recta a perteneciente al haz con el centro P ubicado sobre el plano α; además, la correspondencia entre los puntos de las rectas a y a' debe ser biunívoca. Por ende, el punto M' situado sobre la recta a', debe corresponder a cierto punto M de la recta a, es decir, a cierto punto del plano α. Así pues, las imágenes de puntos del plano α' necesariamente han de llenar todo el plano α'. Así queda demostrado el teorema.

A continuación indicaremos un teorema evidente.

TEOREMA 23b. *Si $M' = f_1(M)$ es una aplicación proyectiva del plano α sobre el α', $M'' = f_2(M')$, una aplicación proyectiva del plano α' sobre el plano α'' (pudiendo, en particular, coincidir uno con otro los tres planos), entonces la aplicación $M'' = f_2(f_1(M))$ del plano α sobre el α'' también es proyectiva.*

Dicho en otros términos: *la aplicación resultante de dos aplicaciones proyectivas sucesivas, es proyectiva.*

La afirmación enunciada es evidente. En rigor, debido a que cada una de las aplicaciones f_1 y f_2 conserva la posición rectilínea de los puntos, la aplicación resultante de su realización sucesiva, posee la misma propiedad y, consecuentemente, es proyectiva.

La propiedad del conjunto de aplicaciones proyectivas expresada por el teorema 23b, se llama propiedad de grupo.

Convengamos en decir que la figura Σ que se halla en cierto plano α, *equivale proyectivamente* a la figura Σ' que se halla en el mismo plano o en un otro plano α' si existe la aplicación proyectiva del plano α sobre el α' en la cual Σ se aplica sobre Σ'.

En particular, la figura Σ equivale proyectivamente a la Σ' si a consecuencia de una serie de proyecciones centrales del plano α sobre el α_1, del plano α_1 sobre el

$\alpha_2, \ldots$, del plano α_{n-1} sobre el α', la figura Σ se aplica proyectivamente sobre la Σ'.

De los teoremas 23a y 23b se sigue que:

1) si una figura equivale proyectivamente a una otra, entonces la segunda equivale proyectivamente a la primera;

2) si dos figuras equivalen proyectivamente a una tercera, entonces equivalen proyectivamente una a otra.

Merced a la correspondencia señalada de figuras, las aplicaciones proyectivas en la geometría proyectiva vienen a desempeñar un papel análogo al que desempeñan las traslaciones congruentes de figuras (es decir, los movimientos) en la geometría elemental.

Por cierto tiempo las aplicaciones proyectivas de planos serán objetos independientes de nuestra investigación.

TEOREMA 24. *Si el plano α está aplicado proyectivamente sobre el α', entonces en este caso*

1) *toda recta a del plano α se aplica proyectivamente sobre la recta correspondiente a' del plano α';*

2) *todo haz de rayos del plano α se aplica también proyectivamente sobre el haz de rayos correspondiente del plano α'.*

Para cerciorarnos de la validez de este teorema basta comparar los teoremas 21 y 22 con la definición de la aplicación proyectiva de las variedades unidimensionales.

Ahora tenemos la posibilidad de probar el siguiente teorema importante que puede estimarse como generalización del teorema 15 para el caso de las variedades de una dimensión.

TEOREMA 25. *La aplicación proyectiva del plano α sobre el α' se determina unívocamente al fijar cuatro pares de puntos correspondientes según la aplicación, a condición de que entre los cuatro puntos que se definen sobre el plano α ningunos tres pertenezcan a una misma recta.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ del plano α sobre el plano α'. Luego, sean A, B, C, D cuatro puntos del plano α, entre los cuales ningunos tres están sobre una misma recta A', B', C', D', sus puntos correspondientes en el plano α' (la definición de la aplicación proyectiva y el teorema 23a señalan que entre los puntos A', B', C', D' tampoco hay tres puntos que se hallen sobre una misma recta). Hay que mostrar que no existe una aplicación proyectiva del plano α sobre el α', que difiera de la aplicación indicada $M' = f(M)$, pero que haga pasar los puntos A, B, C, D a los puntos A', B', C', D', lo mismo que la aplicación dada.

Sobre el plano α, tomemos un punto arbitrario M, denotando con m la recta AM. La referida recta figura entre los rayos de un haz con el centro A. Cualquiera que sea la aplicación proyectiva de α sobre α', que hace pasar los puntos A, B, C, D a los A', B', C', D', será proyectiva la aplicación del haz con el centro A sobre el haz con el centro A', determinada por aquélla (véase el teorema 24). Luego, por más numerosas que sean las diversas aplicaciones proyectivas de α sobre α' que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D', todas ellas determinan una sola aplicación proyectiva general del haz con el centro A sobre el haz con el centro A'. Efectivamente, cada una de ellas aplica los rayos AB, AC y AD del primer haz en los rayos $A'B'$, $A'C'$ y $A'D'$ del segundo; luego, según la condición a que está sujeta la elección de los puntos A, B, C, D, serán diferentes los rayos AB, AC y AD (así co-

mo los $A'B'$, $A'C'$ y $A'D'$); mas, conforme al teorema 18, la aplicación proyectiva de las variedades unidimensionales (en particular, de los haces) se define unívocamente al fijar tres pares de elementos correspondientes. Por eso, en todas las aplicaciones proyectivas posibles del plano α sobre α', que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D', la recta m del plano α se aplica sobre una recta m' determinada por completo que corresponde a la m en la correspondencia proyectiva entre los haces en cuestión. Consecuentemente, en todas las aplicaciones proyectivas del plano α sobre el α', que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D', el punto M se aplica sobre una recta determinada globalmente que pasa por A'. Análogamente, al considerar en el plano α un haz de rayos con el centro B y su aplicación sobre el plano α', se puede establecer que por más numerosas que sean las aplicaciones del plano α sobre el α', que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D', a consecuencia de todas ellas el punto M se aplica sobre una recta determinada globalmente que pasa por el punto B' en el plano α'. La intersección de las rectas indicadas determina la imagen del punto M sobre el plano α', de un mismo modo en todas las aplicaciones proyectivas de α sobre α', que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D'. Y como el punto M es arbitrario, de los razonamientos aducidos se infiere que, además de la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ dada, no existe una otra aplicación proyectiva de α sobre α' que haga pasar los puntos A, B, C, D a los A', B', C', D', lo mismo que la aplicación dada. El teorema está demostrado.

Del teorema 25 se deduce el siguiente

TEOREMA 26. *En el caso de la aplicación proyectiva no idéntica del plano sobre sí mismo no puede existir cuatro puntos fijos, entre los cuales no hay tres que estén sobre una misma recta.*

En efecto, sea $M' = f(M)$ una aplicación proyectiva no idéntica del plano α sobre sí mismo. Supongamos que existen cuatro puntos A, B, C, D, entre los cuales no hay tres que estén sobre una misma recta, que permanecen fijos al practicar la aplicación $M' = f(M)$. Junto con la aplicación $M' = f(M)$, consideremos la aplicación idéntica $M' \equiv M$. Por lo visto, la misma es proyectiva. Luego, al operar la aplicación $M' \equiv M$, los puntos A, B, C, D (al igual que todos los puntos del plano) permanecen fijos. De tal modo, tanto la aplicación $M' = f(M)$ como la idéntica $M' \equiv M$ hacen pasar los puntos A, B, C, D a los mismos puntos A, B, C, D. Las referidas aplicaciones poseen, por consiguiente, cuatro pares comunes de puntos correspondientes situados así como está previsto en el teorema 25 y, conforme al teorema 25, no pueden diferir una de otra. Expresado en otros términos, dada nuestra proposición, $M' = f(M)$ debe ser una aplicación idéntica, lo cual contradice al enunciado del teorema. Así queda demostrado lo que se requería.

NOTA. La acotación impuesta sobre la ubicación de los puntos de que se trata en los teoremas 25 y 26, es importante. Para cerciorarnos de ello, consideremos la llamada *aplicación armónica.*

Sea O un punto arbitrariamente elegido en el plano α, a, alguna recta del mismo plano, que no pasa por el punto O. Denotemos con M un punto arbitrario del plano α, con A, el punto en que la recta OM corta la recta a (fig. 115). Al punto M' que junto con el punto M separa armónicamente al par O, A, lo consideramos correspondiente al punto M en la aplicación armónica del plano α sobre sí mismo; llamaremos *centro de la aplicación* al punto O, *eje* de la misma, a la recta a. Para designar el punto M', usaremos también el apunte simbólico $M' = H(M)$.

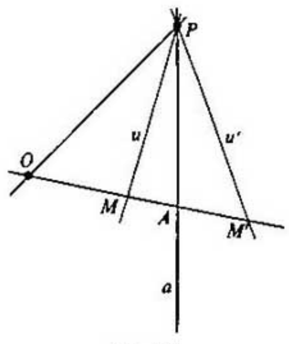


Fig. 115

Es fácil establecer que la aplicación armónica $M' = H(M)$ es proyectiva. Efectivamente, sea u una recta cualquiera del plano α, P, su punto de intersección con el eje a, u', una recta que pasa por P, y junto con la recta u separa armónicamente el par de rectas a y PO. Obviamente, si el punto M se desplaza por la recta u, entonces su punto correspondiente $M' = H(M)$ se desplazará por la recta u'. De tal manera, al practicar la aplicación $M' = H(M)$, toda recta se aplica también en recta. Precisamente esto sirve de rasgo característico de la aplicación proyectiva.

Luego, conforme a la nota formulada al final del § 93, si el punto M coincide con algún punto del eje a, entonces el punto homólogo $M' = H(M)$ coincidirá con el mismo punto del eje. De suerte que si M coincide con el centro O, entonces el punto $M' = H(M)$ también coincidirá con el centro. Por consiguiente, el centro O y todos los puntos del eje a constituyen puntos fijos de la aplicación $M' = H(M)$. Vemos que la aplicación proyectiva $M' = H(M)$ del plano α sobre sí mismo posee una infinidad de puntos fijos (no obstante, todos ellos, menos el punto O, están situados sobre una misma recta). Pues bien, si cierta aplicación proyectiva del plano α sobre sí mismo deja fijos los cuatro puntos, entonces se puede concluir que la referida aplicación es idéntica sólo cuando se conoce que la posición de los puntos fijos obedece a la restricción indicada en el teorema 26.

§ 107. En lo sucesivo, vamos a utilizar a veces la expresión *variedad proyectiva de dos dimensiones;* en este caso entenderemos bien un plano proyectivo bien la llamada radiación. *La radiación* es un conjunto de rectas y planos del espacio proyectivo, que pasan por algún punto suyo (*centro de la radiación*).

Se puede definir la aplicación proyectiva para cualesquiera variedades bidimensionales. A fin de formular más cómodamente dicha definición, convengamos en llamar *elemento de primer género* de la variedad bidimensional Π a todo punto que le pertenece, si Π es un plano, y a toda recta que le pertenece, si Π es una radiación; llamaremos *elemento de segundo género* de la variedad bidimensional Π a la recta que le pertenece, si Π es un plano, y al plano que la pertenece, si Π es una radiación.

Entre los elementos de primer género de dos variedades Π y Π' sea establecida una correspondencia biunívoca así que a un elemento arbitrario x de la variedad Π le corresponde un elemento $x' = f(x)$ de la variedad Π'. La correspondencia (o apli-

cación) $x' = f(x)$ se llama *proyectiva* si a cualquier grupo de elementos de primer género de la variedad Π, pertenecientes a un mismo elemento de segundo género de la referida variedad, le corresponde en la variedad Π' un grupo de elementos de primer género, también pertenecientes a un mismo elemento de segundo género.

Todos los teoremas demostrados en el párrafo anterior, naturalmente, se generalizan para el caso de las variedades bidimensionales arbitrarias. A fin de obtener las formulaciones de los teoremas generalizados, en las formulaciones de teoremas aducidas en el § 106, hay que sustituir los términos «punto» y «recta» por las expresiones «elemento de primer género» y «elemento de segundo género». Para cerciorarnos de su validez, basta notar que los elementos de primero y de segundo géneros de una radiación, siendo atravesados por un plano, correspondientemente dan elementos de primero y de segundo géneros del referido plano. De tal manera, la investigación de las aplicaciones proyectivas de las variedades de dos dimensiones puede reducirse a la de las aplicaciones proyectivas de planos, que fue practicada más arriba.

§ 108. Ahora vamos a considerar aplicaciones proyectivas de las variedades proyectivas de tres dimensiones; llamamos *variedades proyectivas de tres dimensiones* a espacios proyectivos.

Sean dados dos espacios proyectivos Π y Π' (cada uno de los símbolos Π y Π' denota cierto conjunto de objetos llamados puntos, rectas y planos, para los cuales están definidas las relaciones de pertenencia mutua y de orden observando las exigencias de los axiomas proyectivos). Luego, sea establecida entre los puntos de Π y Π' una correspondencia biunívoca, según la cual a un punto arbitrario M del espacio le responde el punto $M' = f(M)$ del Π'. La correspondencia biunívoca $M' = f(M)$ entre los puntos de los espacios Π y Π' se llama *proyectiva* si a los puntos de cualquier plano del espacio Π les corresponden en el espacio Π' los puntos que también se hallan sobre cierto plano.

La definición en el espacio Π' de los puntos $M' = f(M)$ correspondientes proyectivamente a los puntos M del espacio Π, se llama también *aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el espacio* Π'. En el caso de coincidir el espacio Π y el Π', se dice que está dada una aplicación proyectiva del espacio sobre sí mismo.

Las propiedades básicas de las aplicaciones proyectivas de variedades tridimensionales constituyen generalizaciones naturales de las propiedades correspondientes de las aplicaciones proyectivas de variedades bidimensionales y se establecen mediante razonamientos absolutamente análogos a los aducidos en el § 107. Por ende, nos limitaremos sólo a formular los más principales teoremas sobre las aplicaciones proyectivas para el caso de tres dimensiones, sin detenernos en su demostración.

TEOREMA 27. *Si el espacio* Π *está aplicado proyectivamente sobre el* Π', *entonces todo grupo armónico de elementos del espacio* Π *tiene por su imagen en el espacio* Π' *también un grupo armónico de elementos.*

TEOREMA 28. *En la aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el* Π':

1) *Toda variedad unidimensional del espacio* Π *se aplica biyectiva y proyectivamente sobre la variedad unidimensional correspondiente del espacio* Π'. *En particular, toda recta del espacio* Π *se aplica biyectiva y proyectivamente sobre la recta correspondiente del espacio* Π'.

2) *Toda variedad bidimensional del espacio* Π *se aplica biyectiva y proyectivamente sobre la variedad bidimensional correspondiente del espacio* Π'. *En particu-*

lar, todo plano del espacio Π *se aplica biyectiva y proyectivamente sobre el espacio correspondiente del* Π'.

TEOREMA 29a. *Si* $M' = f(M)$ *es una aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el espacio* Π', *entonces la aplicación inversa* $M = \varphi(M')$ *del espacio* Π' *sobre el* Π *también es proyectiva.*

TEOREMA 29b. *Si* $M' = f_1(M)$ *es una aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el espacio* Π', *y* $M'' = f_2(M')$, *una aplicación proyectiva del espacio* Π' *sobre el* Π'', *entonces la aplicación* $M'' = f_2(f_1(M))$ *del espacio* Π *sobre el espacio* Π'' *también es proyectiva, es decir, el conjunto de aplicaciones proyectivas de espacios posee propiedad de grupo.*

TEOREMA 30. *La aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el espacio* Π' *se define unívocamente al fijar cinco pares de puntos correspondientes según la aplicación, a condición de que entre los cinco puntos fijados en el espacio* Π *no hay cuatro que se hallen en un mismo plano.*

Del teorema 30 se infiere inmediatamente el siguiente

TEOREMA 31. *En la aplicación proyectiva no idéntica del espacio sobre sí mismo no pueden existir cinco puntos fijos entre los cuales no hay cuatro que se hallen sobre un mismo plano.*

La limitación impuesta por este teorema sobre la posición de los puntos, es sustancial. Podemos cerciorarnos de ello generalizando para el caso del espacio el concepto de aplicación armónica cuya definición para el plano la dimos al final del § 106.

Aparte de los teoremas básicos aducidos más arriba, indiquemos complementariamente el teorema que sigue.

Sea aplicado biyectivamente el conjunto de todos los puntos del espacio proyectivo Π *sobre cierto conjunto* G' *de puntos del espacio proyectivo* Π'. *Si todo punto del espacio* Π *situado sobre un plano se aplica en un punto del espacio* Π' *también situado sobre un plano, entonces son posibles sólo dos casos:* 1) *ora el conjunto* G' *está situado por entero sobre un solo plano cualquiera del espacio* Π', 2) *ora el conjunto* G' *coincide con todo el espacio* Π', *(entonces la aplicación indicada es una aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre todo el espacio* Π').

Naturalmente, este teorema generaliza el teorema sobre la aplicación de planos formulado y demostrado en el § 106 después del teorema 23a.

Respecto a los cuerpos espaciales, se introduce el concepto de equivalencia proyectiva, del mismo modo que para el caso de las figuras de una y de dos dimensiones. El cuerpo T del espacio Π se llama *proyectivamente equivalente* al cuerpo T' del mismo espacio o de un espacio Π' si existe la aplicación proyectiva del espacio Π sobre el Π' a consecuencia de la cual el cuerpo T se aplica sobre el T'.

La reflexividad y la transitividad de la relación de equivalencia proyectiva se deducen inmediatamente de los teoremas 29a y 29b.

9. Representaciones analíticas de las aplicaciones proyectivas. Involución

§ 109. Ahora nos proponemos una finalidad inmediata consistente en deducir las relaciones entre las coordenadas proyectivas de los puntos que corresponden unos a otros en la aplicación proyectiva.

Primero vamos a considerar las aplicaciones proyectivas del plano sobre el plano y del espacio sobre el espacio, abordando luego el caso de una dimensión, a saber, la aplicación proyectiva de rectas.

Sean α y α' dos planos (no es preciso que sean diferentes). Sobre cada uno de ellos, introduzcamos algún sistema de coordenadas homogéneas proyectivas (si α y α' coinciden, entonces los sistemas de coordenadas que se introducen sobre ellos, en particular, también pueden coincidir). Luego, definamos cierta aplicación especial de los puntos del plano α en el α', precisamente: al elegir algunos números c_{11}, $c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, c_{33}$, consideraremos que el punto $M'(x_1', x_2', x_3')$ del plano α' corresponde según la aplicación al punto $M(x_1, x_2, x_3)$ del plano α si las coordenadas de los referidos puntos satisfacen las igualdades:

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde ρ' es cualquier número desigual a cero. Llamaremos *lineal* tal aplicación apuntando simbólicamente $M' = L(M)$ al tratar de ella.

Hagamos recordar al lector que conforme a la propiedad básica de las coordenadas homogéneas, la elección del factor ρ' no incide en la posición del punto M' con las coordenadas $\rho' x_1', \rho' x_2', \rho' x_3'$ (véase el § 101). Por eso todo punto M puede tener como imagen suya únicamente un solo punto M'. Los números c_{ik} que determinan la aplicación lineal, los apuntaremos en forma de una matriz:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

llamándola *matriz de la aplicación lineal*; llamaremos *coeficientes de la aplicación* a los propios números c_{ik} y *determinante de la aplicación* al determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Es importante señalar que para $\Delta = 3$ no todo punto del plano α tiene una imagen. En efecto, si $\Delta = 0$, entonces el sistema

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 &= 0, \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

admite soluciones x_1^0, x_2^0, x_3^0 desiguales a cero a un mismo tiempo; el punto $M(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ no tiene imagen sobre el plano α', pues a base de las fórmulas (1) en este caso obtenemos $x_1' = 0, x_2' = 0, x_3' = 0$, lo cual es imposible, puesto que x_1', x_2', x_3' son coordenadas homogéneas (véase el § 101). Así pues, puede resultar región de determinación de la aplicación $M' = L(M)$ no todo el plano α, sino el plano α con cierto conjunto de puntos $\alpha_0(M)$ eliminado. Se comprende fácilmente que en el caso de $\Delta = 0$, el conjunto $\alpha_0(M)$ es ora punto ora recta ora todo el plano α. A saber, si en el sistema (*) hay dos ecuaciones esenciales (es decir, linealmente independientes), entonces el sistema (*) determina la relación de las incógnitas x_1, x_2, x_3. En este ca-

so, $\alpha_0(M)$ consta de un solo punto; si en el sistema (*) hay una sola ecuación esencial, entonces, evidentemente, $\alpha_0(M)$ es una recta (determinada por la referida ecuación); al fin, si el sistema (*) carece en absoluto de ecuaciones esenciales (es decir, si todos los $c_{ik} = 0$), entonces $\alpha_0(M)$ coincide con el plano α.

Dicho en otros términos, $\alpha_0(M)$ es punto, recta o plano correspondientemente a las igualdades: Rang $C = 2$, Rang $C = 1$ ó Rang $C = 0$. Es natural estimar este último caso excluido de la consideración.

Para las aplicaciones lineales tienen lugar los siguientes teoremas.

TEOREMA 32. *Si la aplicación lineal $M' = L(M)$ de los puntos del plano α en el plano α' tiene un determinante diferente de cero, entonces $M' = L(M)$ es una aplicación biyectiva del plano α sobre el α'.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una aplicación lineal $M' = L(M)$ definida por las fórmulas (1), con el determinante $\Delta \neq 0$. Entonces:

1) Todo punto M del plano α tiene imagen sobre el plano α'. Efectivamente, cualesquiera que sea el punto $M(x_1, x_2, x_3)$, según las fórmulas (1) siempre se determinan tres números $\rho' x_1', \rho' x_2', \rho' x_3'$; que no pueden ser todos iguales a cero, ya que para $\Delta \neq 0$, de las igualdades

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = 0,$$
$$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = 0,$$
$$c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 = 0$$

se inferiría $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, lo cual es imposible. Mas, los tres números $\rho' x_1'$, $\rho' x_2'$, $\rho' x_3'$, si son no todos iguales a cero, en el sistema de coordenadas homogéneas sobre el plano α' definen cierto plano M', precisamente este punto constituye la imagen del punto M.

2) Todo punto M' del plano α' es imagen de uno, y sólo de un punto M del plano α.

En rigor, si $\Delta \neq 0$, entonces de las ecuaciónes (1), para x_1', x_2', x_3' y ρ' indicados, siempre se puede hallar, y además de un modo unívoco, los valores correspondientes x_1, x_2, x_3; si todos los números x_1', x_2', x_3' son no todos iguales a cero, entonces los números x_1, x_2, x_3 tampoco pueden ser todos iguales a cero. De tal forma, a partir de las coordenadas homogéneas del punto M', las relaciones (1) siempre definen las coordenadas homogéneas de cierto punto M. Luego, para los valores diferentes de ρ', las ecuaciones (1) determinan valores diferentes de x_1, x_2, x_3, pero las relaciones $x_1 : x_2 : x_3$ no varían al variar ρ'. Consiguientemente, a base del punto M' dado, el punto M se define unívocamente.

Así el teoréma queda demostrado.

Si en las ecuaciones (1) adoptamos $\rho' = \dfrac{1}{\rho}$ y para $\Delta \neq 0$ expresamos ρx_1, ρx_2, ρx_3 por estas ecuaciones, entonces obtendremos las igualdades:

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1 &= c_{11}' x_1' + c_{12}' x_2' + c_{13}' x_3', \\ \rho x_2 &= c_{21}' x_1' + c_{22}' x_2' + c_{23}' x_3', \\ \rho x_3 &= c_{31}' x_1' + c_{32}' x_2' + c_{33}' x_3' \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

que determinan la aplicación del plano α' sobre el α, inversa de la aplicación de α sobre α' dada. Por lo visto, la aplicación inversa es lineal, al igual que la indicada. Los coeficientes c'_{ik} se expresan por medio de los coeficientes c_{ik} conforme a las reglas conocidas del álgebra. Los mismos componen la matriz

$$C' = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

inversa de la matriz C de la aplicación dada, es decir, entre C y C' tiene lugar la relación

$$CC' = I,$$

donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz unidad. Como es sabido, en tal caso los determinantes Δ y Δ' de las referidas matrices están sujetos a una dependencia análoga:

$$\Delta\Delta' = 1.$$

De aquí, en particular, se infiere que $\Delta' \neq 0$.

TEOREMA 33. *Si la aplicación lineal $M' = L(M)$ de los puntos del plano α en el α' tiene un determinante igual a cero, entonces todas las imágenes de los puntos del plano α se localizan en el plano α' sobre una misma recta. (En este caso la aplicación $M' = L(M)$ no es biyectiva).*

En rigor, si el determinante de la aplicación definida por las fórmulas (1) es igual a cero, entonces existen tres números u_1, u_2, u_3 entre los cuales al menos uno difiere de cero, que satisfacen las igualdades

$$\left.\begin{aligned} c_{11}u_1 + c_{21}u_2 + c_{31}u_3 &= 0, \\ c_{12}u_1 + c_{22}u_2 + c_{32}u_3 &= 0, \\ c_{13}u_1 + c_{23}u_2 + c_{33}u_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Multipliquemos término a término la primera de las igualdades (1) por u_1, la segunda, por u_2, la tercera, por u_3, y sumémoslas; a consecuencia de las ecuaciones (6) obtendremos, para cualesquiera x_1, x_2, x_3:

$$u_1x'_1 + u_2x'_2 + u_3x'_3 = 0.$$

De tal manera, las coordenadas del punto $M' = L(M)$, sin depender de cómo se elige el punto M, satisfacen la ecuación de cierta recta. Con esto mismo queda demostrado el teorema*).

TEOREMA 34. *Cualquiera que sea la aplicación lineal $M' = L(M)$ de los puntos del plano α en el plano α', las imágenes de los puntos de cualquier recta del plano α se localizan en el plano α' también sobre una recta.*

---

*) Hagamos constar que si Rang $C = 2$, entonces los puntos M' llenan una recta. Si Rang $C = 1$, entonces todos los puntos M' coinciden; de imagen sirve un único punto.

DEMOSTRACIÓN. 1) Si $\Delta = 0$, entonces la afirmación es válida a consecuencia del teorema 33.

2) Si $\Delta \neq 0$, entonces, junto con la aplicación indicada, existe una inversa de ella, también lineal, definida por las fórmulas del tipo de (4). Sea $M(x_1, x_2, x_3)$ un punto arbitrario de cierta recta definida en el plano α por la ecuación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \tag{7}$$

Luego, sea $M'(x_1', x_2', x_3')$ el punto que corresponde al punto M en el plano α'; las coordenadas de los puntos M y M' obedecen a las relaciones (4). Al multiplicar ambos miembros de la ecuación (7) por ρ y al sustituir $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$ de acuerdo a las fórmulas (4), obtendremos la relación

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0, \tag{8}$$

donde

$$u_1' = c_{11}'u_1 + c_{21}'u_2 + c_{31}'u_3,$$
$$u_2' = c_{12}'u_1 + c_{22}'u_2 + c_{32}'u_3,$$
$$u_3' = c_{13}'u_1 + c_{23}'u_2 + c_{33}'u_3.$$

De tal suerte, si M está sobre la recta definida por la ecuación (7) en el plano α, entonces M' se halla sobre la recta que se define en el plano α' por la ecuación (8). El teorema está demostrado.

Al comparar los teoremas 32 y 34 con la definición de la aplicación proyectiva de planos, obtenemos el teorema que sigue.

TEOREMA 35. *Toda aplicación lineal de los puntos del plano α en el plano α', cuyo determinante difiere de cero, es una aplicación proyectiva del plano α sobre el α'.*

Más abajo mostraremos que, también a la inversa, toda aplicación proyectiva es lineal. Antes de obtener este importante resultado, tendremos que demostrar un teorema auxiliar.

TEOREMA 36. *Si M_1, M_2, M_3, M_4 son cuatro puntos del plano α situados en él como quiera, observando sólo la condición de que entre ellos no hay tres que estén sobre una misma recta, y si M_1', M_2', M_3', M_4' son cuatro puntos del plano α' cuya localización obedece a una condición análoga, entonces existe una aplicación lineal del plano α sobre el α' con un determinante diferente de cero, que hace pasar los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a los puntos M_1', M_2', M_3', M_4', respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} las coordenadas de uno de los puntos dados $M_k (k = 1, 2, 3, 4)$ en algún sistema de coordenadas homogéneas sobre el plano α, y $x_{1k}', x_{2k}', x_{3k}'$, las coordenadas del punto $M_k' (k = 1, 2, 3, 4)$ en cierto sistema de coordenadas homogéneas sobre el plano α'. Tenemos que probar la posibilidad de elegir los parámetros de la aplicación lineal

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

de modo que el determinante suyo resulte diferente de cero, y que la referida aplicación haga pasar los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a los puntos M_1', M_2', M_3', M_4', respecti-

vamente. Por lo visto, para ello hay que establecer que a base de las relaciones

$$\left.\begin{aligned} \rho_k' x_{1k}' &= c_{11}x_{1k} + c_{12}x_{2k} + c_{13}x_{3k}, \\ \rho_k' x_{2k}' &= c_{21}x_{1k} + c_{22}x_{2k} + c_{23}x_{3k}, \\ \rho_k' x_{3k}' &= c_{31}x_{1k} + c_{32}x_{2k} + c_{33}x_{3k}, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

($k = 1, 2, 3, 4$) pueden hallarse los parámetros c_{ik} y las magnitudes ρ_k' (donde ρ_k' es el factor del primer miembro de (1), correspondiente a la elección indicada de las coordenadas homogéneas de los puntos M_k y M_k'), y pueden hallarse de forma que los parámetros c_{ik} satisfarán la condición de $\Delta \neq 0$.

En primer lugar, hagamos notar que ninguno de los determinantes del tercer orden de la matriz

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} \end{Vmatrix} \qquad (\beta)$$

es igual a cero. En efecto, si, por ejemplo, tuviera lugar la igualdad

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

entonces existirían las relaciones lineales

$$\begin{aligned} u_1x_{11} + u_2x_{21} + u_3x_{31} &= 0, \\ u_1x_{12} + u_2x_{22} + u_3x_{32} &= 0, \\ u_1x_{13} + u_2x_{23} + u_3x_{33} &= 0 \end{aligned}$$

y, de tal suerte, los puntos M_1, M_2, M_3 estarían sobre la recta $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$; y esto queda excluido por el enunciado del teorema. Asimismo son desiguales a cero todos los determinantes del tercer orden de la matriz compuesta por las coordenadas $x_{1k}', x_{2k}', x_{3k}'$ análogamente a la matriz (β).

Ahora, abordemos las relaciones (α). Haciendo $k = 1, 2, 3$, vamos a escribir tres igualdades proporcionadas por la primera de las relaciones (α):

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_{11} + c_{12}x_{21} + c_{13}x_{31} &= \rho_1' x_{11}', \\ c_{11}x_{12} + c_{12}x_{22} + c_{13}x_{32} &= \rho_2' x_{12}', \\ c_{11}x_{13} + c_{12}x_{23} + c_{13}x_{33} &= \rho_3' x_{13}'. \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Precisamente éste es el sistema de ecuaciones lineales con c_{11}, c_{12}, c_{13} desconocidos. El determinante del sistema (γ) (lo designaremos con D), según lo que precede, difiere de cero. Consiguientemente,

$$c_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \rho_1' x_{11}' & x_{21} & x_{31} \\ \rho_2' x_{12}' & x_{22} & x_{32} \\ \rho_3' x_{13}' & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad c_{12} = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & \rho_1' x_{11}' & x_{31} \\ x_{12} & \rho_2' x_{12}' & x_{32} \\ x_{13} & \rho_3' x_{13}' & x_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad c_{13} = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \rho_1' x_{11}' \\ x_{12} & x_{22} & \rho_2' x_{12}' \\ x_{13} & x_{23} & \rho_3' x_{13}' \end{vmatrix}}{D},$$

ó

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\rho_1' x_{11} X_{11} + \rho_2' x_{12}' X_{12} + \rho_3' x_{13}' X_{13}}{D}, \\ c_{12} &= \frac{\rho_1' x_{11} X_{21} + \rho_2' x_{12}' X_{22} + \rho_3' x_{13}' X_{23}}{D}, \\ c_{13} &= \frac{\rho_1' x_{11} X_{31} + \rho_2' x_{12}' X_{32} + \rho_3' x_{13}' X_{33}}{D}, \end{aligned}\right\} \qquad (\delta_1)$$

donde X_{ik} es el complemento algebraico del elemento x_{ik} del determinante D. De forma análoga, valiéndonos de la segunda y la tercera igualdades de (α), obtendremos:

$$\left.\begin{aligned} c_{21} &= \frac{\rho_1' x_{21}' X_{11} + \rho_2' x_{22}' X_{12} + \rho_3' x_{23}' X_{13}}{D}, \\ c_{22} &= \frac{\rho_1' x_{21}' X_{21} + \rho_2' x_{22}' X_{22} + \rho_3' x_{23}' X_{23}}{D}, \\ c_{23} &= \frac{\rho_1' x_{21} X_{31} + \rho_2' x_{22}' X_{32} + \rho_3' x_{23}' X_{33}}{D}, \end{aligned}\right\} \qquad (\delta_2)$$

$$\left.\begin{aligned} c_{31} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{11} + \rho_2' x_{32}' X_{12} + \rho_3' x_{33}' X_{13}}{D}, \\ c_{32} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{21} + \rho_2' x_{32}' X_{22} + \rho_3' x_{33}' X_{23}}{D}, \\ c_{33} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{31} + \rho_2' x_{32}' X_{32} + \rho_3' x_{33}' X_{33}}{D}. \end{aligned}\right\} \qquad (\delta_3)$$

Ahora, pongamos los segundos miembros de las igualdades (δ_1), (δ_2), (δ_3) en las ecuaciones (α) para $k = 4$, considerando por razones de sencillez $\rho_4' = 1$. Después de agrupar adecuadamente los términos, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_{11}' D_1}{D} \rho_1' + \frac{x_{12}' D_2}{D} \rho_2' + \frac{x_{13}' D_3}{D} \rho_3' &= x_{14}', \\ \frac{x_{21}' D_1}{D} \rho_1' + \frac{x_{22}' D_2}{D} \rho_2' + \frac{x_{23}' D_3}{D} \rho_3' &= x_{24}', \\ \frac{x_{31}' D_1}{D} \rho_1' + \frac{x_{32}' D_2}{D} \rho_2' + \frac{x_{33}' D_3}{D} \rho_3' &= x_{34}', \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= X_{11} x_{14} + X_{21} x_{24} + X_{31} x_{34}, \\ D_2 &= X_{12} x_{14} + X_{22} x_{24} + X_{32} x_{34}, \\ D_3 &= X_{13} x_{14} + X_{23} x_{24} + X_{33} x_{34}. \end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

De las expresiones D_1, D_2, D_3 se ve que estas magnitudes son los determinantes del tercer orden de la matriz (β). Consecuentemente, $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, D_3 \neq 0$. Adoptemos

$$D' = \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{vmatrix};$$

entonces el determinante A de la matriz (ε) se expresará en forma de

$$A = \frac{D' D_1 D_2 D_3}{D^3}.$$

De aquí $A \neq 0$, a causa de lo cual el sistema (ε) es definido. Al resolver este sistema, hallaremos:

$$\rho'_1 = \frac{D}{D' D_1} \begin{vmatrix} x'_{14} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{24} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{34} & x'_{32} & x'_{33} \end{vmatrix}, \qquad \rho'_2 = \frac{D}{D' D_2} \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{14} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{24} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{34} & x'_{33} \end{vmatrix},$$

$$\rho'_3 = \frac{D}{D' D_3} \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{14} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{24} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{34} \end{vmatrix}.$$

Como todos los determinantes, a través de los cuales se expresan $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$, difieren de cero (lo establecimos al comenzar la demostración), $\rho'_1 \neq 0, \rho'_2 \neq 0, \rho'_3 \neq 0$. Una vez hallados $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$, los parámetros c_{ik} se determinan unívocamente por las igualdades (δ).

Para los valores de c_{ik} hallados, la aplicación lineal (1) es la buscada, puesto que 1) hace pasar los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a los puntos M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 y 2) tiene un determinante diferente de cero; esto último se desprende inmediatamente del teorema 33. El teorema está demostrado.

Antes, en el § 106, demostramos el teorema 25, conforme al cual la aplicación proyectiva de un plano sobre otro se determina unívocamente al fijar cuatro pares de puntos correspondientes (sujetos a la restricción conocida sobre su posición). Los resultados precedentes permiten enunciar un teorema más terminante, a saber:

TEOREMA 37. *Cualesquiera que sean cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 del plano α, entre los cuales ningunos tres se hallan sobre una misma recta, y cualesquiera que sean cuatro puntos M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 del plano α', cuya posición satisface la misma condición, siempre existe una, y sólo una única aplicación proyectiva del plano α sobre el α', que hace pasar M_1, M_2, M_3, M_4 a M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, respectivamente.*

Este teorema se infiere inmediatamente de los teoremas 35 y 36.

De paso demostremos un teorema análogo para la aplicación proyectiva de rectas.

TEOREMA 37a. *Cualesquiera que sean tres puntos diferentes M_1, M_2, M_3 de la recta a, y cualesquiera que sean tres puntos diferentes M'_1, M'_2, M'_3 de la recta a', existe una, y sólo una única aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', que hace pasar los puntos M_1, M_2, M_3 a los M'_1, M'_2, M'_3.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que la unicidad de tal aplicación viene establecida por el teorema 15, ahora sólo hay que probar la existencia de dicha aplicación.

A través de la recta a, tracemos algún plano α y, a través de la recta a', un plano α'. En el plano α, elijamos una recta arbitraria u que pasa por M_3 (pero no coincide con la recta a), tomando sobre ella dos puntos P, Q cualesquiera; en el plano α', tomemos una recta arbitraria u' que pasa por M_3' (pero no coincide con la recta a'), y sobre ella, dos puntos P', Q' cualesquiera. Según el teorema 37, existe una aplicación proyectiva del plano α sobre el α', que hace pasar los puntos M_1, M_2, P, Q a los puntos M_1', M_2', P', Q'. Conforme al teorema 24, en esta aplicación la recta a se aplica proyectivamente sobre la a', y de un modo tal que el punto M_1 pasa al M_1', el punto M_2 al M_2' y M_3, al M_3'; esto último se debe a que el punto M_3 se halla en la intersección de las rectas a, u, y el punto M_3' está en la intersección de las rectas correspondientes a', u'. Así queda demostrado el teorema.

Más abajo, en el § 140, mostraremos cómo se puede realizar de hecho la aplicación proyectiva de la recta sobre la recta, determinada por tres pares de puntos correspondientes, sin recurrir a la aplicación de planos.

Ahora tenemos la posibilidad de establecer sin dificultades algunas uno de los más principales teoremas de la geometría proyectiva:

TEOREMA 38. *Toda aplicación proyectiva del plano sobre el plano es una aplicación lineal con el determinante diferente de cero.*

LA DEMOSTRACIÓN es bien corta. Efectivamente, sea $M' = f(M)$ alguna aplicación proyectiva del plano α sobre el α'. Sobre el plano α, elijamos cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 de forma que entre ellos no haya tres que estén sobre una misma recta. Sean M_1', M_2', M_3', M_4' sus puntos correspondientes en el plano α'. En virtud del teorema 23a, la posición de los puntos M_1', M_2', M_3', M_4' satisface la misma condición. Según el teorema 36, existe una aplicación lineal $M' = L(M)$ del plano α sobre el α' con un determinante diferente de cero, la cual hace pasar los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a los M_1', M_2', M_3', M_4'. De los teoremas 35 y 25 se desprende que las aplicaciones $M' = f(M)$ y $M' = L(M)$ no difieren una de otra. Así queda demostrado el teorema.

El teorema 38 resuelve el problema planteado al comienzo de la presente sección, referente a la representación analítica de las aplicaciones proyectivas:

Toda aplicación proyectiva se representa en coordenadas proyectivas por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \quad . \tag{1}$$

con el determinante diferente de cero

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 110. Todos los teoremas demostrados en el párrafo antecedente se generalizan naturalmente para el caso de tres dimensiones. Sin aducirlos, nos limitaremos a formular la proposición fundamental:

Cualquiera que sea la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ del espacio Π sobre el espacio Π', las coordenadas proyectivas x_1', x_2', x_3', x_4' del punto M' se expresan a través de las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 del punto M mediante las relaciones lineales

$$\begin{aligned}
\rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4,\\
\rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4,\\
\rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4,\\
\rho' x_4' &= c_{41}x_1 + c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4,
\end{aligned}$$

con los coeficientes constantes c_{ik}, siendo diferente de cero el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}.$$

§ 111. Ahora podemos hallar representaciones analíticas para las aplicaciones proyectivas de la recta sobre la recta.

Sean a y a' dos rectas proyectivas; luego, sea $M' = f(M)$ alguna aplicación proyectiva de la recta a sobre la a'. Introduzcamos sobre la recta a un sistema de coordenadas homogéneas proyectivas, determinándolo con tres puntos A_1, A_2 y E de forma que los puntos A_1 y A_2 tengan coordenadas $(0, 1)$ y $(1, 0)$, respectivamente, y el punto E tenga coordenadas $(1, 1)$ (véase el final del § 100). Análogamente, al fijar tres puntos A_1', A_2' y E', introduciremos coordenadas homogéneas proyectivas sobre la recta a'. Nuestro objeto consiste en establecer relaciones entre las coordenadas de los puntos M y $M' = f(M)$.

Demostremos que las coordenadas (x_1, x_2) del punto M y las coordenadas (x_1', x_2') del punto $M' = f(M)$ están enlazadas por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
\rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2,\\
\rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2,
\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

donde $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ son coeficientes constantes determinados por la aplicación, $\rho' \neq 0$, un factor arbitrario, siendo diferente de cero el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Para demostrarlo, tracemos a través de la recta a algún plano α y, a través de la recta a', algún plano α'. Después de esto, introduzcamos sobre el plano α un sistema de coordenadas proyectivas de manera que el punto A_1 tenga coordenadas $(0, 1, 0)$, el punto A_2, coordenadas $(1, 0, 0)$ y el punto E, coordenadas $(1, 1, 0)$. De tal modo, la recta a será determinada por la ecuación $x_3 = 0$, es decir, será una de las rectas del triedro de coordenadas; además, si M es un punto arbitrario de la recta a, y $(x_1, x_2, 0)$, sus coordenadas sobre el plano α, entonces los números x_1, x_2 coincidirán con las coordenadas homogéneas del punto M en el sistema de coordenadas introducido desde el principio sobre la recta a (para determinar el sistema de coorde-

nadas indicado sobre el plano α, hay que ubicar dos vértices del triedro de coordenadas en los puntos A_1 y A_2, escoger arbitrariamente el tercer vértice A_3, eligiendo por el punto de unidades algún punto de la recta A_3E; véase el § 101). Análogamente introduciremos coordenadas homogéneas proyectivas sobre el plano α'.

Después de esto, tomemos sobre la recta a tres puntos A, B, C cualesquiera y, sobre la recta a', sus puntos correspondientes A', B', C' debidos a la aplicación $M' = f(M)$. Además, sobre el plano α tomemos puntos D, G cualesquiera, así que D, G, C estén sobre una misma recta diferente de la recta a; sobre el plano α', elijamos análogamente los puntos D', G' de manera que D', G', C' se hallen sobre una misma recta diferente de a'. Conforme al teorema 37, existe una aplicación proyectiva $M' = F(M)$ del plano α sobre el α', que hace pasar los puntos A, B, D, G a los puntos A', B', D', G', respectivamente. Por lo visto, en este caso los puntos de la recta a se aplicarán en los puntos de la recta a'; según el teorema 24, la aplicación $M' = F(M)$ DE LA RECTA a SOBRE LA a' es proyectiva. No cuesta trabajo obtener fórmulas que expresan las coordenadas del punto $M' = F(M)$ sobre la recta a' a través de las del punto M sobre la recta a. Para ello, primero hemos de escribir las fórmulas que conocemos:

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (^{**})$$

Mediante las referidas fórmulas se expresan las coordenadas del punto $M' = F(M)$ a base de las del punto M, como quiera que esté situado el punto M sobre el plano α. Tomemos $x_3 = 0$. Entonces la última de las igualdades (**), para cualesquiera x_1, x_2, necesariamente debe dar $x_3' = 0$ (pues la recta a se aplica en la a'); por tanto, $c_{31} = c_{32} = 0$ y, de tal modo, para $x_3 = 0$, $x_3' = 0$, hallamos:

$$\rho' x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2.$$
$$\rho' x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2.$$

Precisamente ésta es la relación buscada entre las coordenadas de los puntos M y $M' = F(M)$ pertenecientes a las rectas a y a', es decir, la representación analítica de la aplicación $M' = F(M)$. Pero se ve fácilmente que la aplicación $M' = F(M)$ DE LA RECTA a SOBRE LA a' no difiere de la aplicación dada $M' = f(M)$. En rigor, a causa de la aplicacion $M' = F(M)$ el punto C de la recta a se aplica en el punto C' de la a'. Para establecerlo, consideremos la aplicación $M' = F(M)$ de todo el plano α sobre el plano α'; la misma hace pasar las rectas AB y DG a las rectas $A'B'$ y $D'G'$, haciendo pasar, por ende, el punto C definido por la intersección de las rectas AB, DG, al punto C' definido por la intersección de las rectas $A'B'$, $D'G'$. De tal modo, tanto en la aplicación $M' = F(M)$ como en la $M' = f(M)$ los puntos A, B, C de la recta a se hacen pasar a los puntos A', B', C' de la a'. A base del teorema 15 de aquí se sigue que la aplicación $M' = F(M)$ coincide con la $M' = f(M)$. Consiguientemente, las fórmulas (*) proporcionan la representación analítica de la aplicación proyectiva arbitrariamente definida $M' = f(M)$ de la recta a sobre la a'.

El hecho de que el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero, se infiere de la biyectividad de la aplicación proyectiva. En efecto, si $\Delta = 0$, entonces mediante las ecuaciones (*) es imposible determinar x_1, x_2 a base de x_1', x_2' arbitrariamente dados, es decir, la aplicación definida por las fórmulas (*) no es biyectiva en contra del enunciado.

Así queda demostrada por completo nuestra proposición.

Así pues, hemos resuelto plenamente el problema de hallar las representaciones analíticas de aplicaciones proyectivas. Podemos formular en breve los resultados obtenidos de la manera siguiente: *las aplicaciones proyectivas de variedades proyectivas siempre se representan en coordenadas proyectivas homogéneas por relaciones lineales.*

§ 112. En muchos casos resulta cómodo utilizar las representaciones analíticas de aplicaciones proyectivas en coordenadas no homogéneas. Las referidas aplicaciones se deducen inmediatamente de las fórmulas que expresan aplicaciones proyectivas en coordenadas homogéneas.

Recordemos que si x_1, x_2 son coordenadas proyectivas homogéneas de algún punto M de una recta, entonces el número $x = \frac{x_1}{x_2}$ es la coordenada proyectiva NO HOMOGÉNEA del mismo punto M (véase el § 100). Sea dada cierta aplicación proyectiva $M' = f(M)$ de la recta a sobre la recta a'. Entonces, según sabemos, entre las coordenadas homogéneas de los puntos M y M' existen las relaciones

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{aligned} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Dividiendo término a término la primera de estas ecuaciones por la segunda y poniendo $\frac{x_1}{x_2} = x$, $\frac{x_1'}{x_2'} = x'$, obtendremos la dependencia buscada entre las coordenadas no homogéneas x y x' de los puntos M y M':

$$x' = \frac{c_{11}x + c_{12}}{c_{21}x + c_{22}}. \tag{*}$$

Al introducir nuevas designaciones de los coeficientes: $c_{11} = \alpha$, $c_{12} = \beta$, $c_{21} = \gamma$, $c_{22} = \delta$, escribiremos dicha igualdad en forma de

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \tag{1}$$

De tal modo, si está dada una aplicación proyectiva de la recta a sobre la recta a', entonces las coordenadas proyectivas no homogéneas de los puntos de la recta a' se expresan a través de las coordenadas proyectivas no homogéneas de los puntos correspondientes de la recta a por medio de la función lineal fraccional con el determinante diferente de cero.

De una manera análoga pueden obtenerse las representaciones analíticas en coordenadas no homogéneas de las aplicaciones proyectivas del plano sobre el plano y del espacio sobre el espacio.

Así, siendo $M' = f(M)$ una aplicación proyectiva del plano α sobre el plano α', entre las coordenadas proyectivas homogéneas de los puntos M y M' se dan las relaciones (1) del § 109. Al dividir término a término la primera y la segunda de ellas por la tercera, al poner $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, $\frac{x_1'}{x_3'} = x'$, $\frac{x_2'}{x_3'} = y'$ y al cambiar las notaciones de los coeficientes, obtendremos las dependencias buscadas entre las coordenadas no homogéneas (x, y) y (x', y') de los puntos M y M' en forma de:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0\right) \tag{2}$$

Análogamente, si $M' = f(M)$ es una aplicación proyectiva del espacio Π sobre el espacio Π', entonces las coordenadas x', y', z' del punto M' se expresan a través de las coordenadas proyectivas x, y, z del punto M mediante las ecuaciones:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta} \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

§ 113. Al concluir la presente sección, nos detendremos en un importante caso particular de la aplicación proyectiva de las variedades unidimensionales.

Sea aplicada proyectivamente sobre sí misma cierta variedad unidimensional proyectiva Π (una recta, un haz lineal o un haz de planos), pasando su elemento arbitrario p al elemento $p' = f(p)$. Imaginémonos que la aplicación indicada se practica sucesivamente dos veces. Entonces el elemento p primero pasa al elemento $p' = f(p)$, luego, al $p'' = f(p')$. Como regla, el elemento p'' no coincidirá con el p.

Si el elemento $p'' = f(p')$, donde $p' = f(p)$, coincide con el elemento p, cualquiera que sea éste, entonces la aplicación $p' = f(p)$ se llama INVOLUTIVA *o, sencillamente,* INVOLUCIÓN.

Precisamente la involución es el caso particular de la aplicación proyectiva, que nos proponemos a investigar seguidamente.

El carácter involutivo de la aplicación $p' = f(p)$ puede expresarse:

1) ora por el hecho de que para cualquier p tiene lugar la relación $f(f(p)) = p$;

2) ora por el hecho de que para cualquier p, junto con la relación $p' = f(p)$, tiene lugar la relación $p = f(p')$, es decir, la aplicación inversa coincide con la dada.

Ambas características se deducen directamente de la definición de la involución (precisamente, de que $p'' = p$).

Supongamos que la variedad de una dimensión Π, entre cuyos elementos existe establecida la relación involutiva $p' = f(p)$, es un haz de rectas o un haz de planos. Tomemos alguna recta a, limitando su elección con una sola condición: si Π es un haz de rectas, entonces a se halla en su plano sin pasar por su centro, si Π es un haz de planos, entonces la referida recta no corta a su eje. Denotemos con M el punto de intersección de la recta a con el elemento p de la variedad Π y, con M', el punto de intersección de a con el elemento p'. Patentemente, la correspondencia $M' = F(M)$ entre los puntos de la recta a, por consecuencia de la cual al punto M le responde el punto M', es involutiva, lo mismo que la correspondencia dada $p' = f(p)$. También es patente que las propiedades de las correspondencias involutivas $p' = f(p)$ y $M' = F(M)$ son idénticas. Por eso es suficiente investigar la involución de las variedades de una dimensión para el caso cuando la variedad constituye una recta.

Sea $M' = F(M)$ alguna aplicación proyectiva de la recta a sobre sí misma. Introduzcamos sobre la recta a un sistema de coordenadas proyectivas (no homogéneas). Entonces, según sabemos, entre las coordenadas x y x' de los puntos M y $M' = F(M)$ tendrá lugar la relación

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \tag{*}$$

Ante todo, procuremos aclarar bajo qué condición para los coeficientes α, β, γ, δ la aplicación $M' = F(M)$ es involutiva. Para ello, al resolver la ecuación (*) respecto a x, hallemos la representación analítica de la aplicación inversa de la dada. Esta será:

$$x = \frac{-\delta x' + \beta}{\gamma x' - \alpha}. \tag{**}$$

Como fue notado más arriba, la aplicación involutiva se caracteriza por el que no se diferencia de su aplicación inversa. Al comparar (*) y (**), en seguida hallamos que las aplicaciones representadas por estas fórmulas coinciden bien en el caso de $\delta = -\alpha$, bien en el de $\delta = \alpha$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Cuando $\delta = \alpha$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, la aplicación es idéntica ($x' = x$). OMITAMOS LA INVESTIGACIÓN DE LA INVOLUCIÓN IDÉNTICA. Entonces la igualdad $\delta = -\alpha$ es la condición suficiente y necesaria para que la aplicación representada por la fórmula (*) sea involutiva.

De tal modo, las involuciones son aquellas aplicaciones proyectivas que se representan en forma de

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha} \quad (\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma \neq 0). \tag{***}$$

Ahora vamos a demostrar una serie de teoremas sencillos sobre las involuciones.

TEOREMA 39. *Sea dada una aplicación proyectiva $M' = F(M)$ de la recta a sobre sí misma. Si existe al menos un punto M_0 cuya imagen $M_0' = F(M_0)$ no coincide con él, pero que vuelve a la posición inicial al repetirse la aplicación, entonces todos los puntos retoman a la posición primitiva y, de tal modo, $M' = F(M)$ es una involución.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ una representación analítica de la aplicación $M' = F(M)$ en algún sistema de coordenadas proyectivas sobre la recta a, sean x_0 y x_0', las coordenadas de los puntos M_0 y M_0'. Según el enunciado,

$$x_0' = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta} \quad \text{y} \quad x_0 = \frac{\alpha x_0' + \beta}{\gamma x_0' + \delta} \quad (x_0 \neq x_0')$$

ó

$$\gamma x_0 x_0' + \delta x_0' - \alpha x_0 - \beta = 0,$$
$$\gamma x_0 x_0' + \delta x_0' - \alpha x_0' - \beta = 0.$$

Restando término a término la segunda igualdad de la primera, hallaremos:

$$\delta(x_0' - x_0) + \alpha(x_0' - x_0) = 0.$$

Como $x_0' - x_0 \neq 0$, de aquí se infiere que $\delta = -\alpha$, y el teorema queda demostrado.

TEOREMA 40. *Si en la aplicación involutiva de la recta proyectiva sobre sí misma existen puntos fijos, entonces su número es igual a dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ la representación analítica de alguna involución. Obviamente, las coordenadas de los puntos fijos (para los cuales $x' = x$) se determinan por la ecuación

$$x = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha},$$

$$\gamma x^2 - 2\alpha x - \beta = 0.$$

Si $\gamma \neq 0$, entonces esta ecuación es cuadrada, siendo diferente de cero su determinante $\alpha^2 + \beta\gamma = -\Delta$. De tal forma, la misma tiene ora dos raíces complejas, sin existir puntos fijos de la involución en este caso, ora dos raíces reales diferentes, existiendo dos puntos fijos en tal caso.

Si $\gamma = 0$, entonces, suponiendo $-\dfrac{\beta}{\alpha} = a$, representaremos la relación entre x y x' en forma de $x' = -x + a$. En este caso, por lo visto, la involución tiene dos puntos fijos: $x = \dfrac{a}{2}$ y $x = \infty$. El teorema está demostrado.

La involución que no deja fijo ningún punto de la recta, se llama *elíptica*. La involución elíptica se caracteriza por la condición de $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma > 0$.

La involución que deja fijos dos puntos, se llama *hiperbólica*. Para la involución hiperbólica $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma < 0$.

A veces la aplicación $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ se llama involución parabólica si $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma = 0$. Sin embargo, la transformación homográfica cuyo determi-

nante es igual a cero, según sabemos, no es biyectiva y, consiguientemente, no figura en la clase que convenimos en considerar*).

TEOREMA 41. *Si $M' = f(M)$ es una involución hiperbólica con los puntos fijos A y B, entonces el par de puntos M, M' separa armónicamente el par de puntos A, B.*

DEMOSTRACIÓN. Elijamos sobre la recta un sistema de coordenadas proyectivas no homogéneas de modo que A en este sistema tenga la coordenada $x = 0$, y el punto B, la coordenada (simbólica) $x = \infty$. Sea

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha} \qquad (*)$$

una representación analítica de la involución $M' = f(M)$ en el sistema de coordenadas elegido. Dado que el punto A es fijo, para $x = 0$, es necesario que $x' = 0$; de aquí $\beta = 0$. Por ser fijo el punto B, si $x \to \infty$, es necesario que $x' \to \infty$; de aquí $\gamma = 0$. Así la relación (*) toma la forma de

$$x' = -x.$$

Consecuentemente, $\dfrac{x + x'}{2} = 0$, es decir, el punto A es el centro proyectivo del segmento xx', y esto quiere decir que el par M, M' separa armónicamente el par A, B (véanse el § 97, la propiedad 4 de las coordenadas proyectivas, y el § 95 donde está definido el centro proyectivo). El teorema está demostrado.

El teorema puede formularse también del modo siguiente:

La involución hiperbólica $M' = f(M)$ con los puntos fijos A y B constituye una aplicación armónica de los segmentos recíprocamente complementarios con los extremos comunes A, B, uno sobre otro (véase el § 93, en particular, la nota al final de párrafo).

TEOREMA 42. *La involución se determina unívocamente al fijar dos pares diferentes de puntos correspondientes.*

Para demostrarlo, es suficiente notar que la involución $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ se determina al fijar numéricamente sus coeficientes, entre los cuales hay tres independientes. Mas, debido a que la función lineal fraccional no se altera por la variación proporcional de los coeficientes, para determinar la involución, hay que determinar sólo dos relaciones $\alpha : \beta : \gamma$, para lo cual bastan dos condiciones. Estas consisten en definir dos pares de puntos correspondientes. Si las coordenadas de los puntos definidos son x_1, x_1' y x_2, x_2', entonces las relaciones de los parámetros de la involución para la cual dichos puntos son correspondientes, pueden hallarse a partir de las

---

*) El hecho de que la transformación $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ para $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$, no es biyectiva, además de las consideraciones generales enunciadas, puede establecerse fácilmente también del modo que sigue: si $\Delta = 0$, entonces $\alpha : \gamma = \beta : \delta = q$; en tal caso $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \dfrac{q(\gamma x + \delta)}{\gamma x + \delta} = q$, por consiguiente, a cualquier punto le responde un mismo punto con la coordenada $x' = q$.

ecuaciones

$$x_1' = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 - \alpha}, \qquad x_2' = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 - \alpha},$$

ó

$$\gamma x_1 x_1' - \alpha(x_1 + x_1') - \beta = 0,$$
$$\gamma x_2 x_2' - \alpha(x_2 + x_2') - \beta = 0.$$

Efectivamente, de aquí

$$\alpha : \beta : \gamma = \begin{vmatrix} x_1x_1' & 1 \\ x_2x_2' & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 + x_1' & x_1x_1' \\ x_2 + x_2' & x_2x_2' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 + x_1' & 1 \\ x_2 + x_2' & 1 \end{vmatrix}.$$

Las relaciones $\alpha : \beta : \gamma$ serán indefinidas sólo en el caso de anularse todos los determinantes presentes en el segundo miembro de la igualdad antecedente. Pero entonces $x_1 + x_1' = x_2 + x_2'$ y $x_1x_1' = x_2x_2'$, por tanto, bien $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2'$, bien $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$. Sin embargo, las dos posibilidades están excluidas por lo que enuncia el teorema.

De tal modo, cualesquiera que sean dos pares diferentes de puntos M_1, M_1' y M_2, M_2', siempre existe una involución, y además la única, que hace pasar M_1 a M_1' y M_2 a M_2'. El teorema está demostrado.

Hagamos constar que según el teorema 15 la aplicación proyectiva arbitraria se determina fijando tres pares de puntos correspondientes; mientras que la involución, según vemos, requiere para su determinación dos pares de puntos preestablecidos. Por lo visto, esta circunstancia se debe a que el número de parámetros de la aplicación proyectiva general es mayor en uno que el de parámetros de la involución.

Al concluir, observemos lo siguiente.

Los teoremas recién demostrados están formulados para la involución sobre la recta. Si en las formulaciones de los referidos teoremas en todo lugar sustituimos los términos «punto de la recta» por «elemento de la variedad de una dimensión», entonces resultarán teoremas sobre las involuciones de cualesquiera variedades de una dimensión.

10. Fórmulas de transformación de las coordenadas proyectivas. Relación compleja de cuatro elementos

§ 114. Sean introducidos sobre la recta proyectiva a dos sistemas diferentes de coordenadas homogéneas proyectivas. Llamaremos convencionalmente primero a uno de ellos y segundo, al otro. El punto arbitrario M de la recta tiene coordenadas (x_1, x_2) en el primer sistema y (x_1', x_2'), en el segundo. Nos planteamos la tarea de deducir las fórmulas que permitan expresar las coordenadas (x_1', x_2') mediante las (x_1, x_2). Es importante que el lector comprenda que este problema, en esencia, ya se ha resuelto en la sección precedente.

En rigor, en el § 111 se estableció la dependencia entre las coordenadas de los puntos correspondientes unos a otros al aplicarse la recta sobre la recta. Considere-

mos la aplicación idéntica de la recta a sobre sí misma, es decir, una aplicación tal que deja fijo todo punto de la recta a. La aplicación idéntica, obviamente, es proyectiva. Por ende, las coordenadas (x_1, x_2) del punto M en el primer sistema y las coordenadas (x_1', x_2') de su imagen, es decir, del mismo punto M en el segundo sistema, deben estar sujetas a las mismas ecuaciones que las obtenidas en el § 111; a saber:

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2, \end{aligned} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right). \qquad (*)$$

Precisamente éstas son las fórmulas buscadas. Los valores numéricos de los parámetros c pueden hallarse en cada caso concreto de transformación de las coordenadas con arreglo a las condiciones que determinan dicha transformación.

Si dividimos término a término la primera de las igualdades (*) por la segunda y cambiamos las notaciones, suponiendo $c_{11} = \alpha, c_{12} = \beta, c_{21} = \gamma, c_{22} = \delta$, entonces obtendremos la fórmula de transformación de las coordenadas proyectivas no homogéneas (sobre la recta):

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \qquad (**)$$

Mediante razonamientos análogos a los recién expuestos en cuanto a la recta, se puede establecer que las fórmulas conocidas, que expresan la dependencia entre las coordenadas proyectivas de los puntos correspondientes unos a otros en la aplicación proyectiva del plano sobre el plano o del espacio sobre el espacio, a la vez son fórmulas para transformar las coordenadas proyectivas sobre el plano o en el espacio.

Es natural que cuando las referidas fórmulas determinan la transformación de coordenadas (homogéneas), las magnitudes presentes en ellas x_i y x_i' ($i = 1, 2, 3$ para el plano e $i = 1, 2, 3, 4$ para el espacio) constituyen diversas coordenadas de un mismo punto.

§ 115. Al establecer las fórmulas de transformación de las coordenadas proyectivas, hemos resuelto así un problema que reviste una importancia de principio. Sólo ahora tenemos la posibilidad práctica de aclarar la cuestión sobre la invariación de las funciones de coordenadas de puntos o la invariación de las relaciones entre las coordenadas de puntos en la geometría proyectiva.

En particular, ahora podemos definir el concepto de *relación compleja de cuatro elementos* de la variedad unidimensional, bien importante en la geometría proyectiva. Primero definamos la relación compleja de cuatro puntos de la recta.

Sean M_1, M_2, M_3, M_4 cuatro puntos de cierta recta proyectiva a. Sobre esta, introduzcamos algún sistema de coordenadas proyectivas (desde el punto de vista del cálculo, ahora es más cómodo usar las coordenadas no homogéneas), designando con t_1, t_2, t_3, t_4 las coordenadas de los puntos indicados. Demostraremos que *la magnitud*

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}$$

no está sujeta a la elección del sistema de coordenadas. Para probarlo, junto con el sistema ya introducido, consideremos un nuevo sistema de coordenadas proyecti-

vas. Si denotamos con t la coordenada de un punto arbitrario de la recta a en el sistema primitivo y con t', la coordenada del mismo punto en el nuevo sistema, entonces

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes determinadas por la elección de los sistemas de coordenadas. En particular, para las nuevas coordenadas t_1', t_2', t_3' de los puntos M_1, M_2, M_3 tienen lugar las igualdades:

$$t_1' = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}, \quad t_2' = \frac{\alpha t_2 + \beta}{\gamma t_2 + \delta}, \quad t_3' = \frac{\alpha t_3 + \beta}{\gamma t_3 + \delta}.$$

De aquí

$$t_3' - t_1' = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(t_3 - t_1)}{(\gamma t_1 + \delta)(\gamma t_3 + \delta)},$$

$$t_2' - t_3' = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(t_2 - t_3)}{(\gamma t_2 + \delta)(\gamma t_3 + \delta)},$$

y

$$\frac{t_3' - t_1'}{t_2' - t_3'} = \frac{\gamma t_2 + \delta}{\gamma t_1 + \delta} \cdot \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}.$$

Análogamente

$$\frac{t_4' - t_1'}{t_2' - t_4'} = \frac{\gamma t_2 + \delta}{\gamma t_1 + \delta} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{t_3' - t_1'}{t_2' - t_3'} : \frac{t_4' - t_1'}{t_2' - t_4'} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4},$$

lo que había que demostrar.

La magnitud

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4} \qquad (*)$$

se llama RELACIÓN COMPLEJA DE CUATRO PUNTOS M_1, M_2, M_3, M_4.

De lo recién considerado se infiere que la relación compleja viene determinada exclusivamente por la posición de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4; se requiere un sistema de coordenadas sólo para hallar de hecho su valor numérico, es decir, para fines puramente auxiliares.

La fórmula (*) revela inmediatamente las siguientes propiedades de la relación compleja:

1) $$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (M_3 M_4 M_1 M_2),$$

es decir, en la relación compleja, sin alterar su valor, se puede permutar el primero y el segundo pares de puntos.

2) $$(M_1 M_2 M_4 M_3) = \frac{1}{(M_1 M_2 M_3 M_4)},$$

es decir, al permutar los puntos dentro de algún par, el valor de la relación compleja cambia por el inverso.

§ 116. Demostremos otra serie de teoremas importantes sobre la relación compleja de cuatro puntos.

TEOREMA 43. *En cualquier aplicación proyectiva de la recta a sobre la recta a', la relación compleja de un grupo arbitrario de puntos M_1, M_2, M_3, M_4 de la recta a es igual a la relación compleja de sus puntos correspondientes M_1', M_2', M_3', M_4' de la recta a'.*

Para demostrarlo, introduzcamos sobre las rectas a y a' sistemas de coordenadas; si t_i son las coordenadas de los puntos M_i, y t_i', las de los M_i', entonces

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}$$

y

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = \frac{t_3' - t_1'}{t_2' - t_3'} : \frac{t_4' - t_1'}{t_2' - t_4'} .$$

Conforme al § 112, entre las coordenadas t y t' de los puntos proyectivamente correspondientes de las rectas a y a' existe la dependencia $t' = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$; pero mediante esta dependencia la igualdad $(M_1'M_2'M_3'M_4') = (M_1M_2M_3M_4)$ puede establecerse por los mismos cálculos que los aducidos en el párrafo precedente.

Un caso particular del teorema 43 es el siguiente

TEOREMA 44. *Si a y a' son dos rectas del plano α, y S, un punto arbitrario del plano α, que no pertenece a ninguna de las rectas a y a', entonces la relación compleja de cualquier cuaterna de puntos M_1, M_2, M_3, M_4 de la recta a es igual a la de sus proyecciones M_1', M_2', M_3', M_4' desde el centro S sobre la recta a'.*

El hecho de que este teorema es un caso particular del precedente, se debe a que la proyección central constituye un caso particular de la aplicación proyectiva (véase el § 103). El teorema 44 puede enunciarse también así:

Cuatro rayos m_1, m_2, m_3, m_4 del haz plano al cortar cualquier recta que se halla en el plano del haz, determinan cuatro puntos, el valor de cuya relación compleja es un mismo para todas las rectas.

Esta magnitud se llama *relación compleja de los rayos m_1, m_2, m_3, m_4*; para designarla, se usa el símbolo $(m_1m_2m_3m_4)$.

Del mismo modo puede definirse la relación compleja de cuatro elementos del haz de planos, a saber: si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son cuatro planos que pasan por una misma recta, entonces en su intersección con cualquier recta del espacio los mismos determinan cuatro puntos, el valor de cuya relación compleja es un mismo para todas las rectas. Esta magnitud se llama *relación compleja de cuatro planos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$* y se denota con el símbolo $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$.

El teorema que se aduce a continuación, para las aplicaciones proyectivas de los haces (de rayos o de planos) juega el mismo papel que el teorema 43 para las aplicaciones proyectivas de rectas.

TEOREMA 45. *En cualquier aplicación proyectiva del haz sobre el haz la relación compleja de un grupo arbitrario de cuatro elementos del haz es igual a la de sus elementos correspondientes dentro del otro haz.*

DEMOSTRACIÓN. Sea x un elemento arbitrario del primer haz, y $x' = f(x)$, el elemento que le corresponde según la aplicación en el segundo haz. Cortemos los elementos del primer haz por una recta cualquiera a, los del segundo, por una recta a', designando con M el punto de intersección de la recta a con el elemento x, con M', el punto de intersección de la recta a' con el elemento x'. Consideremos la aplicación de la recta a sobre la a', debido a la cual al punto M le corresponde el $M' = F(M)$. La aplicación $M' = F(M)$, lo mismo que la $x' = f(x)$ dada, será proyectiva. Por eso, si M_1, M_2, M_3, M_4 son puntos de intersección de la recta a con los elementos arbitrariamente elegidos x_1, x_2, x_3, x_4 del primer haz, M_1', M_2', M_3', M_4' son puntos de intersección de la recta a' con los elementos correspondientes x_1', x_2', x_3', x_4' del segundo haz, entonces

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = (M_1M_2M_3M_4)$$

(véase el teorema 43); luego, conforme a la definición de la relación compleja de cuatro elementos del haz, tenemos:

$$(x_1x_2x_3x_4) = (M_1M_2M_3M_4),$$
$$(x_1'x_2'x_3'x_4') = (M_1'M_2'M_3'M_4').$$

Consecuentemente,

$$(x_1'x_2'x_3'x_4') = (x_1x_2x_3x_4),$$

lo que había que demostrar.

Se establece fácilmente también el teorema siguiente que abarca los teoremas 43 y 45.

TEOREMA 46. *En cualquier aplicación proyectiva de una variedad unidimensional sobre otra la relación compleja de un grupo arbitrario de cuatro elementos de la primera variedad es igual a la de sus elementos correspondientes en la segunda.*

En esta formulación están previstos los casos de aplicación de la recta sobre el haz de rayos, de la recta sobre el haz de planos y del haz de rayos sobre el haz de planos.

De los teoremas 46 y 24 se infiere el

TEOREMA 47. *Si el plano α está aplicado proyectivamente sobre el plano α', entonces la relación compleja de cualquier grupo de cuatro elementos pertenecientes a una misma variedad unidimensional del plano α, es igual a la de cuatro elementos correspondientes del plano α'.*

De los teoremas 46 y 28 se deduce un teorema igual referente a las aplicaciones proyectivas del espacio sobre el espacio.

En breve los resultados obtenidos también pueden expresarse así:

La relación compleja es un invariante de las aplicaciones proyectivas.

§ 117. Sean dados cuatro puntos A, B, C, D sobre alguna recta a, y cuatro puntos A', B', C', D' sobre la misma recta o una otra recta a'. Preguntemos: ¿bajo qué condición existe una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a' que haga pasar los puntos A, B, C, D a los puntos A', B', C', D'?

Del teorema 43 se sigue que la condición necesaria para ello es la igualdad de las relaciones complejas del grupo de puntos A, B, C, D y del grupo de puntos A', B', C', D'. Es fácil comprender que la condición señalada es también suficiente.

En efecto, supongamos que $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Denotemos con $M' = f(M)$ la aplicación proyectiva de la recta a sobre la a' que hace pasar los puntos A, B, C, a los A', B', C'. Su existencia viene asegurada por el teorema 37a. Sea $f(D) = D^*$. Según el teorema 43, $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Consiguientemente, $(A'B'C'D^*) = (A'B'C'D')$. De aquí y de la definición de la relación compleja se desprende de inmediato que el punto D^* coincide con el D'. De tal manera, en rigor, bajo la condición de $(ABCD) = (A'B'C'D')$ existe una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', a saber, la aplicación $M' = f(M)$ que hace pasar los puntos A, B, C, D a los A', B', C', D'.

Con arreglo a la definición enunciada antes, el grupo de puntos $M_1, M_2, \dots, M_n$ de la recta a se considera proyectivamente equivalente al sistema de puntos M_1', M_2', ... ,M_n' de la recta a' si existe una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', que haga pasar los puntos $M_1, M_2, \dots, M_n$ a los $M_1', M_2', \dots, M_n'$, respectivamente.

Razonando de un modo análogo al anterior, es fácil establecer la proposición: *Para que el sistema de puntos $M_1, M_2, \dots, M_n$ de la recta a equivalga proyectivamente al sistema de puntos $M_1', M_2', \dots, M_n'$ de la recta a', es necesario y suficiente que la relación compleja de cualquier grupo de cuatro puntos M_p, M_q, M_r, M_s del primer sistema sea igual a la de la cuaterna correspondiente de puntos M_p', M_q', M_r', M_s' del segundo.*

La relación compleja que permite caracterizar la equivalencia proyectiva, es *el invariante básico* de la geometría proyectiva, lo mismo que la distancia entre puntos que caracteriza la congruencia, es el invariante básico en la geometría elemental.

§ 118. Si sobre una recta proyectiva un par de puntos A, B separa armónicamente al par C, D, entonces $(ABCD) = -1$.

Demostrémoslo. Primero, hagamos notar que la relación compleja de cuatro puntos diferentes nunca puede ser igual a $+1$. Efectivamente, si

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} = 1,$$

entonces $\dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \dfrac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}$ y para $x_1 \neq x_2$, es necesario que $x_3 = x_4$, en contra del enunciado.

Luego, según la definición del grupo armónico de puntos, si el par A, B separa armónicamente al C, D, entonces existe un cuadrivértice completo $PQRS$ situado respecto a los puntos A, B, C, D así como lo muestra la fig. 116. Proyectemos los puntos A, B, C, D desde el centro S sobre la recta PQ. En virtud de la invariación de la relación compleja en la proyección (véase el teorema 44), obtendremos $(ABCD) = (PQED)$. Volvamos a proyectar los puntos A, B, C, D sobre la recta PQ, mas, esta vez desde el centro R. Entonces $(ABCD) = (QPED)$. Pero, conforme al § 115,

$$(QPED) = \frac{1}{(PQED)}.$$

De tal forma, $(ABCD) = (PQED)$ y $(ABCD) = \dfrac{1}{(PQED)}$, de donde $(ABCD)^2 = 1$ y $(ABCD) = \pm 1$. Dado que, según lo demostrado más arriba, la relación compleja

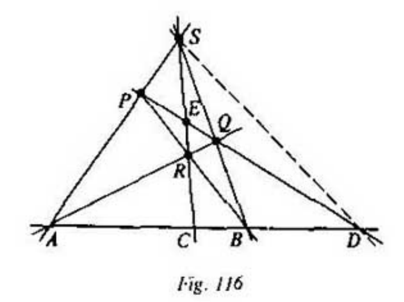


Fig. 116

de puntos diferentes no puede ser igual a + 1, entonces

$$(ABCD) = -1,$$

quedando probado lo que se requería.

De aquí y de la definición de la relación compleja de cuatro puntos del haz se desprende en seguida el teorema general que sigue.

TEOREMA 48. *Si el par de elementos x, y de una variedad unidimensional separa armónicamente al par de sus elementos z, t, entonces* $(xyzt) = -1$.

§ 119. Ahora vamos a deducir algunas nuevas fórmulas que expresan la relación compleja en coordenadas proyectivas.

Sobre un plano, sea dado un sistema de coordenadas no homogéneas proyectivas con el origen en el punto O y con los puntos infinitamente alejados de los ejes ∞_x e ∞_y (véase el § 98). Consideremos cuatro puntos cualesquiera M_1, M_2, M_3, M_4 del plano situados sobre una misma recta, planteándonos el objeto de expresar la relación compleja $(M_1M_2M_3M_4)$ a través de las coordenadas (x^1, y^1) (x^2, y^2), (x^3, y^3), (x^4, y^4) de los puntos en cuestión.

Para ello, proyectemos los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 desde el punto ∞_y sobre el eje x; sean M_1', M_2', M_3', M_4' las proyecciones resultantes. Éstas tienen coordenadas $(x^1, 0)$, $(x^2, 0)$, $(x^3, 0)$, $(x^4, 0)$; su relación compleja puede apuntarse en forma de

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = \frac{x^3 - x^1}{x^2 - x^3} : \frac{x^4 - x^1}{x^2 - x^4}.$$

Si denotamos con $M_1''M_2''M_3''M_4''$ las proyecciones de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 desde ∞_x sobre el eje y, entonces, análogamente a lo que precede,

$$(M_1''M_2''M_3''M_4'') = \frac{y^3 - y^1}{y^2 - y^3} : \frac{y^4 - y^1}{y^2 - y^4}.$$

Según el teorema 44,

$$(M_1M_2M_3M_4) = (M_1'M_2'M_3'M_4'),$$
$$(M_1M_2M_3M_4) = (M_1''M_2''M_3''M_4''),$$

por tanto, para expresar la magnitud $(M_1M_2M_3M_4)$, vale cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{x^3 - x^1}{x^2 - x^3} : \frac{x^4 - x^1}{x^2 - x^4}\,; \\ (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{y^3 - y^1}{y^2 - y^3} : \frac{y^4 - y^1}{y^2 - y^4}\,. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Para expresar la relación compleja $(M_1M_2M_3M_4)$ en coordenadas homogéneas, en las fórmulas obtenidas hay que sustituir las coordenadas no homogéneas x^i, y^i de cada punto $M_i (i = 1, 2, 3, 4)$ por las relaciones de coordenadas homogéneas $\frac{x_1^i}{x_3^i}$, $\frac{x_2^i}{x_3^i}$ del referido punto; al proceder así hallaremos las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^1 \\ x_3^3 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^1 \\ x_3^4 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^4 \\ x_3^2 & x_3^4 \end{vmatrix}}, \\ (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{\begin{vmatrix} x_2^3 & x_2^1 \\ x_3^3 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_2^4 & x_2^1 \\ x_3^4 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^2 & x_2^4 \\ x_3^2 & x_3^4 \end{vmatrix}}, \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

(en estas fórmulas el índice superior corresponde al número del punto, y el subíndice, al de la coordenada).

En el espacio, la relación compleja de cuatro puntos de una recta se expresa en coordenadas proyectivas con las mismas fórmulas, sólo que su número es mayor en una.

Hagamos constar un modo especial de apuntar la relación compleja, que se infiere de las fórmulas (B).

Sean P y Q dos puntos diferentes de un plano, cuyas coordenadas homogéneas están designadas con p_i y $q_i (i = 1, 2, 3)$. Es fácil mostrar que todo punto T con las coordenadas homogéneas

$$t_i = p_i + tq_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

está sobre la recta PQ. En efecto, si

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \Sigma u_ix_i = 0$$

es la ecuación de la recta PQ, entonces $\Sigma u_ip_i = 0$ y $\Sigma u_iq_i = 0$; pero en este caso también

$$\Sigma u_it_i = \Sigma u_i(p_i + tq_i) = \Sigma u_ip_i + t\Sigma u_iq_i = 0,$$

es decir, las coordenadas del punto T satisfacen la ecuación de la recta PQ.

Demos dos valores arbitrarios $t = \lambda$ y $t = \mu$ al parámetro t, expresando según las fórmulas (B) las relaciones complejas de los cuatro puntos P, Q, L, M con coor-

denadas homogéneas p_i, q_i, $p_i + \lambda q_i$, $p_i + \mu q_i$; al aplicar, por ejemplo, la primera de las fórmulas (B), obtendremos:

$$(PQLM) = \frac{\begin{vmatrix} p_1 + \lambda q_1 & p_1 \\ p_3 + \lambda q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & \overline{p}_1 + \lambda q_1 \\ q_3 & p_3 + \lambda q_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} p_1 + \mu q_1 & p_1 \\ p_3 + \mu q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & \overline{p}_1 + \mu q_1 \\ q_3 & p_3 + \mu q_3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\lambda \begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}} : \frac{\mu \begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Aquí ha de hacerse la reserva de que el resultado de estos cálculos será definido sólo a condición de $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Si $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$, entonces habrá que usar la segunda fórmula de (B). El resultado de los cálculos será definido y coincidirá con el precedente si $\begin{vmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Ambos determinantes $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}$ no pueden ser iguales a cero, pues en este caso $p_1 : p_2 : p_3 = q_1 : q_2 : q_3$, lo cual es imposible, por cuanto los puntos P, Q con diferentes según el enunciado. Así pues,

$$(PQLM) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{C}$$

Tal forma de apuntar la relación compleja es simple y cómoda en el uso; obviamente, se puede aplicarla también cuando las coordenadas de los puntos P, Q, L, M están dadas en el sistema espacial.

Al concluir la sección, vamos a deducir una fórmula que expresa la relación compleja de cuatro rayos del haz.

Sea dado un haz con el centro $S(x_0, y_0)$; en el sistema de coordenadas no homogéneas la ecuación de su rayo cualquiera puede tomar el siguiente aspecto:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{*}$$

Denotemos con m_1, m_2, m_3, m_4 cuatro rayos del haz dado, con k_1, k_2, k_3, k_4, sus valores correspondientes del parámetro k en la ecuación (*) y con $M_1(x_1, 0)$, $M_2(x_2, 0)$, $M_3(x_3, 0)$, $M_4(x_4, 0)$, los puntos de intersección de los rayos m_1, m_2, m_3, m_4 con el eje x. Según la definición de la relación compleja de cuatro puntos,

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4};$$

conforme a la definición de la relación compleja de cuatro rayos del haz, $(m_1m_2m_3m_4) = (M_1M_2M_3M_4)$. Por consiguiente,

$$(m_1m_2m_3m_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}.$$

De la ecuación (*) para $y = 0$ hallamos

$$x_i = x_0 - \frac{y_0}{k_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

En la expresión antecedente, al sustituir para $(m_1m_2m_3m_4)$ las magnitudes x_1, x_2, x_3, x_4 por los segundos miembros de las referidas igualdades, después de realizar transformaciones evidentes, obtendremos la fórmula que sigue:

$$(m_1m_2m_3m_4) = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} : \frac{k_4 - k_1}{k_2 - k_4}. \tag{D}$$

Ésta expresa la relación compleja de cuatro rayos a través de los parámetros que los determinan.

De la fórmula (D) se obtiene fácilmente la representación analítica de la aplicación proyectiva del haz sobre el haz, es decir, se halla la forma de la función $k' = f(k)$, donde k y k' son los parámetros que determinan los rayos de dos haces proyectivamente correspondientes unos a otros.

Efectivamente, si k_1, k_2, k_3 son los parámetros de algunos tres rayos del primer haz y k_1', k_2', k_3', los de los rayos correspondientes del segundo, entonces

$$\frac{k_3' - k_1'}{k_2' - k_3'} : \frac{k' - k_1'}{k_2' - k'} = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} : \frac{k - k_1}{k_2 - k},$$

ya que, según el teorema 45, la relación compleja es un invariante de la aplicación proyectiva de los haces; al expresar k' a base de esta relación, hallaremos

$$k' = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta}, \tag{E}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes (que dependen de $k_1, k_2, k_3, k_1', k_2', k_3'$).

De tal manera, la aplicación proyectiva del haz sobre el haz se representa analíticamente por una función lineal fraccional. Su determinante $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ difiere de cero, pues en el caso contrario, la aplicación determinada por la fórmula (E) no será biyectiva.

11. Principio de dualidad

§ 120. PRINCIPIO DE DUALIDAD SOBRE EL PLANO PROYECTIVO. En esta sección formularemos y demostraremos una de las notables tesis de la geometría proyectiva conocida por el nombre de *principio de dualidad.* Primero nos limitaremos al caso de dos dimensiones, exponiendo la esencia del principio de dualidad en la geometría proyectiva sobre el plano.

En la geometría proyectiva de dos dimensiones se consideran objetos de dos clases: puntos y rectas. Las propiedades de sus relaciones recíprocas vienen definidas por los axiomas proyectivos de los grupos I, II, III, entre los cuales sólo los axiomas I,1 — I,3, I,9, II,1 — II,6 y III son axiomas de la geometría bidimensional, los demás axiomas (es decir, los axiomas I,4 — I,8) tienen un carácter espacial. Mas, se-

gún muestra la exposición precedente, para tener la posibilidad de demostrar teoremas de la geometría proyectiva bidimensional sin usar construcciones en el espacio de tres dimensiones, a los axiomas I,1 — I,3, I,9, II,1 — II,6 y III ha de agregarse también la proposición de Desargues. Llamaremos *axiomas proyectivos bidimensionales* a los axiomas enumerados junto con la proposición de Desargues. El análisis de los fundamentos de la geometría proyectiva revela que a todo axioma proyectivo bidimensional puede ponerse en correspondencia cierta proposición de modo que las dos proposiciones que se corresponden, una vez formuladas adecuadamente, pasan una a otra al sustituir el término «punto» por «recta» y el término «recta» por «punto». Esta circunstancia que contiene, en esencia, el principio de dualidad sobre el plano (lo enunciaremos exactamente más abajo), la tendrá clara el lector después de que realicemos de hecho la correspondencia señalada.

Empecemos por los axiomas del primer grupo. Éstos definen las relaciones de pertenencia mutua de puntos y de rectas, expresadas usualmente por los términos: «el punto se halla sobre la recta» o «la recta pasa por el punto». Ahora, en lugar de estos giros, será más cómodo valernos de otros, a saber: «el punto pertenece a la recta» o «la recta pertenece al punto». Observando esta condición, vamos a modificar correspondientemente la expresión verbal de los axiomas I,1 — I,3, I,9, apuntándolos del lado izquierdo de la página; a la derecha, frente a cada axioma citaremos su proposición correspondiente en el sentido explicado más arriba.

En adelante llamaremos recíprocamente *duales* dos proposiciones de tal género.

I,1. Cualesquiera que sean dos puntos A y B, existe una recta a perteneciente al punto A y al B.

Cualesquiera que sean dos rectas a y b, existe un punto A perteneciente a la recta a y a la b. (Esta proposición no es sino el axioma I,9)

I,2. Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A y B, existe no más de una recta perteneciente al punto A y al B.

Cualesquiera que sean dos rectas diferentes a y b, existe no más de un punto perteneciente a la recta a y a la b. (Esta proposición se infiere directamente del axioma I,2).

I,3. A cada recta le pertenecen no menos de tres puntos. Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.

A cada punto pertenecen no menos de tres rectas. Existen no menos de tres rectas que no pertenecen a un mismo punto. (La demostración de esta afirmación se lleva a cabo fácilmente aplicando los axiomas I,1 — I,3).

I,9. Cada dos rectas tienen un punto común.

Cada dos puntos tienen una recta común. (Esta proposición no es sino el axioma I,1).

PROPOSICIÓN DE DESARGUES. Supongamos que no pertenecen a una misma recta tres puntos A, B, C, y tampoco pertenecen a una misma recta tres puntos A', B', C'; luego, tengan un punto común P la recta perteneciente a los puntos A, B, y la recta perteneciente a

Supongamos que no pertenecen a un mismo punto tres rectas a, b, c, y tampoco pertenecen a un mismo punto tres rectas a', b', c'; luego, tengan una recta común p el punto perteneciente a las rectas a, b, y el punto perteneciente a las a', b'; tengan una recta común q el

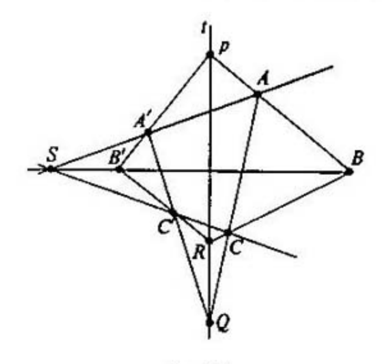


Fig. 117

Fig. 118

los A', B'; tengan un punto común Q la recta perteneciente a los puntos B, C, y la recta perteneciente a los B', C', y tengan un punto común R la recta perteneciente a los puntos A, C y la recta perteneciente a los A', C'. De suerte que si los puntos P, Q, R pertenecen a una misma recta t, entonces las tres rectas entre las cuales una pertenece a los puntos A, A', otra, a los B, B' y otra, a los C, C', poseen un punto común S (fig. 117).

punto perteneciente a las rectas b, c, y el punto perteneciente a las b', c', y tengan una recta común r el punto perteneciente a las rectas a, c, y el punto perteneciente a las a', c'. De suerte que si las rectas p, q, r pertenecen a un mismo punto T, entonces los tres puntos entre los cuales uno pertenece a las rectas a, a', otro, a las b, b' y el tercero, a las c, c', poseen una recta común s (fig. 118). (Esta proposición no es sino el teorema 2 recíproco del de Desargues).

De tal forma, en rigor, a cada axioma proyectivo bidimensional del primer grupo es posible poner en correspondencia cierta afirmación correcta (es decir, derivada de los mismos axiomas) así que las proposiciones correspondientes resultan recíprocamente duales.

Pasemos a considerar los axiomas del segundo grupo II,1 — II,6.

El concepto fundamental usado por los axiomas II,1 — II,6 es el de pares separados de puntos sobre la recta; empleando este concepto, se definen los pares separados de rectas que pasan por un mismo punto (véase el § 89). A continuación aparecen los axiomas del segundo grupo al lado de sus proposiciones duales; la validez de estas últimas se infiere inmediatamente de los axiomas I,II y de la definición de

II,1. Cualesquiera que sean tres puntos diferentes A, B, C pertenecientes a una misma recta u, existe tal punto D perteneciente a la recta u, que el par de puntos A, B separa al par de puntos C, D.

Cualesquiera que sean tres rectas diferentes a, b, c pertenecientes a un mismo punto U, existe tal recta d perteneciente al punto U, que el par de rectas a, b separa al par de rectas c, d.

Si el par A, B separa al par C, D, entonces los cuatro puntos A, B, C, D son diferentes.

Si el par a, b separa al par c, d, entonces las cuatro rectas a, b, c, d son diferentes.

II,2. Si el par de puntos A, B separa al par de puntos C, D, entonces el par B, A separa al C, D, y el par C, D separa al A, B.

Si el par de rectas a, b separa al par de rectas c, d, entonces el par b, a separa al c, d, y el par c, d separa al a, b.

II,3. Cualesquiera que sean cuatro puntos diferentes A, B, C, D pertenecientes a la recta u, los mismos pueden componer siempre y de un modo único dos pares separados.

Cualesquiera que sean cuatro rectas diferentes a, b, c, d pertenecientes al punto U, las mismas pueden componer siempre y de un modo único dos pares separados.

II,4. Sean A, B, C, D, E puntos pertenecientes a la recta U; si los pares C, D y C, E separan al par A, B, entonces el par D, E no separa al A, B.

Sean a, b, c, d, e rectas pertenecientes al punto U; si los pares c, d y c, e separan al par a, b, entonces el par d, e no separa al a, b.

II,5. Sean A, B, C, D, E puntos pertenecientes a la recta u; si los pares C, D y C, E no separan al par A, B, entonces el par D, E tampoco separa al A, B.

Sean a, b, c, d, e rectas pertenecientes al punto U; si los pares c, d y c, e no separan al par a, b, entonces el par d, e tampoco separa al a, b.

II,6. Sean a, b y c, d dos pares de rectas que pertenecen a un mismo punto S, siendo u y u' dos rectas que no pertenecen al punto S; luego, sean A, B, C, D puntos pertenecientes a la recta u y, correspondientemente, a las rectas a, b, c, d, siendo A', B', C', D' puntos pertenecientes a la recta u' y, correspondientemente, a las rectas a, b, c, d. Entonces, si el par A, B separa al par C, D, entonces el A', B' separa la C', D'.

Sean A, B y C, D dos pares de puntos que pertenecen a una misma recta s, siendo U y U' dos puntos que no pertenecen a la recta s; luego, sean a, b, c, d rectas pertenecientes al punto U y, correspondientemente, a los puntos A, B, C, D, siendo a', b', c', d' rectas pertenecientes al punto U' y, correspondientemente, a los puntos A, B, C, D. Entonces, si el par a, b separa al par c, d, entonces el a', b' separa al c', d'.

Así pues, también a los axiomas del segundo grupo pueden ponerse en correspondencia proposiciones duales.

Pasemos, por fin, al axioma de continuidad III.

Para poder formular el axioma III (de Dedekind), a su tiempo tuvimos que definir previamente el orden lineal de puntos sobre la recta proyectiva cortada. Hagamos recordar al lector esta definición.

Sea a una recta arbitraria. Elijamos sobre ella algún punto U, y para los demás puntos de la recta a, establezcamos la relación expresada por el término «entre», suponiendo que respecto a los puntos A, B, C el punto C se halla entre A y B, si el par A, B está separado por el C, U. Decimos que en el conjunto de puntos de la recta a, que resulta al eliminarse el punto U, existe establecido el orden lineal si el referido conjunto está ordenado con arreglo a la condición que sigue: cada vez que el punto C esté entre los puntos A y B en el sentido del orden establecido, el punto C se halla entre A y B también en el sentido de la definición recién adoptada.

Con miras a formular la proposición dual del axioma III, vamos a definir el orden lineal en el conjunto de todas las rectas, menos una, que pasan por un mismo punto.

Sea A un punto arbitrario. Entre las rectas que pasan por el punto A, elijamos alguna recta u, y para los demás, establezcamos la relación expresada por el término «entre», suponiendo que respecto a tres rectas a, b, c la recta c pasa entre a y b, si el par a, b está separado por el c, u. Diremos que en el conjunto de todas las rectas que pasan por A, menos la recta u, existe establecido el orden lineal si el referido conjunto está ordenado con arreglo a la condición que sigue: cada vez que la recta c esté entre las rectas a y b en el sentido del orden establecido, la recta c se halla entre a y b también en el sentido de la definición recién adoptada.

Ahora podemos enunciar del modo siguiente el axioma III y su afirmación dual:

AXIOMA III. Sea a recta arbitraria, U, cualquier punto perteneciente a la recta a, y sea introducido el orden lineal en el conjunto de los demás puntos que pertenecen a la referida recta. Si este conjunto está dividido en dos clases de forma que	Sea A un punto arbitrario, u, cualquier recta perteneciente al punto A, y sea introducido el orden lineal en el conjunto de las demás rectas que pertenecen al referido punto. Si este conjunto está dividido en dos clases de forma que
1) cada punto figura en una, y sólo en una clase;	1) cada recta figura en una, y sólo en una clase;
2) cada clase contiene puntos;	2) cada clase contiene rectas;
3) cada punto de la primera clase antecede a cada punto de la segunda,	3) cada recta de la primera clase antecede a cada recta de la segunda,
entonces ora en la primera clase existe un punto que sigue (en el sentido del orden establecido) a todos los puntos de dicha clase, ora en la segunda existe un punto que precede a todos los demás puntos suyos.	entonces ora en la primera clase existe una recta que sigue (en el sentido del orden establecido) a todas las rectas de dicha clase, ora en la segunda existe una recta que precede a las demás rectas suyas.

Podemos cerciorarnos fácilmente de la validez de la proposición dual del axioma III practicando la operación de cortadura. En efecto, sean S un punto arbitrario y u, alguna recta que no pasa por el punto S. A toda recta que pasa por S, hagamos corresponderle el punto de la recta u, perteneciente a ella. Si en el conjunto de todas las rectas, menos una, que pasan por S, así como en el de todos los puntos correspondientes a estas rectas, está introducido el orden lineal, entonces entre los elementos correspondientes de los conjuntos en cuestión se establecerán relaciones de orden bien siempre iguales, bien siempre contrarias. Por ende, el principio de Dedekind tiene lugar en el conjunto de rectas que pasan por S, dado que se registra en el conjunto de puntos de la recta u, es decir, la proposición dual del axioma III es válida a consecuencia del mismo axioma.

Así pues, efectivamente, todo axioma de la geometría proyectiva bidimensional tiene su proposición dual. A base del análisis efectuado, podemos enunciar el siguiente principio:

PRINCIPIO DE DUALIDAD SOBRE EL PLANO. *Sean dados dos conjuntos de objetos llamados correspondientemente puntos y rectas, entre los cuales están establecidas relaciones de pertenencia y de orden observando los requisitos de todos los axiomas de la geometría proyectiva de dos dimensiones. Si cambiamos los papeles de estos objetos, es decir, llamamos rectas a los objetos del primer conjunto y puntos, a los del segundo, dejando invariables las relaciones recíprocas entre ellos, entonces en tal caso nuevamente quedarán satisfechos los requisitos de los axiomas proyectivos.*

§ 121. Obviamente, podemos desarrollar la geometría proyectiva partiendo a discreción ora de los axiomas inicialmente adoptados ora de sus proposiciones duales. Desde el punto de vista lógico, en ambos casos nos ocuparemos de un mismo problema.

Si realizamos de hecho tal construcción dual de la geometría proyectiva, entonces junto con todo teorema proyectivo obtendremos su dual; en tal caso todos los teoremas se agruparán en pares de suerte que, formulada adecuadamente, una proposición del par se convertirá en la otra al cambiar el término «punto» por «recta» y viceversa. Es fácil señalar tal forma abstractamente lógica de apuntar los teoremas de la geometría proyectiva, que una en una sola las proposiciones recíprocamente duales. Para ello, hay que prescindir en absoluto de los términos «punto» y «recta», sustituyéndolos por «objeto de primer género» y «objeto de segundo género». Entonces se podrá interpretar de manera dual cada teorema formulado abstractamente, entendiendo por los puntos los objetos de primer género y por las rectas, los de segundo, atribuyendo en otro caso sentido contrario a los objetos de primero y segundo géneros. Los teoremas recíprocamente duales que resultan de estas interpretaciones, SIENDO APLICADOS A UNA REALIZACIÓN DETERMINADA DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA, exponen, como regla, hechos diferentes. Por ejemplo, la afirmación: «dos objetos de primer género siempre determinan un objeto común a ellos, y sólo uno» conduce a dos proposiciones recíprocamente duales: 1) por dos puntos diferentes pasa siempre una, y sólo una recta, 2) dos rectas diferentes siempre se cruzan en un solo punto.

Si en estas dos proposiciones entendemos de un mismo modo los términos «punto» y «recta», entonces, evidentemente, las referidas proposiciones tendrán sentidos concretos diferentes.

En la geometría proyectiva hay teoremas, y entre ellos figuran teoremas importantes, que se descubrieron en años diferentes y aun en épocas diferentes, pero, siendo recíprocamente duales, coinciden al practicarse la construcción abstractamente lógica de la geometría proyectiva. A título de ejemplos pueden citarse los famosos teoremas de Pascal y de Brianchon (véase el § 143) descubiertos con un intervalo de 100 años, que resultaron lógicamente equivalentes.

Desde el punto de vista contemporáneo, el principio de dualidad no se concibe como un fenómeno sobremanera sorprendente. El mismo se revela fácilmente mediante el aprecio abstractamente lógico de la geometría. Mas, a comienzos del siglo XIX, el descubrimiento del principio de dualidad fue original y progresivo en alto grado; en particular, el principio de dualidad jugó un gran papel en el desarrolo de la concepción abstracta de los objetos geométricos.

En lo que precede, el carácter dual de la geometría proyectiva se manifiesta constantemente en que las proposiciones acerca del sistema de puntos de la recta se ponen en correspondencia a las proposiciones análogas acerca de los elementos del

haz. Hagamos constar que la geometría elemental desconoce la dualidad. Así, en las relaciones de pertenencia mutua, los puntos y las rectas de Euclides no son duales unos a otras; en rigor, mientras que sobre el plano de Euclides dos puntos siempre poseen una recta común, dos rectas no siempre poseen un punto común (pueden ser paralelas). Las relaciones de orden también desconocen la dualidad; a saber, todos los puntos de la recta euclidiana están ubicados en orden lineal, siendo cíclico el orden de rayos en el haz. Se revelan fácilmente también las diferencias sustanciales en las relaciones de congruencia de segmentos y de ángulos (no las hay en absoluto en la geometría proyectiva); por ejemplo, sobre el plano euclidiano los triángulos con los lados correspondientemente congruentes son iguales, siendo desiguales, como regla, los triángulos con los ángulos correspondientemente congruentes.

§ 122. Es natural que la dualidad inherente a la geometría proyectiva de dos dimensiones, tenga una cierta expresión analítica.

Para lograr, a la par con la comparación dual de los hechos de la geometría proyectiva, una comparación adecuada de las relaciones analíticas que les corresponden, vamos a introducir *las coordenadas de las rectas*. Más abajo ofrecemos su determinación.

Sobre un plano, sea introducido un sistema de coordenadas homogéneas proyectivas. Entonces, todo punto del plano se determina por la relación de tres puntos x_1, x_2, x_3 y toda recta, por la ecuación del tipo de

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \qquad (*)$$

Los coeficientes u_1, u_2, u_3 de la ecuación (*), convengamos en llamarlos coordenadas de la recta determinada por esta ecuación. Evidentemente, las coordenadas u_1, u_2, u_3 son homogéneas, ya que tres números u_1, u_2, u_3 y tres números ρu_1, ρu_2, ρu_3 determinan una misma recta. Dicho en otros términos, para determinar una recta, es suficiente definir las relaciones $u_1 : u_2 : u_3$. Es evidente también que tres números cualesquiera u_1, u_2, u_3 constituyen coordenadas de cierta recta, excepto el caso de ser iguales a cero los tres números.

De lo que antecede se infiere que si (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de cierto punto P y (u_1, u_2, u_3), las coordenadas de cierta recta p, entonces la relación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

es la condición de pertenencia mutua del punto P y de la recta p. De aquí tenemos dos proposiciones recíprocamente duales que siguen:

Siendo constantes (u_1, u_2, u_3) y variables (x_1, x_2, x_3), la relación

$$(*) \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

determina toda clase de puntos pertenecientes a la recta (u_1, u_2, u_3); en este sentido la misma se llama ecuación de la recta (u_1, u_2, u_3).

Siendo constantes (x_1, x_2, x_3) y variables (u_1, u_2, u_3), la relación

$$(*) \qquad x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

determina toda clase de rectas pertenecientes al punto (x_1, x_2, x_3); en este sentido la misma se llama ecuación del punto (x_1, x_2, x_3)*).

*) Además, siendo constantes x_1, x_2, x_3 y variables u_1, u_2, u_3, se suele más llamar a la relación (*) ecuación *del haz* con el centro (x_1, x_2, x_3).

Luego, hagamos notar que si (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3) son las coordenadas de dos puntos P y Q, entonces, para cualquier λ, los números $p_1 + \lambda q_1$, $p_2 + \lambda q_2$, $p_3 + \lambda q_3$ son las coordenadas de cierto punto L de la recta PQ. En efecto, sea $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ la ecuación de la recta PQ; las coordenadas de los puntos P y Q deben satisfacer esta ecuación, por consiguiente, $u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0$ y $u_1q_1 + u_2q_2 + u_3q_3 = 0$. Pero entonces

$$u_1(p_1 + \lambda q_1) + u_2(p_2 + \lambda q_2) + u_3(p_3 + \lambda q_3) = 0,$$

es decir, las coordenadas del punto L satisfacen la ecuación de la recta PQ y, por tanto, L en efecto está sobre la recta PQ.

Análogamente, si (v_1, v_2, v_3) y (w_1, w_2, w_3) son las coordenadas de dos rectas v y w, entonces, para cualquier λ, los números $v_1 + \lambda w_1$, $v_2 + \lambda w_2$, $v_3 + \lambda w_3$ son las coordenadas de cierta recta l que pasa por el punto de intersección de las rectas v y w.

Efectivamente, sea O el punto de intersección de las rectas v y w y $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$, su ecuación; las coordenadas de las rectas v y w deben satisfacer esta ecuación, consecuentemente, $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ y $x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = 0$. Pero entonces

$$x_1(v_1 + \lambda w_1) + x_2(v_2 + \lambda w_2) + x_3(v_3 + \lambda w_3) = 0,$$

es decir, las coordenadas de la recta l satisfacen la ecuación del punto O y, por tanto, l en efecto pasa por el punto O.

En el § 119 mostramos que la relación compleja de los puntos P, Q, L, M con las coordenadas $p_i, q_i, p_i + \lambda q_i, p_i + \mu q_i (i = 1, 2, 3)$ se expresa con la fórmula

$$(PQLM) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{1}$$

En virtud del principio de dualidad, la relación compleja de las rectas v, w, l, m con las coordenadas $v_i, w_i, v_i + \lambda w_i, v_i + \lambda w_i (i = 1, 2, 3)$ puede expresarse por una fórmula completamente análoga

$$(vwlm) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{2}$$

De las fórmulas (1) y (2) y del teorema 48 se deducen las siguientes proposiciones recíprocamente duales:

Si los puntos P, Q, L, M tienen coordenadas $p_i, q_i, p_i + \lambda q_i, p_i + \mu q_i (i = 1, 2, 3)$, respectivamente, entonces la condición necesaria y suficiente de la separación armónica de los pares P, Q y L, M es la igualdad

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1.$$

Si las rectas v, w, l, m tienen coordenadas $v_i, w_i, v_i + \lambda w_i, v_i + \mu w_i (i = 1, 2, 3)$, recpectivamente, entonces la condición necesaria y suficiente de la separación armónica de los pares v, w y l, m es la igualdad

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1.$$

Es fácil comprender que análogamente a los ejemplos citados y en todos los casos de otra índole, las relaciones analíticas correspondientes a los hechos

recíprocamente duales de la geometría proyectiva, se convierten unas en otras al sustituir las coordenadas de puntos por las de rectas, y viceversa.

§ 123. PRINCIPIO DE DUALIDAD EN EL ESPACIO PROYECTIVO. En la geometría proyectiva del espacio tenemos objetos de tres tipos, éstos son los puntos, las rectas y los planos, y dos formas de sus relaciones recíprocas: la pertenencia y el orden.

En lugar de las expresiones adoptadas en la geometría intuitiva «el punto se halla sobre la superficie» o «el plano pasa por el punto», convengamos en valernos de la expresión «el punto pertenece al plano» o «el plano pertenece al punto»; en vez de las expresiones «el punto se halla sobre la recta» o «la recta pasa por el punto», convengamos en usar la expresión «el punto pertenece a la recta» o «la recta pertenece al punto»; en lugar de decir «la recta se halla sobre el plano» o «el plano pasa por la recta», digamos «la recta pertenece al plano» o «el plano pertenece a la recta».

Entonces, si formulamos de un modo adecuado los axiomas I,1 — I,9 que establecen las propiedades de las relaciones de pertenencia mutua de los objetos, entonces a cada uno de estos axiomas puede hacérseles corresponder cierta proposición correcta (que se infiere de los axiomas I,1 — I,9) de modo que dos proposiciones que se corresponden, pasan una a otra al cambiar el término «punto» por «plano» y el término «plano» por «punto» (mientras que el término «recta» no debe cambiar). Llamaremos recíprocamente duales a las proposiciones que figuran en la correspondencia señalada.

A continuación se dan de dos en dos los axiomas I,1 — I,9 y sus proposiciones duales; dejamos que las demuestre el lector.

I,1. Cualesquiera que sean dos puntos A y B, existe una recta a que pertenece al punto A y al B.

Cualesquiera que sean dos planos α y β, existe una recta a que pertenece al plano α y al β.

I,2. Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A y B, existe no más de una recta que pertenece a los puntos A y B.

Cualesquiera que sean dos planos diferentes α y β, existe no más de una recta que pertenece a los planos α y β.

I,3. A cada recta pertenecen no menos de tres puntos. Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.

A cada recta pertenecen no menos de tres planos. Existen al menos tres planos que no pertenecen a una misma recta.

I,4. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, existe cierto plano α perteneciente a los puntos A, B, C. A cada plano le pertenece no menos de un punto.

Cualesquiera que sean tres planos α, β, γ que no pertenecen a una misma recta, existe cierto punto A perteneciente a los planos α, β, γ. A cada punto le pertenece no menos de un plano.

I,5. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, a los mismos les pertenece no más de un plano común.

Cualesquiera que sean tres planos α, β, γ que no pertenecen a una misma recta, a los mismos les pertenece no más de un punto común.

I,6. Si dos puntos A, B pertenecientes a la recta a pertenecen al plano α, entonces cada punto perteneciente a la recta a pertenece al plano α.

Si dos planos α, β pertenecientes a la recta a pertenecen al punto A, entonces cada plano perteneciente a la recta a pertenece al punto A.

I,7. Si a dos planos α, β les pertenece un punto común A, entonces a los mismos les pertenece al menos un punto común B más.

Si a dos puntos A, B les pertenece un plano común α, entonces a los mismos les pertenece al menos un plano común β más.

I,8. Hay no menos de cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano.

Hay no menos de cuatro planos que no pertenecen a un mismo punto.

I,9. Cada dos rectas pertenecientes a un mismo plano, pertenecen a un punto común.

Cada dos rectas pertenecientes a un mismo punto, pertenecen a un plano común.

No hay necesidad de anotar detalladamente las proposiciones duales de los axiomas II, III. El modo de formular las referidas proposiciones se ha dilucidado suficientemente por lo expuesto; las mismas se demuestran mediante razonamientos completamente triviales.

Dado que todas las proposiciones duales de los axiomas proyectivos I, II, III, son válidas (es decir, se deducen de los mismos axiomas), tienen lugar el

PRINCIPIO DE DUALIDAD EN EL ESPACIO. *Sean dados tres conjuntos de objetos llamados correspondientemente puntos, rectas y planos, entre los cuales existen establecidas las relaciones de pertenencia y de orden observando las exigencias de todos los axiomas de la geometría proyectiva. Si cambiamos los papeles de estos objetos llamando planos a los del primer conjunto, puntos, a los del tercero (reservando el nombre primitivo para los objetos del segundo conjunto), sin cambiar las relaciones mutuas entre ellos, entonces en este caso nuevamente serán satisfechas las exigencias de los axiomas proyectivos.*

Obviamente, se puede desarrolar la geometría proyectiva espacial, al igual que la de dos dimensiones, arrancando a discreción bien de los axiomas inicialmente adoptados, bien de sus proposiciones duales.

Si practicamos tal construcción dual de la geometría proyectiva, entonces junto con cada teorema proyectivo se obtendrá su teorema dual.

Por supuesto, si, al demostrar cierto teorema proyectivo, queremos obtener su teorema dual, no tenemos que aducir de hecho su demostración; la formulación del teorema dual se deduce de la del teorema dado, cambiando los términos según el esquema:

punto — plano,

recta — recta,

plano — punto,

y su validez se establece por el principio de dualidad.

Siendo fija la elección de objetos geométricos, las proposiciones recíprocamente duales expresan, como regla, diferentes hechos concretos. Por ejemplo, todos los teoremas sobre las figuras compuestas por puntos y rectas de un mismo plano, proporcionan, a título de sus duales, teoremas sobre los cuerpos compuestos por rectas y planos que pasan por un mismo punto; dicho en otros términos, la dual de la geometría sobre el plano es la geometría de la radiación.

§ 124. Ateniéndonos al principio de dualidad, vamos a introducir las coordenadas de planos, a la par de las de puntos. A saber, llamaremos coordenadas del plano

arbitrario α a los coeficientes u_1, u_2, u_3, u_4 de su ecuación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

que determina el plano α en algún sistema de coordenadas homogéneas proyectivas.

Evidentemente, las coordenadas (u_1, u_2, u_3, u_4) son homogéneas, puesto que los cuatro números u_1, u_2, u_3, u_4 y los cuatro números $\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho u_4$ determinan un mismo plano. Pues bien, para determinar un plano, es suficiente preestablecer las relaciones $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$. Es notorio que cualesquiera cuatro números u_1, u_2, u_3, u_4 constituyen las coordenadas de cierto plano, excepto el caso de ser iguales a cero estos cuatro números.

Por lo antes dicho, si (x_1, x_2, x_3, x_4) son las coordenadas de algún punto P y (u_1, u_2, u_3, u_4), las de cierto plano α, entonces la relación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

es la condición de la pertenencia mutua del punto P y el plano α. De aquí tenemos dos proposiciones recíprocamente duales:

Siendo constantes (u_1, u_2, u_3, u_4) y variables (x_1, x_2, x_3, x_4), la relación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

define todo género de puntos pertenecientes al plano (u_1, u_2, u_3, u_4); en este sentido la misma se llama ecuación del plano.

Siendo constantes (x_1, x_2, x_3, x_4) y variables (u_1, u_2, u_3, u_4), la relación

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$$

define todo género de planos pertenecientes al punto (x_1, x_2, x_3, x_4); en este sentido la misma se llama ecuación de la radiación de planos.

A continuación nos cercioramos fácilmente de la validez de las afirmaciones siguientes:

Si x_i, y_i, $z_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son coordenadas de tres puntos X, Y, Z, entonces las relaciones

$$p_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i,$$

para cualesquiera α, β, γ (excepto $\alpha = \beta = \gamma = 0$), determinan las coordenadas del punto P que pertenece al plano XYZ; por ende, las relaciones señaladas se llaman ecuaciones paramétricas del referido plano.

Si α_i, β_i, $\gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son coordenadas de tres planos α, β, γ, entonces las relaciones

$$\pi_i = u\alpha_i + v\beta_i + w\gamma_i,$$

para cualesquiera u, v, w (excepto $u = v = w = 0$), determinan las coordenadas del punto π que pertenece al punto común de los planos α, β, γ; por ende, las relaciones señaladas se llaman ecuaciones paramétricas de la radiación de planos con el centro en el referido punto.

Si x_i, $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son coordenadas de dos puntos X, Y, entonces las relaciones

$$(*) \qquad p_i = \alpha x_i + \beta y_i,$$

para cualesquiera α, β (excepto $\alpha = \beta = 0$), definen las coordenadas del punto P perteneciente a la recta XY;

Si α_i, $\beta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son coordenadas de dos planos α, β, entonces las relaciones

$$(*) \qquad \pi_i = u\alpha_i + v\beta_i,$$

para cualesquiera u, v (excepto $u = v = 0$), definen las coordenadas del plano π perteneciente a la recta según la

por ende, las relaciones señaladas se llaman ecuaciones paramétricas de la referida recta.

Si dividimos las igualdades (*) por α, poniendo $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, entonces las coordenadas variables p_i se expresarán mediante un solo parámetro:

$$p_i = x_i = \lambda y_i.$$

cual se cortan los planos α y β; por ende, las relaciones señaladas se llaman ecuaciones paramétricas de la referida recta (en coordenadas de plano).

Si dividimos las igualdades (*) por u, poniendo $\frac{v}{u} = t$, entonces las coordenadas variables π_i se expresarán mediante un solo parámetro:

$$\pi_i = \alpha_i + t\beta_i.$$

En el primer caso, siendo diferentes los valores del parámetro, las ecuaciones definen el conjunto de puntos pertenecientes a la recta, en el segundo, el conjunto de planos pertenecientes a la recta.

Conforme al § 119, la relación compleja de cuatro puntos X, Y, L, M con las coordenadas x_i, y_i, $x_i + \lambda y_i$, $x_i + \mu y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ se expresa por la fórmula

$$(XYLM) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

En virtud del principio de dualidad, de aquí se infiere que la relación compleja de cuatro planos α, β, τ, σ con las coordenadas α_i, β_i, $\alpha_i + t\beta_i$, $\alpha_i + s\beta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ se expresa por la fórmula

$$(\alpha\beta\tau\sigma) = \frac{t}{s}.$$

Análogamente a los ejemplos aducidos, también en otros casos las relaciones analíticas correspondientes a hechos recíprocamente duales, pasan unas a otras al sustituir las coordenadas de puntos por las de planos y al sustituir las coordenadas de planos por las de puntos.

12. Curvas y haces algebraicos. Superficies y radiaciones algebraicas. Plano proyectivo complejo y espacio proyectivo complejo

§ 125. En la geometría proyectiva sobre el plano, uno de los principales objetos de investigación son las curvas algebraicas y los haces algebraicos correspondientes a ellas según el principio de dualidad. Más abajo se ofrece su definición:

Se llama *curva algebraica* al conjunto de puntos cuyas coordenadas homogéneas proyectivas satisfacen cierta ecuación homogénea algebraica, es decir, a la ecuación del tipo de

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 1, 2, 3),$$

Se llama *haz algebraico* al conjunto de rectas cuyas coordenadas homogéneas proyectivas satisfacen cierta ecuación homogénea algebraica, es decir, a la ecuación del tipo de

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_n} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 1, 2, 3),$$

donde a la izquierda está una forma homogénea de grado n; los coeficientes $a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n}$ se suponen independientes respecto a la sucesión de los índices. El grado n de esta ecuación se llama orden de la curva algebraica.

donde a la izquierda está una forma homogénea de grado n; los coeficientes $a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n}$ se suponen independientes respecto a la sucesión de los índices. El grado n de esta ecuación se llama clase del haz algebraico.

Para $n = 1, 2, 3, \dots$ correspondientemente se tienen:

una línea de primer orden determinada por la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

es decir, un cúmulo de puntos pertenecientes a una misma recta; una línea de segundo orden determinada por la ecuación

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0;$$

una línea de tercer orden determinada por la ecuación

$$a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{122}x_1x_2^2 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3 + a_{333}x_3^3 = 0, \text{ etc.}$$

un haz de primera clase determinado por la ecuación

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0,$$

es decir, un cúmulo de rectas pertenecientes a un mismo punto; un haz de segunda clase determinada por la ecuación

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0;$$

un haz de tercera clase determinado por la ecuación

$$a_{111}u_1^3 + 3a_{112}u_1^2u_2 + 3a_{122}u_1u_2^2 + a_{222}u_2^3 + 3a_{223}u_2^2u_3 + 3a_{233}u_2u_3^2 + 3a_{113}u_1^2u_3 + 3a_{133}u_1u_3^2 + 6a_{123}u_1u_2u_3 + a_{333}u_3^3 = 0, \text{ etc.}$$

Conforme a la definición enunciada, las líneas algebraicas se distinguen entre todas las líneas en general según el tipo de sus ecuaciones. Es natural preguntar: ¿puede alterarse el carácter algebraico de una ecuación al pasar de un sistema de coordenadas proyectivas a otro? En tal caso no tendría sentido introducir el concepto de línea algebraica en la geometría. Sin embargo, como es fácil mostrar, el carácter algebraico y el grado de la ecuación son invariantes respecto a la transformación de las coordenadas proyectivas. En rigor, sabemos que al cambiar de sistema proyectivo de coordenadas homogéneas, las coordenadas primitivas de los puntos del plano pasan a ser funciones homogéneas lineales de las nuevas, y las coordenadas nuevas, a su vez, se expresan lineal y homogéneamente a base de las primitivas. Pero, evidentemente, en este caso obtendremos en nuevas coordenadas una forma también homogénea y, además, del mismo grado n que la inicial. Por consiguiente, el concepto de curva algebraica y de su orden tiene un sentido geométrico que no depende de la elección del sistema de coordenadas.

Para establecer una propiedad análoga de la definición de los haces algebraicos, en primer lugar hay que deducir las fórmulas que rigen el cambio de las coordenadas homogéneas de rectas al cambiar el sistema de coordenadas proyectivas. Con este objeto escribamos la ecuación de una recta arbitraria:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (*)$$

y la ecuación de esta misma recta en nuevas coordenadas:

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0. \qquad (^{**})$$

Sean

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

las relaciones entre las nuevas coordenadas de puntos y las primitivas.

Dado que las ecuaciones (*) y (**) determinan una misma recta, entonces, para x_1, x_2, x_3 cualesquiera debe tener lugar la relación

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = \mu(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3);$$

al sustituir aquí x_1', x_2', x_3' por sus expresiones basadas en x_1, x_2, x_3, obtendremos la identidad

$$\frac{1}{\rho'}[(c_{11}u_1' + c_{21}u_2' + c_{31}u_3')\,x_1 + (c_{12}u_1' + c_{22}u_2' + c_{32}u_3')x_2 +$$
$$+ (c_{13}u_1' + c_{23}u_2' + c_{33}u_3')\,x_3] = \mu(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3).$$

Suponiendo $\rho'\mu = \sigma$, de aquí hallaremos:

$$\left.\begin{aligned} \sigma u_1 &= c_{11}u_1' + c_{21}u_2' + c_{31}u_3' \\ \sigma u_2 &= c_{12}u_1' + c_{22}u_2' + c_{32}u_3' \\ \sigma u_3 &= c_{13}u_1' + c_{23}u_2' + c_{33}u_3' \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Precisamente éstas son las relaciones entre las viejas coordenadas de rectas y las nuevas que necesitamos. De tal modo, las fórmulas de transformación de las coordenadas de rectas tienen la misma estructura que las de transformación de las coordenadas de puntos (en este caso el determinante de la transformación (β) es igual al de la transformación (α) y, luego, $\neq 0$). Consecuentemente, el concepto de haz algebraico y de su clase, al igual que el de curva algebraica y de su orden, tiene un sentido geométrico independiente de la elección del sistema de coordenadas.

Se entiende que al cambiar las viejas variables por las formas lineales de las nuevas en las ecuaciones algebraicas, resulta una ecuación cuyos coeficientes, como regla, difieren de los de la ecuación inicial. También está claro que todas las propiedades geométricas de las líneas y los haces y todas las magnitudes geométricas relacionadas con ellas, deben representarse analíticamente por tales relaciones entre los coeficientes de las ecuaciones y por tales funciones de dichos coeficientes, que no varían al cambiar el sistema de coordenadas proyectivas.

De tal manera, *la tarea de la investigación de las rectas y los haces algebraicos en la geometría proyectiva sobre el plano equivale a la tarea algebraica de la investigación de las invariantes de las formas homogéneas con tres argumentos.*

Una observación más.

Al examinar las fórmulas (α) y (β), podemos estimar también que las coordenadas que figuran en ellas, corresponden a un mismo sistema; entonces, por ejemplo, en las fórmulas (α) los números x_1, x_2, x_3 y x_1', x_2', x_3' serán ya no coordenadas distintas de un mismo punto, sino coordenadas de puntos diferentes M y M'. Según sabemos, la aplicación del plano proyectivo sobre sí mismo, debido a la cual el punto M

pasa al M' determinado por las fórmulas (α), es proyectiva. Merced a tal aprecio de las fórmulas (α) y (β) (como fórmulas de la aplicación proyectiva), la invariación de la estructura de la ecuación de las imágenes algebraicas respecto a las transformaciones (α) y (β) significa que *en la aplicación proyectiva las imágenes algebraicas de cualquier orden o clase se aplican en imágenes algebraicas del mismo orden o de la misma clase.*

Luego, es obvio que al practicar cierta aplicación proyectiva determinada por las fórmulas (α), y al cambiar simultáneamente las coordenadas proyectivas con arreglo a las mismas fórmulas, la imagen algebraica arbitraria A en el sistema (x_1, x_2, x_3) y la imagen A' que le corresponde proyectivamente en el sistema (x'_1, x'_2, x'_3), tendrán ecuaciones iguales. Por cuanto las imágenes algebraicas que pueden aplicarse proyectivamente una sobre otra, tienen ecuaciones idénticas en las coordenadas convenientes, las mismas tienen también imágenes algebraicas idénticas. Esto corresponde a la condición general para toda la geometría proyectiva de considerar equivalentes las figuras que pasan unas a otras gracias a la aplicación proyectiva (lo mismo que en la geometría elemental se consideran iguales las figuras que coinciden al efectuar movimientos).

§ 126. Una recta arbitraria contiene no más de n puntos de una línea de orden n o consta por entero de puntos de la referida línea. Efectivamente, sea

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} = 0$$

la ecuación de cierta línea de orden n, p_i y $q_i (i = 1, 2, 3)$, las coordenadas de dos puntos P y Q. Las coordenadas $x_i (i = 1, 2, 3)$ de un punto arbitrario de la recta PQ pueden expresarse como funciones del parámetro λ:

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Estas fórmulas determinan los puntos comunes de la recta PQ y de la línea dada, si λ satisface la ecuación

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n}(p_{\alpha_1} + \lambda q_{\alpha_1})(p_{\alpha_2} + \lambda q_{\alpha_2}) \dots (p_{\alpha_n} + \lambda q_{\alpha_n}) = 0. \qquad (*)$$

Supongamos que el punto Q se ha elegido observando la condición de

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \dots q_{\alpha_n} \neq 0$$

(lo cual es posible si la recta no está compuesta por entero de puntos de la línea dada). En tal caso, el primer miembro de la ecuación (*) contiene λ^n, y dicha ecuación tiene grado n. Dado que a toda raíz real λ_i le corresponde cierto punto de intersección de la recta PQ con la línea algebraica dada, y el número de raíces reales de la ecuación (*) no es superior a n, el número máximo de puntos comunes de la recta y de la línea de orden n efectivamente es igual a n.

Análogamente, un punto arbitrario contiene no más de n rectas de un haz de clase n, o todas las rectas que le pertenecen, figuran en el haz. En efecto, sean

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_n} = 0$$

la ecuación de cierto haz de clase n y S, algún punto determinado por la intersección de dos rectas v y w con las coordenadas v_i y $w_i (i = 1, 2, 3)$. Las coordenadas $u_i (i = 1, 2, 3)$ de una recta arbitraria perteneciente al punto S, pueden expresarse como funciones del parámetro λ:

$$u_i = v_i + \lambda w_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Estas fórmulas determinan las rectas que pertenecen al punto S y al haz dado, si λ satisface ecuación

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(v_{\alpha_1} + \lambda w_{\alpha_1})(v_{\alpha_2} + \lambda w_{\alpha_2}) \ldots (v_{\alpha_n} + \lambda w_{\alpha_n}) = 0. \qquad (**)$$

Supongamos que la recta w se ha elegido observando la condición de

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \ldots w_{\alpha_n} \neq 0$$

(lo cual es posible si no todas las rectas pertenecientes al punto S figuran en el haz dado). En este caso el primer miembro de la ecuación (**) comprende λ^n, y la referida ecuación tiene grado n. Puesto que a toda raíz real λ_i le corresponde una recta perteneciente al punto S y al haz algebraico dado, y el número de raíces reales de la ecuación (**) no es superior a n, el número máximo de rectas del haz que pasan por el punto S, efectivamente es igual a n.

Las proposiciones demostradas hacen pensar que el orden de la curva algebraica puede interpretarse desde el punto de vista de la geometría intuitiva, como número máximo de puntos de la referida curva que pertenecen a una misma recta, y la clase del haz, como número máximo de sus rectas pertenecientes a un mismo punto. No obstante, es fácil comprender que tal interpretación sería errónea. A saber, existen tales líneas de orden n que tienen menos de n puntos comunes con CUALQUIER recta. A modo de ejemplo basta señalar la línea de 2° orden $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ que carece de puntos en absoluto.

Entretanto, la interpretación geométrica mencionada del orden de la curva y de la clase del haz será posible siempre que ampliemos el conjunto de elementos del plano proyectivo agregándole nuevos elementos «imaginarios». La introducción de elementos imaginarios en la geometría es tan conveniente como la introducción de números imaginarios en el álgebra, pues posibilita la sencillez adecuada de las formulaciones de muchos teoremas.

A continuación se expone el principio de la introducción de elementos imaginarios sobre el plano proyectivo.

§ 127. Sean dados dos conjuntos de objetos llamados correspondientemente puntos y rectas, entre los cuales están establecidas las relaciones de pertenencia y de orden observando las exigencias de los axiomas proyectivos bidimensionales (dicho en otros términos, sea dado un plano proyectivo). Entonces, según sabemos, a todos los puntos pueden ponerse en correspondencia biunívocamente, obedeciendo a una cierta ley, las relaciones de números reales x_1, x_2, x_3 llamados coordenadas homogéneas proyectivas de puntos y, a todas las rectas, las relaciones de números reales u_1, u_2, u_3 llamados coordenadas proyectivas de rectas. Convengamos en llamar *punto imaginario a cualquier sistema de tres números complejos* x_1, x_2, x_3 si al menos uno de ellos difiere de cero y si la relación de al menos dos de ellos no puede expresarse mediante un número real; consideraremos coincidentes los puntos (x_1, x_2, x_3) y $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$, donde ρ es cualquier número complejo desigual a cero. Bajo las mismas condiciones llamaremos *recta imaginaria* a la terna de números complejos u_1, u_2, u_3. De tal forma, cualquier terna de números puede considerarse tanto como punto así como recta.

Si cambia el sistema de coordenadas proyectivas, entonces las coordenadas de todos los puntos se transforman de acuerdo a las fórmulas (α) del § 125, mientras que las coordenadas de todas las rectas se transforman a base de las fórmulas (β).

Consideraremos que estas fórmulas definen las coordenadas de los puntos y las rectas imaginarios en todo nuevo sistema de coordenadas proyectivas que se introduce.

Así pues, se da un sentido invariante al concepto de puntos y rectas imaginarios. Precisamente, podemos decir que *los puntos y las rectas imaginarios son ciertos objetos que se determinan por ternas de números complejos con las relaciones complejas, correspondientemente a todo sistema de coordenadas proyectivas; en un mismo sistema de coordenadas, dos ternas de números determinan un mismo objeto si son proporcionales los números que figuran en ellas; en los sistemas de coordenadas diferentes, dos ternas de números determinan un mismo objeto si están enlazadas por las relaciones* (α) *o las* (β), *en función de si es punto o recta el referido objeto.*

Para el conjunto ampliado de objetos se establecen las relaciones de pertenencia mutua: el punto (x_1, x_2, x_3) se considera perteneciente a la recta (u_1, u_2, u_3) bajo la condición de $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. De los cálculos que nos condujeron a las fórmulas (β), se infiere que dicha condición tiene un sentido invariante (es decir, si para un punto real o imaginario dado y para una recta real o imaginaria dada la referida condición se observa en un sistema de coordenadas, entonces la misma se observará también en otro sistema cualquiera).

No se introducen las relaciones de orden para los objetos imaginarios. Llamaremos *plano proyectivo complejo* al conjunto de puntos y rectas reales del plano proyectivo, completado por elementos imaginarios.

Lo mismo que los puntos y las rectas, las demás imágenes algebraicas del plano proyectivo complejo se dividen en reales e imaginarias. Se llaman reales las imágenes algebraicas que pueden representarse por las ecuaciones con los coeficientes reales, llamándose imaginarias las que pueden representarse sólo por las ecuaciones con los coeficientes complejos. Para evitar juicios erróneos, hagamos constar aquí mismo que pueden ser reales las imágenes compuestas exclusivamente por elementos imaginarios; por ejemplo, la línea $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ es real, sin embargo no tiene ningún punto real*).

Sobre el plano proyectivo complejo, cada línea algebraica de orden n posee n puntos de intersección con toda recta (si se considera adecuadamente la multiplicidad de los puntos). En rigor, volvamos al examen aducido al comienzo del presente párrafo. La ecuación (*) tiene n raíces reales o complejas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, a cada una de las cuales están puestos en correspondencia tres números mediante las fórmulas

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ya que introdujimos elementos imaginarios en la consideración, ahora podemos estimar como coordenadas de cierto punto los tres números (x_1, x_2, x_3), sean reales o complejos. Los puntos correspondientes a las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son puntos comunes de la línea y de la recta sujetas al examen. Si al computar estos puntos contamos los que corresponden a las raíces múltiples, tantas veces cuantas unidades tiene el índice de multiplicidad, entonces siempre tendremos n puntos de intersección de la recta con una línea de orden n.

Para los haces, los razonamientos son análogos.

---

*) Si admitimos las transformaciones de coordenadas según las fórmulas (α) y (β) con los valores complejos de los coeficientes c_{ik}, entonces la diferencia entre las imágenes imaginarias y reales perderá el sentido invariante.

Así pues, sobre el plano proyectivo complejo

el orden de la línea algebraica es igual al número de puntos de esta línea, pertenecientes a alguna recta;

la clase del haz algebraico es igual al número de rectas de este haz, que pasan por algún punto.

Al concluir el presente párrafo, hagamos notar que el haz algebraico constituye, como regla, un sistema de rectas tangentes a la línea algebraica.

En efecto, debido a que sobre el plano proyectivo toda recta $u_1x_1 + u_2x_2 + + u_3x_3 = 0$ se determina al fijar dos parámetros $u_1 : u_2 : u_3$, y la ecuación del haz establece un solo enlace entre dichos parámetros, el haz algebraico es una familia uniparamétrica de rectas; mas, la familia uniparamétrica tiene, como regla, una envolvente; de tal suerte, el haz algebraico se compone de rectas tangentes a una línea. El hecho de que la referida línea es algebraica, se establece por cálculos no complicados a base de los métodos generales de la teoría de las envolventes.

La observación enunciada permitirá al lector dar cierta clara evidencia a la noción sobre los haces algebraicos.

§ 128. Las líneas algebraicas y los haces algebraicos, patentemente, son conceptos recíprocamente duales de la geometría proyectiva. A la envolvente del haz algebraico le corresponde según el principio de dualidad el haz de tangentes de la curva algebraica. A fin de explicarnos tal correspondencia, tenemos que tomar en consideración el hecho de que la envolvente del haz consta de puntos característicos, cada uno de los cuales es punto común de dos rectas infinitamente próximas del haz; es del todo evidente que al punto característico del haz le corresponde según el principio de dualidad una tangente a la curva, es decir, una recta que pasa por dos puntos suyos infinitamente próximos. Por tanto, al conjunto de puntos característicos del haz algebraico (es decir, de la envolvente) le corresponde, como imagen dual, un conjunto de tangentes a la línea algebraica (es decir, el haz algebraico envuelto por dicha línea).

En la geometría proyectiva se trata frecuentemente de la clase de la curva y del orden del haz.

Se llama *clase de la recta algebraica* a la clase del haz algebraico de sus tangentes.

Se puede expresarlo en otros términos: es clase de la curva el número de tangentes (reales o imaginarias) que pueden trazarse a ella desde un punto arbitrario del plano.

Se llama *odren del haz algebraico* al orden de su envolvente.

Se puede expresarlo en otros términos: es orden del haz el número de sus puntos característicos (reales o imaginarios) situados sobre una misma recta.

La clase y el orden de una misma imagen algebraica, como regla, son diferentes.

§ 129. No tenemos la posibilidad de aducir aquí los teoremas sustanciales de la teoría general de las curvas algebraicas; nos limitaremos a emitir sólo unas cuantas observaciones. De las proposiciones fundamentales del álgebra y del análisis se sigue que la curva algebraica, a diferencia de ciertas curvas transcendentes (es decir, no algebraicas), no puede tener puntos de terminación ni tener forma de un hilo infinito

arrollado en un plano proyectivo. Dicho en otros términos, todas las líneas algebraicas son cerradas. Por ejemplo, las líneas algebraicas del plano de Euclides —la parábola y la hipérbola— conocidas por el lector, al completarse por elementos infinitamente alejados el plano euclidiano, se cierran en el infinito, y de tal modo pasan a ser curvas cerradas sobre el plano ampliado (es decir, sobre el plano proyectivo).

Asimismo se puede demostrar que el número de trozos individuales de toda curva algebraica es finito.

En lo que se refiere al problema de la clasificación de las curvas algebraicas, diremos que si $n > 3$, este problema pasa a los dominios complejos del álgebra (precisamente, a la teoría de los invariantes de las formas homogéneas de tres argumentos) y constituye el objeto de tratados especiales.

§ **130**. El espacio proyectivo real puede completarse por elementos imaginarios de manera plenamente análoga a como lo hicimos en el caso del plano. A saber, primero se puede determinar los puntos imaginarios y los planos imaginarios y la relación de pertenencia de los puntos y los planos reales e imaginarios (análogamente a la definición de los puntos imaginarios, las rectas imaginarias y la relación de pertenencia en el § 127); luego, en calidad de recta arbitraria, se puede considerar un conjunto de puntos de intersección de algunos dos planos (en este caso, serán rectas nuevas, es decir, imaginarias, las que no se determinan por la intersección de los planos reales). El conjunto de elementos reales e imaginarios obtenido así, con una relación de pertenencia y de orden (de puntos reales sobre rectas reales) prefijada se llama *espacio proyectivo complejo*.

En el espacio proyectivo complejo se determinan las superficies y las radiaciones algebraicas (que constituyen análogos espaciales de las curvas y los haces algebraicos).

Se llama *superficie algebraica* al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\ldots x_{\alpha_m} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = 1, 2, 3, 4),$$

cuyo primer miembro es una forma homogénea de las variables x_1, x_2, x_3, x_4 de grado m. El número m se llama *orden de la superficie*.

Se llama *radiación algebraica* al conjunto de planos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2}\ldots u_{\alpha_m} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = 1, 2, 3, 4),$$

cuyo primer miembro es una forma homogénea de las variables u_1, u_2, u_3, u_4 de grado m. El número m se llama *clase de la radiación*.

Las imágenes algebraicas se llaman *reales* si pueden representarse por ecuaciones con coeficientes reales.

Aplicando los razonamientos aducidos en el § 126 al caso de tres dimensiones, se puede demostrar que

el orden de la superficie algebraica es igual al número de sus puntos (reales e imaginarios) que pertenecen a una misma recta.

la clase de la radiación algebraica es igual al número de sus planos (reales e imaginarios) que pasan por una misma recta.

Al concluir, observemos que no todas las propiedades de las ecuaciones de imágenes algebraicas expresan las propiedades geométricas de las referidas imágenes, sino solamente las que subsisten después de cualquier transformación de las coordenadas proyectivas.

De tal manera, *la tarea de la investigación de las superficies y las radiaciones algebraicas en la geometría proyectiva tridimensional equivale a la tarea algebraica de la investigación de los invariantes de formas homogéneas de cuatro argumentos.*

13. Imágenes de segundo grado. Teoría de las polares

La tarea general de la investigación de las imágenes algebraicas de las imágenes algebraicas de orden o de clase m dados consiste en hallar el sistema completo de los invariantes de la ecuación homogénea de grado m, es decir, de tal sistema de funciones de los coeficientes de una ecuación de grado m las cuales

1) son invariantes respecto a la transformación homogénea lineal de los argumentos del primer miembro de la ecuación,

2) son tales que si para dos ecuaciones de grado m con los coeficientes numéricamente definidos estas funciones toman valores correspondientemente iguales, entonces las ecuaciones dadas se transforman unas en otras por medio de cierta transformación lineal de los argumentos.

Dicho en otros términos, conociendo el sistema completo de los invariantes de una ecuación de grado m, en el caso de dos imágenes arbitrarias de orden o de clase m, siempre podemos resolver el problema de si son proyectivamente idénticas o no.

Aun en la geometría de dos dimensiones, para m grandes, esta tarea ofrece ingentes dificultades. Para $m = 3$, la misma se hizo avanzar por Newton*) quien clasificó globalmente las líneas de tercer orden, es decir, señaló todos los géneros proyectivamente diferentes de las referidas líneas, entre las cuales las demás se obtienen mediante transformaciones proyectivas. El caso de $m = 2$ es el más simple, está estudiado completamente por medios bien elementales. En la presente sección lo consideraremos con ciertos detalles.

En este examen nos limitaremos preferentemente a la geometría de dos dimensiones; casi todos los resultados que obtenemos, se aplican a la geometría de tres dimensiones introduciendo modificaciones normalizadas en las formulaciones y las ecuaciones. Hagamos notar además que al estudiar las imágenes de segundo grado será suficiente investigar las líneas de segundo orden; entonces, las propiedades de los haces de segunda clase pueden obtenerse por medio del principio de dualidad.

Empezaremos por exponer la teoría de las polares que juega un importante papel en la investigación general de las imágenes de 2° grado.

§ 131. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES MÁS PRINCIPALES DE LAS POLARES. Sea dada cierta línea (real) de segundo orden determinada por la ecuación

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}) \qquad (\alpha)$$

---

*) Véase *F. Klein*, Gesammelte mathematische Abhandlungen, £ 36, Vols 1 — 3, Berlín, 1921 — 23.

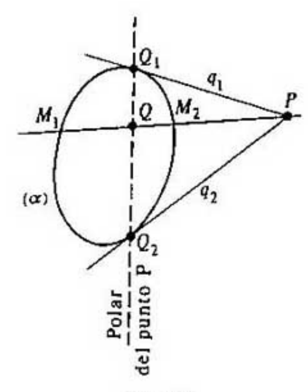


Fig. 119

que se apunta detalladamente de forma que sigue:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Diremos que los puntos P y Q están armónicamente situados respecto a la línea de segundo orden dada (α), si el par de puntos P, Q está armónicamente conjugado con el par de puntos M_1, M_2, en los cuales la referida línea atraviesa a la recta PQ (fig. 119).

El lugar geométrico de los puntos armónicamente situados con el punto P respecto a una línea de segundo orden se llama POLAR *del punto P respecto a esta línea.*

Ahora vamos a demostrar que la polar es línea recta. Con este fin deduzcamos la ecuación de la polar.

Preliminarmente, procuremos obtener una condición para las coordenadas p_i y q_i de los puntos P y Q, bajo la cual los puntos P, Q están armónicamente situados respecto a la línea (α). Según sabemos, las coordenadas x_i de cualquier punto M situado sobre la recta PQ, tienen forma de

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Hallaremos los puntos comunes de la línea (α) y la recta PQ si en calidad de λ elegimos las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación cuadrática

$$\Sigma a_{ik}(p_i + \lambda q_i)(p_k + \lambda q_k) = 0$$

que puede escribirse en forma de

$$\lambda^2\Sigma a_{ik}q_iq_k + \lambda(\Sigma a_{ik}p_iq_k + \Sigma a_{ik}p_kq_i) = \Sigma a_{ik}p_ip_k = 0$$

o, a consecuencia de la simetría $a_{ik} = a_{ki}$, en forma de

$$\lambda^2\Sigma a_{ik}q_iq_k + 2\lambda\Sigma a_{ik}p_ip_k + \Sigma a_{ik}p_ip_k = 0.$$

Conforme al § 119, dos pares de puntos p_i, q_i y $p_i + \lambda_1 q_i$, $p_i + \lambda_2 q_i$ están armónicamente conjugados si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$ ó $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. De aquí y a consecuencia del te-

orema de Viete tenemos la condición buscada de la posición armónica de los puntos P, Q respecto a la línea (α):

$$\Sigma a_{ik} p_i q_k = 0. \qquad (\beta)$$

Suponiendo que Q es un punto arbitrario armónicamente situado con el punto P respecto a la línea (α) y sustituyendo las notaciones de sus coordenadas q_1, q_2, q_3 por x_1, x_2, x_3, obtendremos la ecuación de la polar del punto P

$$\Sigma a_{ik} p_i x_k = 0 \qquad (\gamma)$$

con las coordenadas variables x_k. Apuntada detalladamente, la ecuación (γ) tiene forma de

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)x_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0. \qquad (\delta)$$

Vemos que ésta es una ecuación de primer grado; consiguientemente, la polar en efecto es una línea recta.

Si introducimos las notaciones $\Sigma a_{ik} p_i p_k = \Phi(p_1, p_2, p_3)$, entonces podemos apuntar la ecuación de la polar en forma de

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} x_3 = 0.$$

Según su forma, la misma no se diferencia de la ecuación, representada en coordenadas homogéneas, de la recta tangente a la línea $\Phi(p_1, p_2, p_3) = 0$ en el punto (p_1, p_2, p_3); esta ecuación es bien conocida en el análisis y en la geometría diferencial. Ya que la definición de la tangente y la deducción de su ecuación, corrientes en el análisis, se basan sólo en las propiedades de las líneas que tienen lugar en la geometría proyectiva, con derecho podemos afirmar el teorema siguiente.

TEOREMA 49. *Si el punto P se halla sobre una línea de segundo orden, entonces es polar suya la recta tangente a la línea dada en este punto.*

Luego, ha de señalarse un importante teorema relativo a las polares de puntos arbitrarios:

TEOREMA 50 (PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD EN LA TEORÍA DE LAS POLARES). *Si la polar del punto P pasa por el punto Q, entonces la polar del punto Q pasa por el punto P.*

La demostración de esta proposición se infiere directamente de la ecuación de la polar. En rigor, si p_i son las coordenadas del punto P, entonces la polar del referido punto tiene la ecuación

$$\Sigma a_{ik} p_i x_k = 0,$$

y si q_i son las coordenadas del punto Q, entonces la polar del punto Q tiene la ecuación

$$\Sigma a_{ik} q_i x_k = 0.$$

Dada la simetría $a_{ik} = a_{ki}$, tenemos:

$$\Sigma a_{ik} p_i q_k = \Sigma a_{ik} q_i p_k.$$

Por eso, la igualdad $\Sigma a_{ik} p_i q_k = 0$ que expresa la pertenencia del punto Q a la polar P, trae consigo la igualdad $\Sigma a_{ik} q_i p_k = 0$ que expresa la pertenencia del punto P a la polar Q.

De los teoremas 49 y 50 se desprende inmediatamente el siguiente

TEOREMA 51. *Las rectas que pasan por cierto punto P, tangentes a una línea de segundo orden, tienen puntos adherentes sobre la polar del punto P* (fig. 119).

Efectivamente, si q_1 es una tangente, y el punto Q_1 es su punto adherente, entonces, de acuerdo con el teorema 49, la recta q_1 es polar de su punto adherente Q_1; y, dado que la recta q_1 pasa por el punto P, a consecuencia del teorema 50, la polar del punto P pasa a través del punto Q_1, lo cual se afirma por el teorema.

Notemos que el teorema 51 puede demostrarse de una forma bien clara y evidente al considerar la tangente PQ_1 como límite de la secante PM_2M_1.

§ 132. Si la recta p es polar del punto P, entonces dicho punto P se llama *polo* de la recta p.

Es natural hacer la pregunta: ¿si toda recta posee un polo? Para responderla, comparemos la ecuación de una recta arbitraria

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (\varepsilon)$$

con la de una polar (δ). Manifiestamente, la recta (ε) será polar de cierto punto si su ecuación admite la forma de ecuación de polar, es decir, si existen tales números p_1, p_2, p_3 que

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= u_1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= u_2, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= u_3; \end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

entonces, precisamente el punto con las coordenadas p_1, p_2, p_3 será el polo de la recta (ε). El sistema (ζ) tiene soluciones para cualesquiera valores de u_1, u_2, u_3 si, y sólo si, el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

difiere de cero. Por eso, podemos enunciar la proposición siguiente:

Si una línea de segundo orden satisface la condición de $\Delta \neq 0$, entonces, respecto a tal línea, toda recta tiene un polo.

Llamaremos *degeneradas* las líneas para las cuales $\Delta = 0$ (una descripción clara y evidente se dará en el § 134).

Cabe señalar una importante circunstancia más. A base de la fórmula (δ) podemos componer la ecuación de la polar de cualquier punto (p_1, p_2, p_3). Sin embargo, en este caso no siempre resultará una ecuación determinada, a saber, no se excluye la posibilidad de obtener las igualdades

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= 0, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= 0, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Sin entrar en detalles de la investigación de este caso, hagamos notar sólo que si p_1, p_2, p_3 satisfacen las relaciones (*), entonces

$$\Sigma a_{ik} p_i q_k = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)p_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)p_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)p_3 = 0$$

y, por consiguiente, el punto (p_1, p_2, p_3) se halla sobre una línea de segundo orden. De tal suerte:

Pueden tener polar indeterminada sólo los puntos que están sobre una línea de segundo orden indicada.

Además, por ser incompatible el sistema (*) para $\Delta \neq 0$ (se excluye la solución $p_1 = p_2 = p_3 = 0$), se puede afirmar la proposición: *respecto a una línea de segundo orden regular, todos los puntos poseen polares determinadas.*

§ 133. Sea dada cualquier línea regular de segundo orden. Entonces, a todo punto del plano podemos poner en correspondencia una recta globalmente determinada, o sea, su polar y, a toda recta, un punto globalmente determinado, o sea, su polo.

Fácilmente se muestra que en este caso:

1) a puntos diferentes les corresponden rectas diferentes;

2) a rectas diferentes les corresponden puntos diferentes;

3) al punto de intersección de dos rectas le corresponde la recta que une sus polos (lo que se sigue del teorema 50);

4) a la recta que une dos puntos, le corresponde el punto de intersección de sus polares (lo que se desprende también del teorema 50).

En general, para la correspondencia señalada de los elementos geométricos, a toda figura A compuesta por puntos y rectas, le corresponde cierta figura A' que se llama *transformación polar* de la figura A respecto a una línea de segundo orden indicada.

Si la figura A' es la transformación polar de la figura A, entonces la A es, a su vez, la transformación polar de la A'; por ende, dos figuras de tal género se llaman también *recíprocamente polares*. La figura que coincide con su transformación polar, se llama *autopolar*. Por ejemplo, si tomamos un punto arbitrario P y sobre su polar p un punto arbitrario Q, designando con q la polar del punto Q; con R, el punto de intersección de las rectas p, q; con r, la polar del punto R (fig. 120), enton-

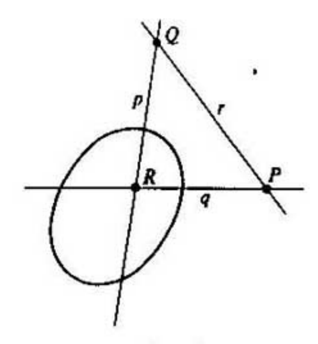


Fig. 120

$$\Sigma a_{ik}p_iq_k = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)p_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)p_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)p_3 = 0$$

y, por consiguiente, el punto (p_1, p_2, p_3) se halla sobre una línea de segundo orden. De tal suerte:

Pueden tener polar indeterminada sólo los puntos que están sobre una línea de segundo orden indicada.

Además, por ser incompatible el sistema (*) para $\Delta \neq 0$ (se excluye la solución $p_1 = p_2 = p_3 = 0$), se puede afirmar la proposición: *respecto a una línea de segundo orden regular, todos los puntos poseen polares determinadas.*

§ 133. Sea dada cualquier línea regular de segundo orden. Entonces, a todo punto del plano podemos poner en correspondencia una recta globalmente determinada, o sea, su polar y, a toda recta, un punto globalmente determinado, o sea, su polo.

Fácilmente se muestra que en este caso:

1) a puntos diferentes les corresponden rectas diferentes;

2) a rectas diferentes les corresponden puntos diferentes;

3) al punto de intersección de dos rectas le corresponde la recta que une sus polos (lo que se sigue del teorema 50);

4) a la recta que une dos puntos, le corresponde el punto de intersección de sus polares (lo que se desprende también del teorema 50).

En general, para la correspondencia señalada de los elementos geométricos, a toda figura A compuesta por puntos y rectas, le corresponde cierta figura A' que se llama *transformación polar* de la figura A respecto a una línea de segundo orden indicada.

Si la figura A' es la transformación polar de la figura A, entonces la A es, a su vez, la transformación polar de la A'; por ende, dos figuras de tal género se llaman también *recíprocamente polares.* La figura que coincide con su transformación polar, se llama *autopolar.* Por ejemplo, si tomamos un punto arbitrario P y sobre su polar p un punto arbitrario Q, designando con q la polar del punto Q; con R, el punto de intersección de las rectas p, q; con r, la polar del punto R (fig. 120), enton-

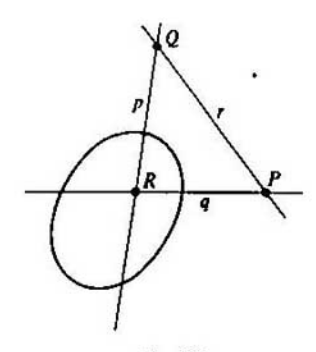


Fig. 120

ces, conforme al teorema 50, la recta q pasará por P, y la r, por P y Q; obtendremos *un trivértice autopolar* cada lado del cual es la polar del vértice opuesto y, consecuentemente, cada vértice es el polo del lado opuesto. Los trivértices autopolares se usarán mucho en el párrafo siguiente. Hagamos constar además que las figuras recíprocamente polares al mismo tiempo son también recíprocamente duales. Precisamente por medio de las transformaciones polares descubrió el principio de dualidad su autor Poncelet.

§ 134. Ahora nos dedicamos de lleno a resolver la tarea de determinar todas las líneas de segundo orden proyectivamente diferentes y de hallar el sistema completo de los invariantes de la ecuación de segundo grado.

Para hallar todas las líneas de segundo orden, vamos a construir tal sistema de coordenadas, respecto al cual la ecuación de una línea de segundo orden arbitrariamente definida tenga la forma más sencilla.

Sea dada una línea de segundo orden arbitraria k. Fuera de esta línea, elijamos cualquier punto P, designando con p su polar; conforme a la nota formulada al final del § 132, la recta p será globalmente determinada, pues P no pertenece a la línea. Después, introduzcamos un sistema de coordenadas proyectivas ubicando los vértices del triedro de coordenadas de modo que el vértice $A_1(1, 0, 0)$ coincida con el punto P, y los otros dos $A_2(0, 1, 0)$ y $A_3(0, 0, 1)$ se localicen de cualquier forma sobre la recta p; vamos a tomar arbitrariamente el punto de unidades $E(1, 1, 1)$. Sea

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0$$

la ecuación de la línea k en las coordenadas establecidas. Ahora, observemos que la recta p, por ser lado A_2A_3 del triedro de coordenadas, tiene la ecuación

$$x_1 = 0. \qquad (*)$$

Por otra parte, la ecuación de esta misma recta, siendo ésta polar del punto $A_1(1, 0, 0)$, puede componerse de acuerdo a la fórmula (δ) del § 131; colocando $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ en esta fórmula, obtendremos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0. \qquad (**)$$

Como las ecuaciones (*) y (**) determinan una misma recta, es necesario

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0.$$

De tal manera, la ecuación de la línea k en nuestras coordenadas adquiere la forma de

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Si $a_{23} \neq 0$, entonces proseguiremos la elección especial del triedro de coordenadas. A saber, elegiremos de cualquier modo el punto A_2 sobre la recta p, mas, a condición de que no pertenezca a la línea k; esto es posible, ya que en el caso de $a_{23} \neq 0$ sobre la recta $x_1 = 0$ existen los puntos $(0, x_2, x_3)$, para los cuales $a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \neq 0$. Como punto A_3 tomemos el punto de intersección de la recta p con la polar del A_2; la elección del punto A_3 ya no es arbitraria, pues, debido a que A_2 no está sobre la línea k, el referido punto tiene una polar determinada.

El triedro de coordenadas $A_1A_2A_3$ que hemos construido, es autopolar respecto a la línea k, es decir, cada lado suyo constituye la polar del lado opuesto. En parti-

cular, la recta A_1A_3 cuya ecuación es

$$x_2 = 0, \tag{***}$$

es la polar del punto $A_2(0, 1, 0)$; colocando $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0$ en la fórmula (δ) del § 131, obtendremos la ecuación de la polar del punto A_3 en forma de

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

o, como $a_{21} = a_{12} = 0$:

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \tag{****}$$

Al comparar las ecuaciones (***) y (****), hallaremos:

$$a_{23} = 0.$$

Por tanto, eligiendo adecuadamente el triedro de coordenadas, siempre podemos reducir la ecuación de la línea de segundo orden a la forma siguiente

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{I}$$

En lo que se refiere a la simplificación ulterior de esta ecuación, tenemos que distinguir tres casos:

1. Si $a_{22} = a_{33} = 0$, entonces la ecuación (I) tiene forma de

$$x_1^2 = 0, \tag{1}$$

resultando imposible su simplificación ulterior.

2. Si $a_{33} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, entonces transformando las coordenadas*)

$$x_1' = \sqrt{|a_{11}|}x_1, \quad x_2' = \sqrt{|a_{22}|}x_2, \quad x_3' = x_3$$

podemos reducir la ecuación (I) a la forma

$$\pm x_1'^2 \pm x_2'^2 = 0. \tag{2}$$

3. Si $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$, entonces después de la transformación

$$x_1' = \sqrt{|a_{11}|}x_1, \qquad x_2' = \sqrt{|a_{22}|}x_2, \qquad x_3' = \sqrt{|a_{33}|}x_3$$

hallaremos:

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 0. \tag{3}$$

Estas simplificaciones que se realizan teniendo ya elegido el triedro de coordenadas $A_1A_2A_3$, exigen, notoriamente, que se cambie el punto de unidades.

Las ecuaciones más sencillas (1), (2), (3) de la línea de segundo orden se llaman *canónicas.* Al cambiar adecuadamente la numeración de las coordenadas y al multiplicar por — 1 las referidas ecuaciones, podemos reducirlas a las que siguen:

$$x_1^2 = 0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 0, \\ x_1^2 - x_2^2 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

*) Hagamos recordar una vez más que estamos considerando sólo líneas reales y transformaciones reales (es decir, todos los coeficientes de las ecuaciones de líneas y de las fórmulas de transformaciones se suponen reales).

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

La ecuación (1) determina la recta $x_1 = 0$ tomada dos veces. Cada una de las ecuaciones (2) determina un par de rectas diferentes, a saber, la ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 0$ determina el par de rectas imaginarias $x_1 + ix_2 = 0, x_1 - ix_2 = 0$, y la ecuación $x_1^2 - x_2^2 = 0$, el par de rectas reales $x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0$.

Todas las líneas de segundo orden (1) y (2) son degeneradas, puesto que para las ecuaciones $x_1^2 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 0, x_1^2 - x_2^2 = 0$ se tiene, respectivamente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Las ecuaciones (3) determinan líneas regulares de segundo orden, ya que para estas ecuaciones

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Las líneas degeneradas, consiguientemente, son pares de rectas. A la primera de las ecuaciones (3) le corresponde una línea que no posee punto real alguno; ésta se llama *nula*. A la segunda de las ecuaciones (3) le corresponde una curva en el sentido propio de la palabra; ésta se llama *oval*. La curva oval divide el plano proyectivo (real) en dos regiones, entre las cuales la primera se caracteriza por la condición de

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$$

y se llama *interior*, la segunda, por la condición de

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0$$

y se llama *exterior*. Para tener una noción clara y evidente de la estructura de estas regiones, hagamos constar que la recta $x_3 = 0$ no atraviesa a la región interior, dado que para $x_3 = 0$ y para x_1, x_2 reales la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$ es imposible; por ende, para todos los puntos de la región interior $x_3 \neq 0$, y los podemos definir con las coordenadas no homogéneas $x = \dfrac{x_1}{x_3}$ y $y = \dfrac{x_2}{x_3}$. En las coordenadas no homogéneas, la región interior se caracteriza por la relación

$$x^2 + y^2 < 1$$

y, por consiguiente, es topológicamente equivalente al círculo euclidiano *); de aquí se deduce que la región exterior constituye la cinta de Moebius (véase el § 240).

---

*) Dos figuras se llaman *topológicamente equivalentes* si el conjunto de los puntos de una de ellas admite una aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos sobre el conjunto de los puntos de la otra. Por ejemplo, el cuadrado y el círculo son topológicamente equivalentes. También son equivalentes el cubo y la esfera. Al contrario, la esfera y el toro son topológicamente diferentes.

Ahora podemos aducir también el sistema completo de los invariantes de la ecuación general de la línea de segundo orden

$$\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0.$$

En primer lugar, vamos a señalar como invariante de la referida ecuación el rango de su matriz

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Aquí vamos a remitirnos a una proposición conocida en el álgebra (en la parte correspondiente a las formas cuadráticas) que dice: si los argumentos x_i de la forma cuadrática $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ se sustituyen por las funciones homogéneas lineales de los nuevos argumentos x_i', entonces, a condición de que el determinante compuesto por los coeficientes de dichas funciones difiere de cero, la forma cuadrática $\Sigma a_{ik}' x_i' x_k'$ resultante de tal transformación, tiene la matriz A' del mismo rango que la matriz A de la forma inicial:

$$\text{Rang } A' = \text{Rang } A.$$

Al examinar las ecuaciones (1), (2), (3), vemos que el rango de la matriz de la ecuación (1) es igual a 1, el de la matriz de las ecuaciones (2) es igual a 2, y el de la matriz de las ecuaciones (3) es igual a 3.

Dado que el rango de la matriz es invariante, en el caso de la ecuación de una línea arbitraria de segundo orden en cualesquiera coordenadas siempre podemos determinar según el rango de su matriz a cual de los tres grupos de ecuaciones canónicas (1), (2), (3) puede reducirse la misma.

Luego, es invariante de la ecuación $\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0$ la signatura de su primer miembro.

Se llama *signatura* de la forma cuadrática al valor absoluto de la diferencia en su representación canónica entre el número de términos positivos y el de términos negativos. La invariación de la signatura viene expresada por el teorema sobre la inercia de formas cuadráticas conocido en el álgebra: las representaciones canónicas de una forma cuadrática resultantes de diferentes transformaciones lineales reales poseen una misma signatura.

Si conocemos, además del rango de la matriz A, también la signatura del primer miembro de la ecuación general de una curva de segundo orden, podemos señalar no sólo a cual de los tres grupos (1), (2), (3) de ecuaciones canónicas puede reducirse la misma, sino también a que ecuación dentro del grupo correspondiente.

Consecuentemente, *el rango de la matriz y la signatura de la ecuación de una línea de segundo orden constituyen el sistema completo de sus invariantes.*

Vemos que la ecuación de la línea de segundo orden posee sólo dos invariantes, para cuyos valores de números enteros existen solamente cinco combinaciones diferentes; correspondientemente a esto, existe sólo cinco líneas de segundo orden proyectivamente diferentes, las demás pueden obtenerse a base de ellas por medio de transformaciones proyectivas.

Una clasificación de las líneas de segundo orden se ofrece en la tabla que sigue:

Forma canónica de la ecuación		Tipo de la línea	Rango	Signatura
$x_1^2 = 0$	Líneas degeneradas	Par de rectas coincidentes	1	1
$x_1^2 + x_2^2 = 0$		Par de rectas imaginarias	2	2
$x_1^2 - x_2^2 = 0$		Par de rectas reales	2	0
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Líneas regulares	Línea nula	3	3
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$		Curva oval	3	1

A diferencia de las líneas de segundo orden, las de órdenes superiores siempre tienen invariantes continuales, y aun en la clase de la línea de tercer orden hay una infinidad de líneas proyectivamente diferentes.

§ 135. Ahora vamos a exponer en breves palabras los más principales hechos de la teoría de los haces de segunda clase.

La ecuación general del haz de segunda clase tiene forma de

$$\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0 \tag{α}$$

o, apuntada más detalladamente,

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0;$$

aquí u_1, u_2, u_3 son las coordenadas variables de una recta arbitraria del haz. Diremos que las rectas s y t están armónicamente situadas respecto al haz de segunda clase dado (α), si el par de rectas s y t es armónico conjugado con el par de rectas del haz (α) que pasan por el punto común de las rectas s y t.

A base de las coordenadas s_i, t_i de las rectas s, t, la condición de su posición armónica respecto al haz (α) puede apuntarse en forma de

$$\Sigma a_{ik} s_i t_k = 0. \tag{β}$$

Esta relación resulta mediante la deducción dual de la relación (β) del § 131.

De aquí se infiere que el cúmulo de las rectas armónicamente situadas con la recta fija s respecto al haz (α), se determina por la ecuación

$$\Sigma a_{ik} s_i u_k = 0, \tag{γ}$$

donde u_k son las coordenadas variables (es decir, las coordenadas de una recta arbitraria del cúmulo sujeto al examen).

La ecuación (γ) es una ecuación de primer grado, consecuentemente, *las rectas armónicamente situadas con la recta fija s, constituyen el haz de primera clase; su centro S se llama polo de la recta s respecto al haz de segunda clase indicado.*

Si introducimos la notación $\Sigma a_{ik} s_i s_k = \Phi(s_1, s_2, s_3)$, entonces la ecuación ($\gamma$) puede escribirse en forma de

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_1} u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial s_3} u_3 = 0; \qquad (\delta)$$

los coeficientes $\frac{\partial \Phi}{\partial s_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial s_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial s_3}$ de la ecuación (δ) son las coordenadas del punto S.

El polo de una recta respecto al haz de segunda clase es una imagen dual de la polar del punto con respecto a la línea de segundo orden. El haz de segunda clase (α) constituye una familia de rectas definidas por la ecuación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (^*)$$

cuyos coeficientes u_k están enlazados por la condición

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Busquemos los puntos característicos de esta familia, es decir, los puntos de adherencia de las rectas de la familia a la envolvente. Según las reglas de la geometría diferencial, el punto característico de la recta (u_1, u_2, u_3) se determina por la ecuación (*) con la relación adicional

$$x_1du_1 + x_2du_2 + x_3du_3 = 0, \qquad (^{**})$$

donde du_1, du_2, du_3 están enlazadas por la igualdad

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} du_3 = 0. \qquad (^{***})$$

Al comparar las igualdades (**) y (***) y al tomar en consideración que, aparte de la condición (***), no existen otras restricciones para las magnitudes du_1, du_2, du_3, podemos concluir que x_1, x_2, x_3 son proporcionales a los números $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}$. Expresado en otros términos, $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}$ son las coordenadas del punto característico de la recta (u_1, u_2, u_3).

Más arriba, en el § 131, hicimos notar que las coordenadas de la tangente en el punto (p_1, p_2, p_3) de la línea de segundo orden $\Phi(p_1, p_2, p_3) = 0$ son los números $\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial p_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial p_3}$. Vemos que las coordenadas de los puntos característicos del haz de segunda clase se determinan a base de la ecuación del referido haz, del mismo modo que las de las rectas tangentes de la línea de segundo orden se determinan según la ecuación de dicha línea. Esto corresponde al hecho de que los puntos característicos del haz son imágenes duales de las tangentes de la línea.

Hagamos constar también que las expresiones $\frac{\partial \Phi}{\partial s_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial s_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial s_3}$ de las coordenadas del polo de la recta (s_1, s_2, s_3), en forma de escribirse, no difieren de las expresiones de las coordenadas del punto característico. De aquí sigue el teorema dual del teorema 49:

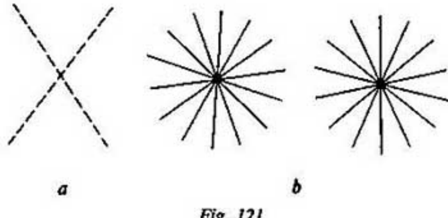


Fig. 121

Si la recta s pertenece a un haz de segunda clase, entonces el punto característico es polo suyo.

Al igual que las curvas de segundo orden, los haces de segunda clase se dividen en degenerados y regulares; los haces degenerados se caracterizan por la igualdad $\Delta = 0$, donde Δ es un determinante de tercer orden compuesto por los coeficientes de la ecuación del haz. El sentido geométrico de la degeneración de un haz de segunda clase se establece fácilmente a base del método de dualidad, si se conoce el sentido geométrico de la degeneración de la línea de segundo orden; por cuanto la línea degenerada de segundo orden constituye una colección de puntos pertenecientes a cualquiera de dos rectas determinadas (fig. 121, *a*), el haz degenerado de segunda clase constituye una colección de rectas pertenecientes a cualquiera de dos puntos determinados (fig. 121, *b*). Dicho en otros términos, el haz degenerado de segunda clase es un par de haces de primera clase (que pueden ser diferentes o coincididos, reales o imaginarios).

En cuanto a los haces regulares de segunda clase, éstos están enlazados bien sencillamente con las curvas regulares de segundo orden; este enlace se expresa por el teorema que sigue.

TEOREMA 52. *El cúmulo de tangentes de una curva regular de segundo orden es un haz regular de segunda clase; la envolvente del haz regular de segunda clase es una curva regular de segundo orden.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la primera parte de este teorema; entonces, la validez de la segunda será asegurada por el principio de dualidad. Sea

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

la ecuación de la curva k de segundo orden; p_1, p_2, p_3, las coordenadas del punto de su adherencia a la recta $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Al comparar la ecuación general de la tangente

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)x_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0$$

con la ecuación $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, obtendremos las igualdades

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= \alpha u_1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= \alpha u_2, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= \alpha u_3, \end{aligned} \qquad (*)$$

donde α ($\neq 0$) es un factor arbitrario de proporcionalidad. Además, ya que el punto de adherencia pertenece a la tangente,

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0. \qquad (**)$$

Si expresamos las magnitudes p_1, p_2, p_3 a partir de las ecuaciones (*) (esta posibilidad viene asegurada por la desigualdad $\Delta \neq 0$) y sustituimos sus expresiones en la relación (**), obtendremos cierta dependencia entre u_1, u_2, u_3 que puede considerarse como condición de la adherencia de la recta con las coordenadas (u_1, u_2, u_3) a la línea k dada. La misma dependencia puede obtenerse igualando a cero el determinante del sistema compuesto por las ecuaciones (*) y (**):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & u_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (***)$$

La igualdad (***) caracteriza las coordenadas de la tangente, por tanto, siendo ecuación con las coordenadas variables u_1, u_2, u_3, la misma determina un haz de tangentes a la línea k.

Vemos que (***) es una ecuación de segundo grado. Luego, las tangentes a una línea regular de segundo orden en efecto constituyen un haz de segunda clase.

Además, hay que demostrar que el referido haz es regular.

A este fin, observemos que al desarrollar el primer miembro de la ecuación (***), obtenemos la forma cuadrática

$$A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3 + A_{33}u_3^2 = 0$$

cuyos coeficientes A_{ik} son menores de los elementos a_{ik} de la matriz

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Por eso, si dividimos el primer miembro de la ecuación del haz por la magnitud Δ y ponemos $\frac{A_{ik}}{\Delta} = a^*_{ik}$, entonces su ecuación tomará forma de

$$a^*_{11}u_1^2 + 2a^*_{12}u_1u_2 + a^*_{22}u_2^2 + 2a^*_{13}u_1u_3 + 2a^*_{23}u_2u_3 + a^*_{33}u_3^2 = 0,$$

y la matriz A^* de esta ecuación será inversa de la A. Pero entonces, según se sabe, entre los determinantes Δ y Δ^* de las matrices A y A^* tendrá lugar la relación $\Delta\Delta^* = 1$, de donde se sigue que $\Delta^* \neq 0$, lo cual había que demostrar.

El teorema demostrado puede expresarse también en tales términos: *para toda imagen regular de segundo grado, la clase y el orden coinciden* (= 2).

En cuanto a las imágenes de grados superiores, tal afirmación es incorrecta.

Como las curvas regulares de segundo orden son también de segunda clase, a través de todo punto del plano, a una recta de segundo orden se puede trazar dos rectas tangentes (diferentes o múltiples, reales o imaginarias).

§ 136. Los métodos de investigar las imágenes de segundo grado que hemos expuesto para el caso de la geometría bidimensional, naturalmente, se generalizan para el caso tridimensional y conducen a resultados análogos. Precisamente, en el espacio proyectivo, al igual que sobre el plano proyectivo, las imágenes de segundo grado se caracterizan de un modo exhaustivo por los valores de números enteros sólo de dos invariantes: del rango de la matriz principal y de la signatura del primer miembro de la ecuación.

En el espacio proyectivo existe solamente un número finito de superficies de segundo orden y de radiaciones de segunda clase proyectivamente diferentes, entre los cuales los demás se pueden obtener por medio de transformaciones proyectivas.

Por ejemplo, toda superficie de segundo orden, en función del rango y de la signatura de su ecuación

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

puede transformarse proyectivamente en una de las superficies aducidas en la tabla que sigue:

Rango = 1	Signatura	Rango = 2	Signatura	Rango = 3	Signatura	Rango = 4	Signatura
$x_1^2=0$	1	$x_1^2+x_2^2=0$	2	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	3	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$	4
		$x_1^2-x_2^2=0$	0	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	1	$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$	2
						$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$	0

La ecuación $x_1^2 = 0$ determina el plano tomado dos veces $x_1 = 0$. Cada una de las ecuaciones $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ determina un par de planos, además, la ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 0$ determina un par de planos imaginarios $x_1 + ix_2 = 0$ y $x_1 - ix_2 = 0$, y la ecuación $x_1^2 - x_2^2 = 0$, un par de planos reales $x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 - x_2 = 0$.

Cada una de las ecuaciones $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ determina un cono con el vértice en el punto $A_4(0, 0, 0, 1)$, es decir, una superficie compuesta por las rectas que pasan por el punto $A_4(0, 0, 0, 1)$. En rigor, si cierto punto $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ se halla, por ejemplo, sobre la superficie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, entonces $x_1^{02} + x_2^{02} - x_3^{02} = 0$; pero en tal caso, para las coordenadas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ de cualquier punto $\bar{M}$ de la recta A_4M_0 se observa la relación $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = 0$, de lo cual podemos cerciorarnos fácilmente expresando paramétricamente las coordenadas $\bar{x}_i$

$$\bar{x}_1 = 0 + \lambda x_1^0 = \lambda x_1^0, \qquad \bar{x}_3 = 0 + \lambda x_3^0 = \lambda x_3^0,$$
$$\bar{x}_2 = 0 + \lambda x_2^0 = \lambda x_2^0, \qquad \bar{x}_4 = 1 + \lambda x_4^0.$$

Efectivamente, de estas relaciones se tiene:

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = \lambda^2(x_1^{02} + x_2^{02} - x_3^{02}) = 0.$$

De tal forma, todo punto $\bar{M}$ de la recta A_4M_0 pertenece a la superficie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, es decir, la recta que une el punto A_4 con cualquier punto de la superficie, se halla por entero sobre la referida superficie; precisamente esta circunstancia caracteriza el cono con el vértice A_4. Evidentemente, el cono $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ no tiene generatrices reales; el mismo se llama *nulo*. El cono $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ posee una infinidad de generatrices reales y se llama *ordinario*.

Todas las superficies enumeradas se llaman *degeneradas*; la anulación del determinante de la matriz de su ecuación es indicio de la superficie degenerada.

Las superficies regulares de segundo orden aparecen en la última columna de la tabla ofrecida más arriba.

La primera de ellas no contiene punto real alguno y se llama *nula*.

La segunda se llama *oval*; la misma equivale topológicamente a la esfera euclidiana. Para cerciorarnos de esto, hemos de notar que para todos los puntos de la superficie $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ es necesario $x_4 \neq 0$, por eso se puede determinarlos con las coordenadas no homogéneas $x = \dfrac{x_1}{x_4}$, $y = \dfrac{x_2}{x_4}$, $z = \dfrac{x_3}{x_4}$; pero en las coordenadas no homogéneas la ecuación de la superficie que estamos considerando, tiene forma de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y no difiere de la esfera euclidiana.

La tercera superficie se llama *anular*; la misma equivale topológicamente al toro. Esto es fácil de entender si hacemos notar que la superficie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ está cubierta por líneas rectas. En efecto, dos ecuaciones de primer grado

$$\left.\begin{aligned} \mu(x_1 + x_3) &= \lambda(x_2 + x_4), \\ -\lambda(x_1 - x_3) &= \mu(x_2 - x_4) \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

para cualesquiera λ y μ (que no sean iguales a cero a un mismo tiempo) determinan una recta que se halla sobre la superficie sujeta al examen, dado que la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ es un corolario de las ecuaciones (*); luego, a través de todo punto de la superficie pasa una, y sólo una recta del sistema (*), puesto que para cualesquiera $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ que satisfacen la condición $x_1^{02} + x_2^{02} - x_3^{02} - x_4^{02} = 0$, se puede hallar una, y sólo una relación $\lambda_0 : \mu_0$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_0(x_1^0 + x_3^0) &= \lambda\ (x_2^0 + x_4^0), \\ -\lambda_0(x_1^0 - x_3^0) &= \mu_0(x_2^0 - x_4^0). \end{aligned}$$

Consiguientemente, para $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ la recta (*) pasa por el punto preestablecido $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$. De tal suerte, las rectas reales (*) cubren una sola vez y enteramente la superficie. Mas, el sistema de dichas rectas forma un «tubo» cerrado, ya que, de una parte, la recta proyectiva es cerrada y, de otra, las rectas del sistema (*) pasan por una curva oval, a saber, la cortadura de la superficie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ por el plano $x_4 = 0$.

Además del sistema (*), la superficie dada está cubierta también por un sistema de rectas definidas por la ecuación

$$\left.\begin{aligned} \mu(x_1 + x_3) &= \lambda(x_2 - x_4), \\ -\lambda(x_1 - x_3) &= \mu(x_2 + x_4). \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Las rectas (*) y (**) se llaman *generatrices rectilíneas* de la superficie.

Hagamos constar que la superficie del espacio euclidiano bien conocida por el lector, o sea, el hiperboloide de una hoja, se convierte en una superficie anular del espacio proyectivo al completarse el espacio euclidiano por elementos infinitamente alejados.

14. Teoremas constructivos y problemas de la geometría proyectiva

§ 137. En la presente sección haremos conocer al lector ciertos teoremas elementales de la geometría proyectiva relativos a las líneas de segundo orden. Los mismos son de aplicación variada en los problemas de construcción euclidianos.

El lector puede hacerse la pregunta ¿si tenemos derecho a aplicar los teoremas de la geometría proyectiva a la investigación de las figuras del plano euclidiano? Para cerciorarnos de la posibilidad de tal aplicación, basta recordar que el plano euclidiano se convierte en proyectivo agregándosele elementos infinitamente alejados. De tal manera, todo hecho proyectivo puede interpretarse sobre el plano de Euclides si éste se concibe completado por una recta infinitamente alejada.

Como ejemplo, consideremos la relación compleja de cuatro puntos de una recta y la de cuatro rayos de un haz desde el punto de vista de la geometría elemental.

Sean A, B, C, D cuatro puntos cualesquiera de la recta euclidiana a. Sobre el plano euclidiano que contiene la recta a, introduzcamos cierto sistema de coordenadas cartesianas. Por razón de comodidad, hagamos coincidir el eje x con la recta a; denotemos con x_a, x_b, x_c, x_d las abscisas de los puntos A, B, C, D. Observemos que el sistema cartesiano sobre el plano euclidiano es al mismo tiempo un sistema proyectivo, pues en las coordenadas cartesianas todas las rectas tienen ecuaciones de primer grado. Por eso

$$(ABCD) = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} : \frac{x_d - x_a}{x_b - x_d}$$

(véase el § 115). Mas, en las coordenadas cartesianas $x_c - x_a = AC$, $x_b - x_c = CB$, $x_d - x_a = AD$, $x_b - x_d = DB$, donde AC, CB, AD y DB denotan las longitudes de los segmentos con los extremos A y C, C y B, etc., tomadas con los signos correspondientes. Por consiguiente,

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}. \qquad (*)$$

La relación compleja de cuatro rayos a, b, c, d que pasan por un mismo punto O, en la geometría elemental puede definirse por la fórmula

$$(abcd) = \frac{\operatorname{sen}(ac)}{\operatorname{sen}(cb)} : \frac{\operatorname{sen}(ad)}{\operatorname{sen}(db)} \qquad (**)$$

donde (ac), (cb), etc., designan los ángulos entre los rayos a y c, c y b, etc., tomados con los signos correspondientes *).

Para cerciorarnos de la validez de la fórmula (**), cortemos los rayos a, b, c, d por la recta u, denotando con A, B, C, D los puntos de intersección, con h, la longitud de la perpendicular bajada del punto O sobre la recta u (fig. 122). Expresando de dos modos el área del triángulo OAC, obtendremos:

$$\frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \operatorname{sen}(ac).$$

Análogamente, del triángulo OCB

$$\frac{1}{2} CB \cdot h = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \operatorname{sen}(cb).$$

De aquí

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\operatorname{sen}(ac)}{\operatorname{sen}(cb)}. \tag{1}$$

Del mismo modo, considerando los triángulos OAD y ODB, hallaremos:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\operatorname{sen}(ad)}{\operatorname{sen}(db)}. \tag{2}$$

De las relaciones (1) y (2) tenemos:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\operatorname{sen}(ac)}{\operatorname{sen}(cb)} : \frac{\operatorname{sen}(ad)}{\operatorname{sen}(db)}.$$

Después de esto queda claro que la fórmula (*) es correcta, dado que la relación compleja $(abcd)$, según la definición, es un número igual a $(ABCD)$ (véase el § 116).

Acabamos de mostrar ejemplos de la interpretación métrica de los objetos proyectivos. A su vez, las proposiciones de la geometría elemental, aun las que tienen carácter métrico, admiten la interpretación proyectiva y se presentan de forma distinta al ser apreciadas desde el punto de vista proyectivo.

Por ejemplo, el teorema de la geometría elemental: la recta que une el punto de intersección de las diagonales del trapecio con el de intersección de los lados no paralelos, divide por la mitad los lados paralelos del trapecio, tiene un claro sentido proyectivo, a saber: el punto medio del segmento, junto con el punto infinitamente alejado, separa armónicamente el par de sus extremos. En rigor, al considerar el tra-

---

*) A saber, elijamos la dirección positiva de los giros alrededor del punto O y, sobre cada recta a, b, c, d introduzcamos la dirección positiva. Entonces, por (ab), por ejemplo, entenderemos la magnitud del ángulo constituido por la dirección positiva de la recta b y la dirección positiva de la recta a; estimaremos positiva esta magnitud si dentro del ángulo indicado el paso de a a b se efectúa en dirección positiva alrededor de O, estimándola negativa en el caso contrario. Puede decirse que el segundo miembro de la igualdad (**) no depende de cómo se eligen los giros positivos alrededor de O ni de qué dirección está elegida como positiva sobre cada una de las rectas a, b, c, d.

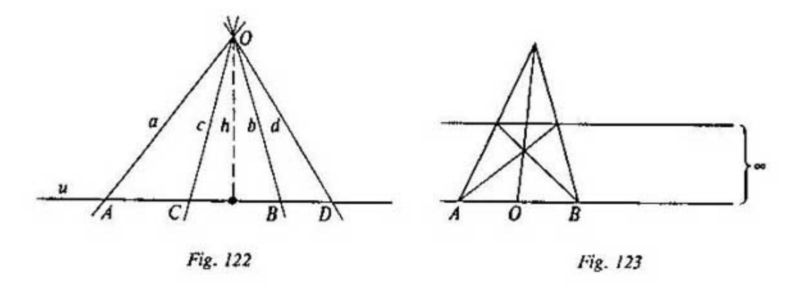


Fig. 122

Fig. 123

pecio que aparece en la fig. 123, es fácil identificarlo como un cuadrivértice completo con un punto diagonal infinitamente alejado; de las propiedades armónicas del referido cuadrivértice se infiere que el par de puntos A, B está armónicamente separado por el par de puntos O, ∞. En otros términos puede decirse: el centro euclidiano del segmento coincide con su centro proyectivo.

Según se señaló algo más arriba, todo sistema cartesiano de coordenadas sobre el plano euclidiano es a la vez un sistema proyectivo. De aquí se deduce que las líneas de segundo orden que se estudian en la geometría analítica, son los mismos objetos de que tratamos en las secciones precedentes, mejor dicho, llegan a serlo una vez completado por elementos infinitamente alejados el plano euclidiano. Efectivamente, si, a partir de las coordenadas cartesianas x, y, introducimos las coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, suponiendo $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$, entonces la ecuación general de la curva de segundo orden en las coordenadas cartesianas

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

tomará forma de

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

coincidiendo con la que estudiamos más arriba.

A continuación se ofrece una serie de proposiciones y problemas; todos ellos pueden apreciarse como proposiciones y problemas de la geometría elemental.

§ 138. El presente párrafo insertado en esta sección ocupa una posición completamente aislada y no está ligado con el demás material de la sección. Aquí se exponen proposiciones de carácter auxiliar que serán usadas mucho más tarde (en el cap. IX).

En el plano euclidiano, con un sistema de coordenadas cartesianas dado sobre él, consideremos alguna circunferencia k. Sea dada una aplicación biunívoca de la región interior de la circunferencia k sobre sí misma; denotemos con el símbolo φ esta aplicación. Supongamos que φ aplica los puntos que se hallan sobre una misma recta, en puntos que también se hallan en una misma recta, y los puntos que no están sobre una misma recta, en puntos que tampoco lo están. Dicho de otra forma, suponemos que la aplicación φ hace pasar toda cuerda de la circunferencia k también a cuerda y cuerdas diferentes a cuerdas diferentes.

Bajo estas condiciones, para la aplicación φ las coordenadas de la imagen se expresan a través de las de la preimagen mediante las fórmulas

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \tag{1}$$

donde a_1, b_1, ... , γ son ciertas constantes que satisfacen la desigualdad

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea P un punto arbitrario que se halla dentro de k; a, b, c, d, cuatro cuerdas que pasan por P. Supongamos que a, b separan armónicamente a c, d. Entonces se puede construir un cuadrivértice G cuyos vértices están sobre las cuerdas a, b, y los puntos diagonales, sobre las cuerdas c, d. Debido a la aplicación φ, el punto P se convertirá en cierto punto P', las cuerdas a, b, c, d, en ciertas cuerdas a', b', c', d'. El cuadrivértice G se aplicará en el cuadrivértice G' cuyos vértices estarán sobre las cuerdas a', b', y los puntos diagonales, sobre las c', d'.

Luego, las cuerdas a', b' separan armónicamente las c', d'. Vemos que a causa de la aplicación φ, toda cuaterna armónica de cuerdas tiene por imagen también una cuaterna armónica de cuerdas. Por consiguiente, todo haz de cuerdas se aplica proyectivamente en su haz de cuerdas correspondiente.

Dentro de k, elijamos cuatro puntos A, B, C, D así que ningunos tres de ellos estén sobre una misma recta. Sean A', B', C', D' las imágenes de los referidos puntos; en virtud de las condiciones impuestas sobre la aplicación φ, entre los puntos A', B', C', D' no hay tres que estén sobre una misma recta.

Conforme al teorema 37, existe una aplicación proyectiva de todo el plano (completado por puntos infinitamente alejados) sobre sí mismo, que hace pasar los puntos A, B, C, D en los puntos A', B', C', D'. Designemos con ψ esta aplicación. Demostremos que dentro de la circunferencia k las aplicaciones φ y ψ coinciden, es decir, para cualquier punto interior a k, la imagen respecto a φ coincide con la imagen respecto a ψ.

Dentro de la circunferencia k, tomemos un punto M arbitrario, denotando con M' y M'' sus imágenes respecto a φ y ψ. Tanto la aplicación φ como la ψ aplican proyectivamente el haz de cuerdas con el centro A sobre el haz de cuerdas con el centro A', aplicándose en el primer caso la cuerda AM sobre la cuerda $A'M'$, en el segundo, sobre la $A'M''$. En ambos casos la terna de cuerdas diferentes AB, AC, AD del haz con el centro A se aplica en una misma terna de cuerdas diferentes $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ del haz con el centro A'; mas, según el teorema 18, la aplicación proyectiva de haces se define unívocamente fijando tres pares de elementos correspondientes. Por tanto, la cuerda $A'M'$ debe coincidir con la $A'M''$, es decir, los puntos M' y M'' deben hallarse junto con el punto A' sobre una misma recta. Razonando análogamente, estableceremos que los puntos M' y M'' deben estar junto con el punto B' sobre una misma recta, y junto con el C', sobre una misma recta también. Dado que A', B', C' se hallan sobre rectas diferentes, de las conclusiones precitadas se deduce que M' y M'' coinciden. Así pues, dentro de la circunferencia k la aplicación φ coincide con cierta aplicación proyectiva del plano indicado (completado por elementos infinitamente alejados) sobre sí mismo. De acuerdo al §112, las coordenadas cartesianas de la imagen y de la preimagen de cualquier aplicación proyectiva están enlazadas por las fórmulas del tipo de (1) bajo la condición (2). Así queda demostrada nuestra afirmación.

De la demostración aducida se desprende también la proposición que sigue.

Sean M_1, M_2 dos puntos arbitrarios interiores a la circunferencia k, M_1', M_2', sus imágenes respecto a φ; sean P, Q y P', Q' puntos en que las rectas M_1M_2 y $M_1'M_2'$ atraviesan la circunferencia k, denotados de forma que el orden de sucesión de los puntos P, Q, M_1, M_2 sobre la

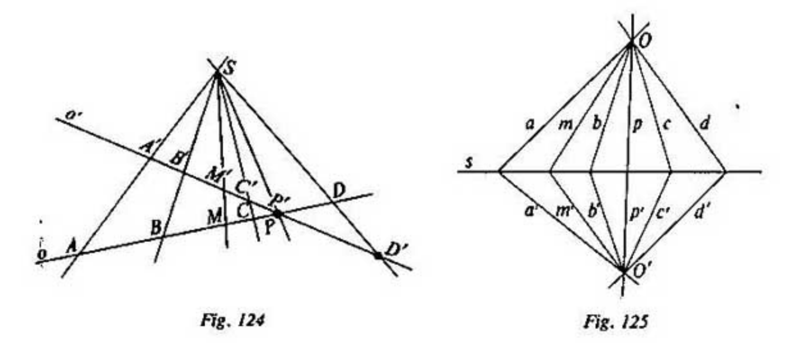


Fig. 124

Fig. 125

recta M_1M_2 es análogo al de los puntos P', Q', M_1', M_2' sobre la recta $M_1'M_2'$. Entonces

$$(P'Q'M_1'M_2') = (PQM_1M_2). \tag{3}$$

En efecto, bajo las condiciones especificadas, los puntos P', Q', M_1', M_2' son imágenes de los puntos P, Q, M_1, M_2 respecto a la aplicación ψ. Y, por ser proyectiva la aplicación ψ, la relación compleja de los puntos PQM_1M_2 es igual a la de sus imágenes $P'Q'M_1'M_2'$.

§ 139. CRITERIO DE LA CORRESPONDENCIA DE PERSPECTIVA. En lo sucesivo, tendremos sólo correspondencias proyectivas entre dos rectas y entre dos haces; todos los objetos a estudiar se supondrán pertenecientes a un mismo plano. Para nosotros revestirán una importancia especial las llamadas *correspondencias de perspectiva*. La correspondencia entre los puntos de dos rectas se llama correspondencia de perspectiva si las rectas que unen los puntos homólogos, pasan por un mismo punto del plano (llamado *centro de la perspectiva;* fig. 124).

La correspondencia entre los rayos de dos haces se llama correspondencia de perspectiva si los puntos de intersección de los rayos homólogos están sobre una misma recta (llamada *eje de perspectiva*; fig. 125).

Patentemente, toda correspondencia de perspectiva es proyectiva (a consecuencia del teorema 6 del § 86; véase también el § 103). Sin embargo, no toda correspondencia proyectiva ni mucho menos es de perspectiva.

Los dos teoremas que siguen, proporcionan un criterio útil para distinguir las correspondencias de perspectiva entre todas las correspondencias proyectivas.

TEOREMA 53. *Para que la correspondencia proyectiva entre los puntos de dos rectas sea una correspondencia de perspectiva, es necesario y suficiente que al punto de intersección de las referidas rectas, considerado como elemento de una de ellas, le corresponda el mismo punto en la otra recta.*

TEOREMA 54. *Para que la correspondencia proyectiva entre los rayos de dos haces sea una correspondencia de perspectiva, es necesario y suficiente que al rayo común de los referidos haces, considerado como elemento de uno de ellos, le corresponda el mismo rayo en el otro haz.*

Es suficiente demostrar uno de los dos teoremas: entonces la validez del otro será asegurada por el principio de dualidad.

Aduzcamos la demostración del teorema 53.

La demostración de la necesidad se visualiza inmediatamente: en rigor, si entre las rectas o y o' está establecida una correspondencia de perspectiva con el centro de la perspectiva S, entonces los pares de puntos homólogos se determinan por la intersección de las rectas o y o' con los rayos que parten de S; pero el rayo que pasa por el punto común de las rectas o y o', manifiestamente, determina el par de puntos correspondientes P, P' que coinciden uno con otro (fig. 124).

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Entre los puntos de la recta o y o', sea establecida una correspondencia proyectiva de modo que al punto P de la recta o, en que se cruzan las rectas o y o', le corresponde sobre la recta o' el punto P' que coincide con el punto P.

Sobre la recta o, tomemos dos puntos A y B y, sobre la o', sus puntos correspondientes A' y B', denotando con S el punto de intersección de las rectas AA', BB'. Luego, designemos con M un punto arbitrario de la recta o, con $M' = f(M)$, su punto homólogo en la correspondencia dada, con $M^* = \varphi(M)$, el punto en que el rayo SM atraviesa a la recta o'. La correspondencia $M^* = \varphi(M)$, según la construcción, es una correspondencia de perspectiva (con el centro de la perspectiva S) y, consecuentemente, también proyectiva; además, notoriamente, los puntos A, B, P tienen sus homólogos A', B', P' en la correspondencia $M^* = \varphi(M)$. Así tenemos correspondencias proyectivas $M' = f(M)$ y $M^* = \varphi(M)$ con tres pares de puntos homólogos A, A', B, B' y P, P'. Según el teorema 15, dichas correspondencias no pueden ser diferentes, es decir, $M' = M^*$. De aquí se sigue que la correspondencia dada $M' = f(M)$ es de perspectiva, con el centro de la perspectiva S. El teorema queda demostrado.

§ 140. CONSTRUCCIÓN GRÁFICA DE LAS CORRESPONDENCIAS PROYECTIVAS A BASE DE TRES PARES DE ELEMENTOS CORRESPONDIENTES DADOS. Sobre la recta o, sean dados tres puntos A, B, C, sobre la otra recta o', tres puntos A', B', C'. Sabemos que existe una única aplicación proyectiva $M' = f(M)$ de la recta o sobre la o', que hace pasar los puntos A, B, C en los A', B', C', respectivamente. Ahora nuestro objeto es señalar el procedimiento gráfico de construir el punto correspondiente $M' = f(M)$ sobre la recta o' de todo punto M de la recta o. A este fin, unamos mediante la recta dos puntos correspondientes cualesquiera entre los dados, por ejemplo, B y B', y tomemos los puntos S y S' sobre la recta que une (fig. 126). Luego, establezcamos correspondencia entre los rayos de los haces con los centros S y S', estimando el rayo $S'M'$ del haz S' como rayo homólogo del SM del haz S. Por ser proyectiva la correspondencia $M' = f(M)$, la correspondencia entre los rayos de los haces S y S' que hemos establecido, será proyectiva. Pero, por añadidura, será una correspondencia de perspectiva, ya que al rayo SB del haz S le corresponde el rayo $S'B'$ del haz S', que coincide con él (véase el teorema 54). Por tanto, todos los rayos correspondientes de los haces S y S' se cruzan sobre una misma recta; ésta es el eje de la perspectiva. De aquí tenemos la construcción requirida: después de elegir los puntos S y S', trazamos los rayos SA, $S'A'$, SC, $S'C'$ y construimos la recta A^*C^* según se muestra en la fig. 126. Precisamente esta última será el eje de la perspectiva de los haces S y S'.

A fin de construir sobre la recta o' el punto M' correspondiente al punto M de la recta o, es suficiente trazar el rayo SM y unir el punto M^* en que éste cruzará a la

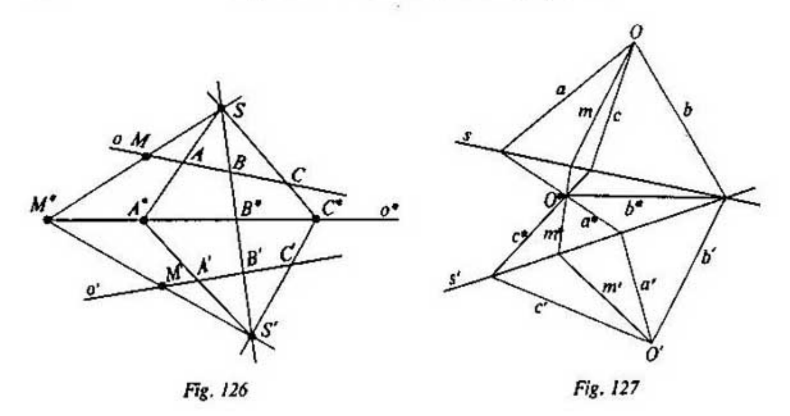


Fig. 126 *Fig. 127*

recta A^*C^*, con el punto S'; la recta $S'M^*$ atravesará a la recta o' en el punto buscado $M' = f(M)$.

La construcción de los rayos proyectivamente correspondientes de dos haces es dual de la construcción recién descrita. La vamos a exponer sin explicaciones detalladas.

Sean O y O' los centros de dos haces entre cuyos rayos está establecida una correspondencia proyectiva y se requiere construir el rayo correspondiente $m' = f(m)$ del haz O' a base de un rayo arbitrario m del haz O; se conocen tres rayos a, b, c del haz O y sus tres rayos correspondientes a', b', c' en el haz O'. Para ello, hay que trazar arbitrariamente dos rectas s y s' a través del punto de intersección de cualesquiera rayos correspondientes de los indicados, por ejemplo, a través del punto de intersección de los rayos b y b' (fig. 127); luego, hay que unir mediante la recta el punto de intersección de las rectas a, s con el punto de intersección de las rectas a', s', y mediante la recta el punto de intersección de las rectas c, s con el punto de intersección de las rectas c', s'; las rectas trazadas de esta forma, en su intersección determinarán el punto O^*. Después de esto la construcción del rayo $m' = f(m)$ se efectúa así como se muestra en la fig. 127: el punto en que el rayo m corta a la recta s, se une con el punto O^*, y se determina el punto de intersección de la recta que los une, con la s'; precisamente el rayo que va desde O' al referido punto, será el rayo buscado $m' = f(m)$.

Hagamos constar que la correspondencia entre los elementos de las variedades de una dimensión, que se establece efectuando cierta sucesión de operaciones de proyección y cortadura, siempre es proyectiva (debido a que estas operaciones hacen pasar los grupos armónicos de elementos a grupos también armónicos de elementos). A base de lo expuesto en el presente párrafo, podemos afirmar que cualquiera que sea la correspondencia proyectiva entre los elementos de variedades de una dimensión, la misma siempre puede obtenerse a consecuencia de cierta sucesión de operaciones de proyección y de cortadura.

§ 141. CONSTRUCCIÓN PROYECTIVA DE LAS IMÁGENES DE SEGUNDO GRADO (TEOREMAS DE STEINER). La correspondencia proyectiva entre las imágenes de primer

grado puede aprovecharse para construir las imágenes de segundo grado. El procedimiento de tal construcción se contiene en los teoremas de Steiner que se aducen más abajo.

TEOREMA 55. *El conjunto de puntos de intersección de los rayos proyectivamente correspondientes de dos haces es una línea de segundo orden que pasa por los centros de dichos haces.*

DEMOSTRACIÓN. Sobre un plano, introduzcamos algún sistema de coordenadas proyectivas; en este caso es cómodo tomar las no homogéneas. Sean $S_1(x_1, y_1)$ y $S_2(x_2, y_2)$ los centros de dos haces entre cuyos rayos viene establecida cierta correspondencia proyectiva. Si

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{1}$$

es la ecuación de un rayo arbitrario del primer haz,

$$y - y_2 = k'(x - x_2), \tag{2}$$

la ecuación del rayo correspondiente del segundo, entonces, según sabemos, el parámetro k' es una función lineal fraccional del parámetro k:

$$k' = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{3}$$

(véase el § 119). A fin de obtener la ecuación de la línea que se describe por el punto de intersección de los rayos (1) y (2) al variar k, hay que excluir los parámetros k y k' de las ecuaciones (1), (2) y (3). El resultado de la exclusión tiene forma de

$$\gamma(y - y_1)(y - y_2) + \delta(y - y_2)(x - x_1) - \\ -\alpha(y - y_1)(x - x_2) - \beta(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (*)$$

y es, evidentemente, una ecuación de segundo grado respecto a x, y.

De tal suerte, en efecto, los puntos comunes de los rayos correspondientes de los haces S_1 y S_2 constituyen una línea de segundo orden. El hecho de que esta línea pasa por S_1 y S_2, se ve de inmediato; efectivamente, tanto los valores de $x = x_1$, $y = y_1$ como los de $x = x_2$, $y = y_2$ satisfacen la ecuación (*), luego, los puntos S_1 y S_2 pertenecen al conjunto de puntos de intersección de los rayos correspondientes de los haces S_1 y S_2, es evidente sin cálculos algunos; por ejemplo, el punto S_2 pertenece al referido conjunto dado que el rayo S_1S_2 del haz corta a todos los rayos del segundo haz, incluidos sus rayos correspondientes, en el punto S_2.

Hagamos notar de paso que *al rayo común S_1S_2 de los haces S_1 y S_2, si lo estimamos perteneciente al primer haz, le corresponde en el segundo haz el rayo t_2 tangente en el punto S_2 a una línea de segundo orden formada por los puntos de intersección de los rayos proyectivamente correspondientes de los haces S_1 y S_2; y si estimamos que el rayo S_1S_2 pertenece al segundo haz, entonces en el primero le corresponderá el rayo t_1 tangente a la referida línea en el punto S_1.*

Efectivamente, sean M el punto de intersección de dos rayos correspondientes m y m', s, un rayo común de los haces S_1 y S_2, t_2, la tangente en el punto S_2 (fig. 128). Supongamos que el punto M tiende hacia S_2 según una curva; entonces m tiende hacia s y m' hacia t_2. Pero la correspondencia proyectiva es continua (esto deriva de su representación analítica). Por ende, las posiciones límite de los rayos correspondien-

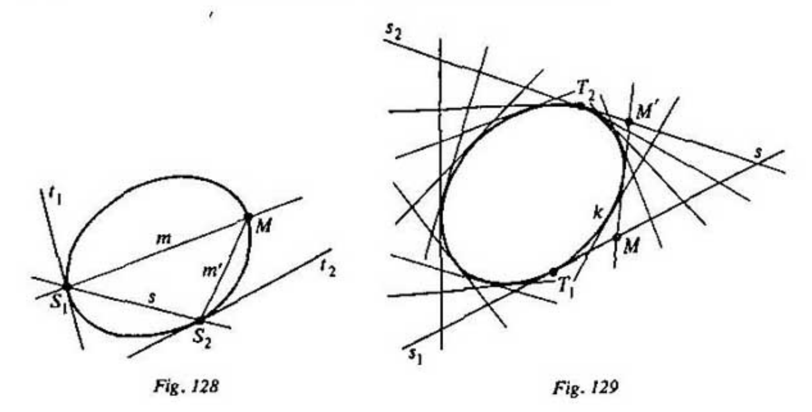


Fig. 128 *Fig. 129*

tes $s = \lim\limits_{M \to S_2} m$ y $t_2 = \lim\limits_{M \to S_2} m'$ son rayos correspondientes, es decir, al rayo s, como a un rayo del primer haz, le corresponde el rayo t_2 en el segundo haz. Análogamente se demuestra que al rayo s, como a un rayo del segundo haz, le corresponde el rayo t_1 en el primer haz.

Conviene preguntar: ¿si cualquier línea de segundo orden puede formarse mediante dos haces proyectivos, es decir, mediante los haces entre cuyos rayos viene establecida una correspondencia proyectiva? Es natural que mediante los haces proyectivos con los rayos reales se puede construir sólo tales líneas de segundo orden que poseen un conjunto infinito de puntos reales. Por tanto, no pueden construirse: la línea degenerada de segundo orden compuesta por dos rectas imaginarias, y la línea nula regular (esto está claro, ya que por cuanto permanecemos en los límites de las construcciones de geometría intuitiva, las imágenes compuestas de elementos imaginarios se deslizan de nuestro campo visual).

En lo que se refiere a las demás líneas de segundo orden, es decir, la recta real tomada dos veces, el par de rectas reales diferentes y la línea oval (véase el § 134), todas ellas pueden construirse aplicando el procedimiento descrito más arriba.

1) LA RECTA REAL TOMADA DOS VECES constituye el lugar geométrico de los puntos comunes de los rayos correspondientes de haces proyectivos, si coinciden los centros de los referidos haces, y si resulta múltiple el rayo de uno de los haces que coincide con el rayo correspondiente del otro haz. Por ejemplo, los haces

$$y = kx, \qquad y = k'x \tag{*}$$

con el centro común (0, 0), entre cuyos rayos viene establecida la correspondencia

$$k' = \frac{k}{1 + k}, \tag{**}$$

tienen como conjunto de puntos comunes de los rayos correspondientes el eje de coordenadas tomado dos veces, ya que al eliminar los parámetros k, k' de las ecuaciones (*) y (**), obtenemos $y^2 = 0$.

2) EL PAR DE RECTAS REALES DIFERENTES resulta de la intersección de los rayos correspondientes de dos haces puestos en correspondencia de perspectiva. En tal caso el eje de la perspectiva es una recta del par, y el rayo común de los haces, la otra.

3) LA LÍNEA OVAL resulta de la intersección de los rayos correspondientes de dos haces cuando entre dichos rayos viene establecida la correspondencia proyectiva, pero no la de perspectiva: en rigor, en este caso los puntos comunes de los rayos correspondientes no se encuentran sobre líneas rectas*).

Según el principio de dualidad, del teorema 55 sigue el

TEOREMA 56. *El cúmulo de rectas que unen los puntos correspondientes de dos rectas fijas puestas en correspondencia proyectiva, constituye un haz de segunda clase que contiene estas dos rectas.*

Si las rectas fijas s_1 y s_2 están puestas en correspondencia de perspectiva, entonces el rayo de segunda clase que se considera en el teorema 56, degenera en un par de haces de primera clase; uno de ellos tendrá por su centro el centro de la perspectiva de la correspondencia dada, el otro, el punto común de las rectas s_1 y s_2.

Si las rectas s_1 y s_2 están puestas en correspondencia proyectiva pero no de perspectiva, entonces el haz de segunda clase definido con arreglo al teorema 56, es regular. Conforme al teorema 52, el referido haz tiene una envolvente que constituye una línea regular de segundo orden. Y, por cuanto el haz contiene las rectas s_1 y s_2, su línea envolvente de segundo orden es tangente a estas rectas.

En la fig. 129 aparece un haz regular de segunda clase engendrado por la correspondencia proyectiva entre las rectas s_1 y s_2, y se aprecia la línea de segundo orden k que envuelve el referido haz; las letras T_1, T_2 designan los puntos de adherencia de la línea k a las rectas s_1 y s_2, las letras M, M', dos puntos arbitrarios que se corresponden. En la figura puede verse que si el punto M tiende hacia S, entonces M' tiende hacia T_2.

De tal manera, *si concebimos el punto común de las rectas s_1, s_2 en una de estas rectas, entonces en la otra le corresponderá el punto de adherencia a la línea k* (es decir, el punto característico de un haz de segunda clase).

Esta proposición, evidentemente, es dual de la proposición establecida más arriba, acerca de las tangentes a la curva de segundo orden con los puntos de adherencia en los centros de los haces proyectivos que forman esta curva (la correspondencia dual de las tangentes a una curva y de los puntos característicos de un haz se ha señalado al final del § 127).

§ 142. TEOREMAS RECÍPROCOS DE STEINER. En el párrafo precedente hemos mostrado que toda línea de segundo orden puede definirse como punto geométrico de los puntos comunes de los rayos correspondientes de dos haces poyectivos, y que la misma pasa por los centros de los referidos haces.

El teorema siguiente establece que los centros de los haces proyectivos que forman una línea de segundo orden, son puntos ordinarios de ésta.

TEOREMA 57. *Sea k una línea regular de segundo orden, P y P', dos puntos arbitrarios suyos. Si a cada rayo m del haz P le corresponde el rayo $m' = f(m)$ del haz P', que corta al rayo m en la línea k, entonces la correspondencia $m' = f(m)$ es proyectiva.*

---

*) Hagamos recordar al lector que todas las líneas ovales de segundo orden son proyectivamente equivalentes.

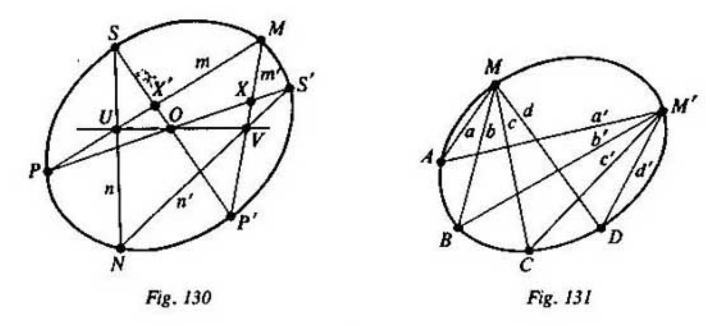


Fig. 130 *Fig. 131*

NOTA. En cuanto a las líneas degeneradas, este teorema es válido sólo si se adoptan ciertas restricciones para la posición de los puntos P y P'; precisamente, si la línea k constituye un par de rectas, entonces ambos puntos deben hallarse sobre una de ellas. En el caso contrario, la correspondencia $m' = f(m)$ no será biunívoca.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que la línea k puede formarse mediante dos haces proyectivos; sean S y S' los centros de los haces proyectivos que forman la línea k (fig. 130). Sobre la línea, fijemos cierto punto M y denotemos con N un punto variable de la línea, con n y n', los rayos SN y $S'N$; según la condición de la elección de los puntos S, S', la correspondencia $n' = \varphi(n)$ es proyectiva. Luego, sean U el punto de intersección de la recta PM con el rayo n, V, el punto de intersección de la recta $P'M$ con el rayo n' *). Como la correspondencia $n' = \varphi(n)$ es proyectiva, la correspondencia entre el punto U de la recta PM y el V de la recta $P'M$ será una correspondencia proyectiva entre los puntos de las rectas PM y $P'M$. Pero, más aún, la referida correspondencia es de perspectiva; efectivamente, si el punto U, al desplazarse por la recta PM, coincide con el punto M, entonces su punto correspondiente V coincidirá simultáneamente con el M; según el teorema 53, precisamente esta circunstancia asegura el carácter de perspectiva de la correspondencia $U - V$. Hallemos el centro de la perspectiva de dicha correspondencia. A este fin, hagamos constar que si el punto N coincide con el P, entonces el punto U también coincidirá con el P, y la posición correspondiente del punto V será el punto X ubicado en la intersección de las rectas $P'M$ y PS'. De tal forma, los puntos P y X se corresponden; consiguientemente, el centro de la perspectiva se halla sobre la recta PX o, lo cual es lo mismo, sobre la PS'; al razonar análogamente, nos cercioraremos de que el centro de la perspectiva se encuentra sobre la recta $P'S$. En la fig. 130 el mismo está denotado con la letra O. Así pues, la recta UV siempre pasa por el punto O.

Ahora, fijemos el punto N, suponiendo variable el punto M. Consideremos la correspondencia $m' = f(m)$ de los rayos dirigidos de los puntos P y P' hacia el punto M, y junto con ella, la correspondencia $V = \Phi(U)$ entre los puntos de las rectas SN y $S'N$ (ahora estas rectas están fijas); aquí los puntos homólogos U, V se determinan por la intersección de las rectas SN y $S'N$ con los rayos correspondientes

*) Según el enunciado del teorema, los puntos P y P' son puntos arbitrariamente definidos sobre una curva.

m, m' de los haces P, P'. Según lo que precede, la recta UV siempre pasa por el punto O (que no varía al variar M); de aquí se desprende que la correspondencia $V = \Phi(U)$ es una correspondencia de perspectiva, y por esto la $m' = f(m)$ es una correspondencia de perspectiva (ya que se establece mediante cierta sucesión de operaciones de proyección y de cortadura). El teorema queda demostrado.

A base del principio de dualidad*) del referido teorema se deduce el

TEOREMA 58. *Sean k una línea regular de segundo orden, t y t', dos tangentes suyas; si a cada punto M de la recta t está puesto en correspondencia el punto $M' = f(M)$ de la recta t' de modo que la recta MM' es tangente a la línea k, entonces la correspondencia $M' = f(M)$ es proyectiva.*

De los teoremas 57 y 58 y del teorema 46 derivan, entre otras, dos proposiciones siguientes duales una de otra:

1) *Si M y M' son dos puntos cualesquiera de una línea de segundo orden, a, b, c, d y a', b', c', d' son los rayos que parten de dichos puntos hacia los puntos arbitrarios A, B, C, D de esta línea* (fig. 131), *entonces tiene lugar la igualdad de relaciones complejas*

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

2) *Si m y m' son cualesquiera dos tangentes a una línea de segundo orden, A, B, C, D y A', B', C', D', puntos sobre las rectas m y m', determinados por la intersección con cuatro tangentes arbitrarias a, b, c, d* (fig. 132), *entonces tiene lugar la igualdad de relaciones complejas*

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

§ 143. CONSTRUCCIÓN DE LA LÍNEA DE SEGUNDO ORDEN A BASE DE SUS CINCO ELEMENTOS DADOS. Los resultados obtenidos en el párrafo precedente permiten afirmar una serie de proposiciones que se aducen a continuación.

1) *Cinco puntos de un plano, entre los cuales no hay tres que se hallen sobre una misma recta, siempre determinan la única línea regular de segundo orden que pasa por ellos.*

En efecto, sean dados sobre un plano cinco puntos entre los cuales no hay tres que se hallen sobre una misma recta. Designemos con S, S' algunos dos de ellos, con A, B, C, los tres restantes. Luego, de los puntos S y S', tracemos los rayos a, b, c y a', b', c' a los puntos A, B, C y establezcamos la correspondencia proyectiva entre los rayos de los haces con los centros S y S' de forma que a los rayos a, b, c les correspondan los a', b', c'. Entonces, el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos de los haces S y S' será una línea de segundo orden que pasa por los puntos indicados; no puede existir otra línea, dado que la correspondencia proyectiva se determina unívocamente al fijar tres pares de elementos correspondientes.

En el § 140 hemos expuesto el procedimiento de construir pares correspondientes de rayos de dos haces proyectivos; aplicándolo en el caso dado, se puede construir, a partir de cinco puntos de una línea de segundo orden, otros muchos puntos suyos tantos cuantos se quieran.

---

*) Su aplicación en este caso está asegurada por el teorema 52.

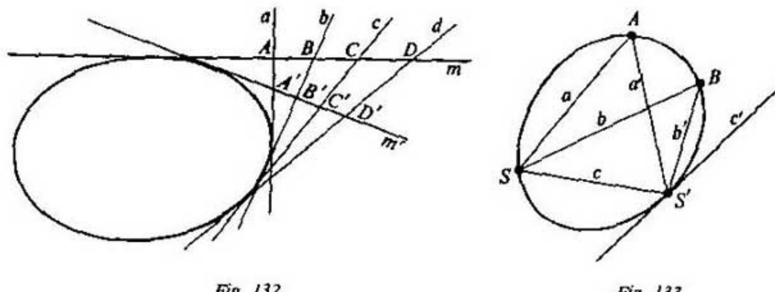


Fig. 132 *Fig. 133*

A propósito, la fig. 130 constituye el esquema de un instrumento para trazar la línea de segundo orden; en rigor, imaginémonos que en los cinco puntos S, P, N, P', S' indicados están instaladas cinco varillas fijas $P'S$, SN, NS' y $S'P$ con las cuales están conectadas las varillas móviles PM, $P'M$ y UV mediante articulaciones desplazables en los puntos U, V y mediante articulaciones fijas en los puntos P, O, P'. Entonces, si la varilla UV gira alrededor del punto O, entonces las varillas PM y $P'M$ conectadas con ella, giran de manera que el punto de su intersección M traza una línea de segundo orden que pasa por los puntos S, P, N, P', S' dados.

2) *Cuatro puntos de un plano, entre los cuales no hay tres que se hallen sobre una misma recta, y la recta que pasa por uno de ellos, determinan la única línea de segundo orden que pasa por los referidos puntos y es tangente a la recta dada.*

Efectivamente, designemos los elementos indicados así como lo muestra la fig. 133, y establezcamos entre los rayos de los haces S y S' la correspondencia proyectiva a base de los tres pares de rayos homólogos a, a'; b, b'; c, c'. Entonces, el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos de los haces S y S', determinado unívocamente, será la línea de segundo orden que pasa por los puntos A, B, S, S' y es tangente a la recta c' (véase el § 141).

3) *Tres puntos de un plano que no están situados sobre una misma recta, y dos rectas entre las cuales una pasa por uno de los tres puntos dados, y la otra, por uno de los dos restantes, determinan la única línea de segundo orden que pasa por los referidos puntos y es tangente a las rectas indicadas.*

En efecto, designemos los elementos indicados así como lo muestra la fig. 134, y establezcamos entre los rayos de los haces S y S' la correspondencia proyectiva a base de los tres pares de rayos a, a'; b, b'; c, c'. Entonces, el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos de los haces S y S' será la línea de segundo orden que pasa por los puntos S, A, S' y es tangente a las rectas b y c'.

A base del principio de dualidad, de las proposiciones demostradas aquí se infiere que la línea regular de segunda clase, como envolvente del haz, de segunda clase, se determina unívocamente al fijar cinco elementos suyos en una de las combinaciones que siguen:

1) los elementos dados son cinco tangentes;

2) los elementos dados son cuatro tangentes y el punto de adherencia sobre una de ellas;

3) los elementos dados son tres tangentes y los puntos de adherencia sobre dos de ellas.

§ **144.** TEOREMAS DE PASCAL Y BRIANCHON. Ahora vamos a detenernos en dos proposiciones de la geometría proyectiva conocidas bajo el nombre de teoremas de Pascal y Brianchon.

TEOREMA 59 (TEOREMA DE PASCAL). *Cualquiera que sea el hexavértice inscrito en una línea de segundo orden, los puntos de intersección de sus lados opuestos se hallan sobre una misma recta* (fig. 135).

TEOREMA 60 (TEOREMA DE BRIANCHON). *Cualquiera que sea el hexavértice circunscrito alrededor de una línea de segundo orden, las rectas que unen sus vértices opuestos, pasan por un mismo punto* (fig. 136).

Los dos teoremas, obviamente, son duales uno de otro; por esto es suficiente demostrar uno de ellos.

Un análisis detenido del material precedente revela que el teorema de Pascal es una paráfrasis del de Steiner sobre la construcción de la línea de segundo orden mediante dos haces proyectivos y, por tanto, fue demostrado implícitamente por nosotros antes. Para cerciorarnos de ello, ante todo, hay que señalar la regla que permita identificar los pares de lados opuestos del hexavértice, como quiera que se hallen sus vértices. A este fin, numeremos con 1, 2, 3, 4, 5, 6 los lados del hexavértice en función de su conexión sucesiva; llamaremos lados opuestos a los lados cuyos números difieren en tres, es decir, 1 y 4, 2 y 5, 3 y 6. Al notarlo, volvamos a la figura que aparece en la fig. 130. Aquí tenemos un hexavértice inscrito en una línea de segundo orden, cuyos lados enumerados según el orden de su conexión, son SN, NS', $S'P$, PM, MP', $P'S$; asignémosles correspondientemente los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. En la fig. 130, el punto de intersección de los lados 1, 4 está designado con U, el punto de intersección de los 2, 5, con V, y el punto de intersección de los 3, 6, con O. En su tiempo se demostró que los tres puntos U, O, V se hallan sobre una misma recta, y que los puntos S, P, N, P', S', M están situados de un modo totalmente arbitrario sobre una curva; por ende, precisamente entonces fue demostrado el teorema de Pascal.

El teorema de Brianchon, según hemos señalado, se deduce del de Pascal con arreglo al principio de dualidad.

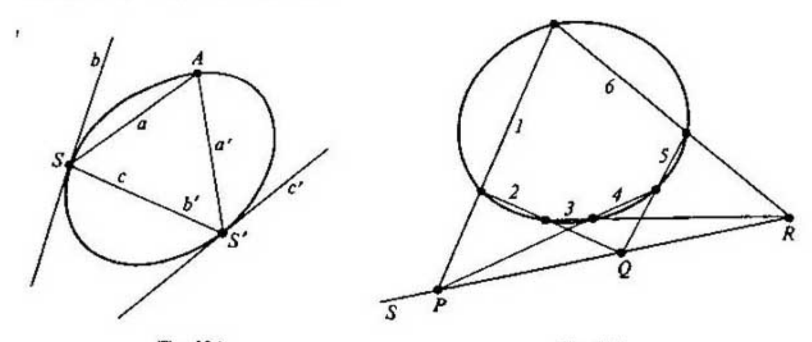


Fig. 134 *Fig. 135*

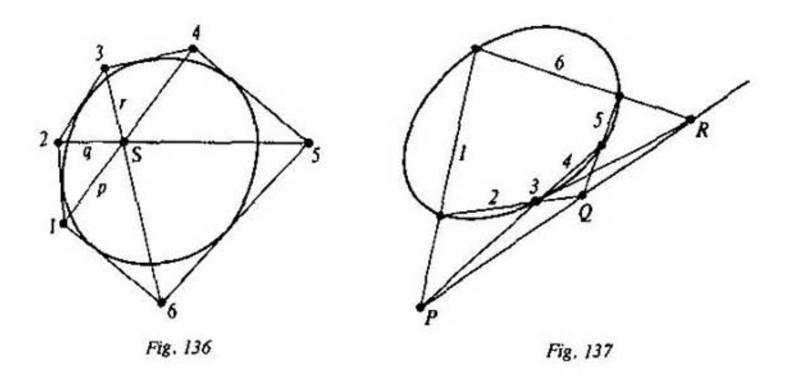


Fig. 136

Fig. 137

§ 145. CASOS LÍMITE DE LOS TEOREMAS DE PASCAL Y DE BRIANCHON. Imaginémonos que coincidan todos los puntos que determinan algún lado de un hexavértice inscrito (por ejemplo, los puntos que determinan el lado 3 en la fig. 135); entonces el referido lado se convierte en tangente, resultando así la configuración de la fig. 137. Correspondientemente, tenemos un teorema.

La tangente a una línea de segundo orden, trazada en uno de los vértices de un pentavértice inscrito, se interseca con el lado opuesto a este vértice en el punto situado sobre la recta que pasa por los puntos de intersección de los demás pares de lados no adyacentes del pentavértice.

Obtendremos el caso límite dual del teorema de Brianchon suponiendo que dos lados adyacentes de un hexavértice circunscrito coinciden, y su vértice común se convierte en punto adherente (fig. 138). Correspondientemente, tenemos un teorema.

La recta que une el punto adherente de uno de los lados de un pentavértice circunscrito, con el vértice opuesto, pasa por el punto común de las rectas que unen los dos pares restantes de vértices no adyacentes del referido pentavértice.

Otros casos límite del teorema de Pascal para el cuadrivértice inscrito y el trivértice inscrito y los casos límite del teorema de Brianchon para el cuadrivértice circunscrito y el trivértice circunscrito sin explicaciones aparecen en las figs. 139, 140, 141 y 142.

§ 146. PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN DE LA TANGENTE EN UN PUNTO DADO DE LA CURVA DE SEGUNDO ORDEN, Y DEL PUNTO ADHERENTE DE LA TANGENTE DADA.

PROBLEMA. A base de cinco puntos de una curva de segundo orden construir la tangente en uno de ellos.

Este problema se resuelve mediante el teorema de Pascal para el pentavértice inscrito. Sean marcados con los números 1, 2, 4, 5, 6 los segmentos que unen los puntos dados según muestra la fig. 137, y el punto indicado, con 3; entonces, al determinar en primer lugar los puntos P, Q, y luego, el punto R, y al unir el punto R con el 3, obtendremos la tangente buscada.

PROBLEMA. A base de cinco tangentes de una curva de segundo orden construir el punto de adherencia de uno de ellos.

Este problema se resuelve mediante el teorema de Brianchon para el pentalátero circunscrito. Sean marcados con los números 1, 2, 4, 5, 6 los puntos de intersección de las tangentes dadas según muestra la fig. 138. Entonces, al unir con rectas los puntos 1, 4 y los 2, 5, hallamos el punto de intersección de las referidas rectas; la recta que une este punto con el 6, al atravesar a la recta 2, 4 determinará sobre ella el punto adherente buscado.

§ 147. CORRESPONDENCIA PROYECTIVA ENTRE LOS PUNTOS DE LA CURVA DE SEGUNDO ORDEN. En la presente sección hemos considerado pormenorizadamente la correspondencia proyectiva entre los elementos de las variedades unidimensionales de primer grado. Para muchos problemas de la geometría proyectiva es útil generalizar el concepto de correspondencia proyectiva para el conjunto de elementos de variedades unidimensionales de segundo grado.

Ahora vamos a mostrar cómo se efectúa tal generalización, ateniéndonos en nuestros razonamientos a un caso concreto de la variedad de segundo grado, precisamente, a la curva oval de segundo orden.

Convengamos en llamar armónicos conjugados a dos pares de puntos A, B y C, D de una línea de segundo orden k, si los mismos se proyectan desde algún punto M de la línea k por dos pares de rayos armónicos conjugados. A base de la primera de las dos proposiciones aducidas al final del § 142, podemos afirmar que la propiedad de la conjugación armónica de dos pares de puntos A, B y C, D de una línea de segundo orden no está vinculada a la elección del punto M y, de tal modo, se define exclusivamente por la posición de los propios puntos A, B, C, D.

La correspondencia biunívoca entre los puntos de dos líneas de segundo orden diferentes o coincidentes k_1 y k_2 se llama proyectiva, si en la referida correspondencia a los pares armónicos conjugados de los puntos de la línea k_1 les responden también pares armónicos conjugados de los puntos de la línea k_2.

La definición enunciada, según vemos, es totalmente análoga a la de la correspondencia proyectiva entre los puntos de rectas. El establecimiento de la correspondencia proyectiva lo llamaremos también *aplicación proyectiva* de la línea k_1 sobre la k_2. En el caso de coincidir las líneas k_1 y k_2, se dice que una línea está aplicada proyectivamente sobre sí misma. Precisamente de este caso nos vamos a ocupar ahora.

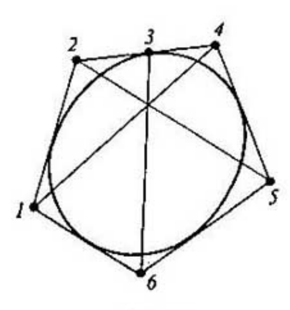


Fig. 138

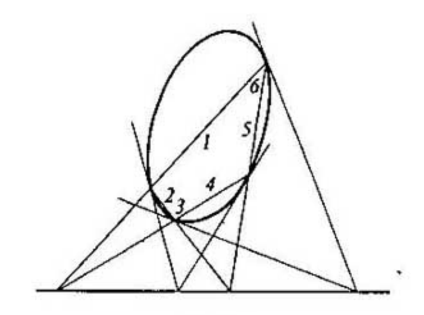


Fig. 139

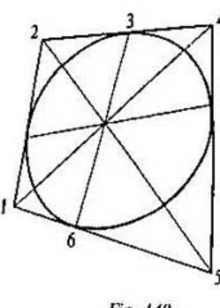


Fig. 140

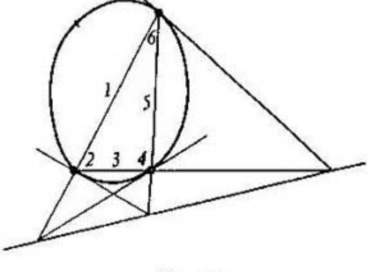


Fig. 141

Sea dada la aplicación proyectiva de cierta línea de segundo orden k sobre sí misma; sobre la línea k, elijamos algún punto A y designemos con A' su imagen. Luego, entre los rayos de los haces con los centros A y A', respectivamente, establezcamos correspondencia, haciendo corresponder un rayo m del haz A a un rayo arbitrario m' del A' de forma que el punto de intersección del rayo m con la línea k sea la imagen del punto de intersección del rayo m' con dicha línea. Es fácil comprender que la correspondencia establecida es proyectiva. En rigor, si m', n' y p', q' son dos pares armónicos conjugados de rayos del haz A', según la definición de la conjugación armónica sobre la línea de segundo orden, los pares de puntos M, N y P, Q en los cuales los rayos m', n', p', q' cortan a la línea, serán también armónicos conjugados; merced a la aplicación proyectiva de la curva sobre sí misma, los pares de puntos M, N y P, Q pasan a los pares armónicos conjugados de puntos M', N' y P', Q' que son proyectados desde el punto A por los pares armónicos conjugados de rayos m, n y p, q. Mas, precisamente estos rayos del haz A se hacen corresponder a los rayos m', n', p', q' del haz A'. De tal suerte, gracias a la correspondencia establecida, a los grupos armónicos de elementos del haz A' les responden los grupos armónicos de elementos del haz A; precisamente en esto reside la propiedad característica de la correspondencia proyectiva.

En cuanto a la correspondencia establecida entre los rayos de los haces A y A', se puede decir más: la misma es no sólo proyectiva sino también de perspectiva. Esto se sigue de que al rayo $A'A$ del haz A' le responde el rayo AA' del A (véase el teorema 54).

Consecuentemente, los rayos correspondientes de los haces A y A' se intersecan sobre una misma recta, esto es, sobre el eje de la perspectiva de los referidos haces. De aquí tenemos el siguiente procedimiento bien sencillo de realizar gráficamente la aplicación proyectiva de la línea de segundo orden sobre sí misma, válido cuando esta aplicación viene determinada por la fijación de tres pares de puntos correspondientes (dicho procedimiento incluye la demostración del hecho de que tres pares de puntos correspondientes determinan la aplicación proyectiva). Sean dados tres pares de puntos proyectivamente correspondientes de una línea de segundo orden: A, A'; M_1, M_1'; M_2, M_2' (fig. 143). Construyamos en primer lugar el eje de la perspectiva de los haces A y A', para lo cual hallemos el punto de intersección de las rectas

AM_1' y $A'M_1$ y el punto de intersección de las AM_2' y $A'M_2$; precisamente la recta que une estos puntos será el eje de la perspectiva. Una vez construido el eje de la perspectiva, para todo punto M de la línea podemos hallar el punto homólogo M' proyectando el punto M desde A' sobre el eje de la perspectiva y luego proyectando el punto resultante sobre el eje, desde A sobre la curva. La fig. 143 muestra la construcción de los puntos M_3', M_4', ... que corresponden a los M_3, M_4, ...

Hagamos constar también que los puntos de intersección del eje de la perspectiva de los haces A y A' con la línea de segundo orden son puntos fijos en la aplicación proyectiva de la línea sobre sí misma. En efecto, de la construcción de los puntos proyectivamente correspondientes de la línea de segundo orden recién descrita se desprende inmediatamente que si el punto M de la línea al mismo tiempo se encuentra sobre el eje de la perspectiva, su punto correspondiente coincide con él, es decir, el punto M se aplica sobre sí mismo. En la fig. 143 se puede ver que al aproximarse un punto variable de la línea hacia el punto Q en que dicha línea es atravesada por el eje, el punto correspondiente también se aproxima hacia el punto Q.

En el instante en que el punto variable coincide con Q, el mismo coincide con su homólogo. Por eso el punto fijo de la aplicación se llama *doble*.

A base de lo expuesto, la construcción de los puntos dobles de la aplicación proyectiva de una línea trazada, de segundo orden, sobre sí misma se reduce a la del eje de la perspectiva de los haces A y A'. Si el eje de la perspectiva de los referidos haces no corta la línea, no existen puntos dobles de la aplicación.

Es notable que el eje de la perspectiva de los haces A y A' coincide con el eje de la perspectiva de cualquier otro par de haces que proyectan los puntos correspondientes de la línea y que tienen centros en dos puntos homólogos. Efectivamente, sean A, B, C tres puntos de la línea, A', B', C', sus puntos homólogos en cierta aplicación proyectiva de la referida línea sobre sí misma (fig. 144). Elijamos primero como centros de los haces que proyectan los puntos correspondientes de la línea, los puntos A y A'. El eje de la perspectiva de estos haces s_a se determinará por el punto

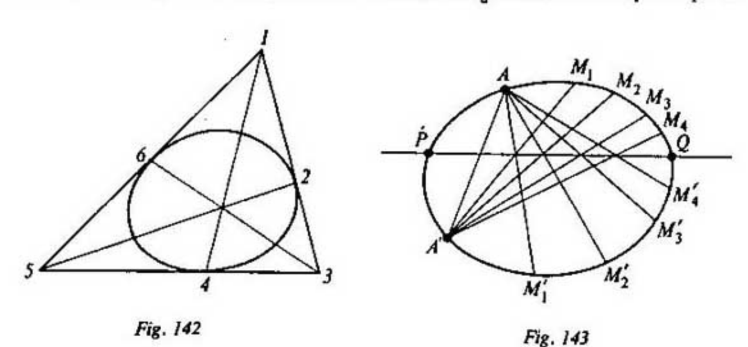


Fig. 142

Fig. 143

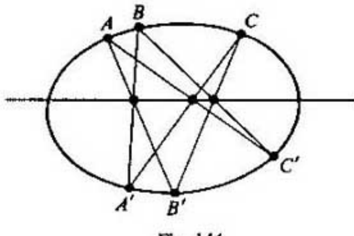


Fig. 144

de intersección de las rectas $A'B$ y AB' y el punto de intersección de las $A'C$ y AC'. Luego, elijamos los puntos B y B' como centros de los haces proyectantes. El eje de la perspectiva de dichos haces s_b se definirá por el punto de intersección de las rectas $B'A$ y BA' y el punto de intersección de las $B'C$ y BC'. Pero, en virtud del teorema de Pascal, los tres puntos obtenidos se hallan sobre una misma recta y, consiguientemente, los ejes s_a y s_b coinciden.

El eje de la perspectiva común de los haces A y A', B y B', etc., se llama sencillamente *eje de la perspectiva de la aplicación proyectiva de la curva de segundo orden sobre sí misma.*

Todo lo expuesto permite formular la afirmación siguiente.

Si está dada la aplicación proyectiva de una curva de segundo orden sobre sí misma, entonces, cualesquiera que sean dos pares de puntos correspondientes M, N y M', N', las rectas MN' y $M'N$ se intersecan siempre sobre una cierta recta, precisamente ésta es el eje de la perspectiva de la aplicación indicada.

§ 148. CONSTRUCCIÓN DE LOS PUNTOS DOBLES DE LA APLICACIÓN PROYECTIVA DE UNA RECTA SOBRE SÍ MISMA. Los resultados obtenidos en el párrafo precedente permiten resolver el problema que sigue.

PROBLEMA. Construir puntos dobles de la aplicación proyectiva de la recta a sobre sí misma si están dados tres pares de puntos correspondientes de esta aplicación A y A', B y B', C y C'.

RESOLUCIÓN. Valiéndonos de un compás, construyamos una circunferencia arbitraria k (fig. 145) y elijamos sobre ella algún punto S. Luego, entre los puntos de la circunferencia k establezcamos correspondencia, asignando a un punto arbitrario M^* de esta circunferencia el punto correspondiente $M^{*\prime}$ de modo que el par de puntos M^*, $M^{*\prime}$ se proyecte desde el punto S en el par de los puntos de la recta a correspondientes uno a otro en la aplicación proyectiva indicada. Manifiestamente, la correspondencia $M^* \sim M^{*\prime}$ es proyectiva (sobre la circunferencia), y los puntos dobles suyos se proyectan desde S en los puntos dobles de la aplicación proyectiva dada de la recta a sobre sí misma.

De tal forma, el problema se reduce a la construcción de los puntos dobles de la aplicación proyectiva de la circunferencia k sobre sí misma. Para construirlos, proyectemos los puntos A, B, C, A', B', C' desde el punto S sobre la circunferencia k; sobre la circunferencia k obtendremos los puntos A^*, B^*, C^*, $A^{*\prime}$, $B^{*\prime}$, $C^{*\prime}$. Luego construyamos el eje de la perspectiva de la correspondencia $M^* \sim M^{*\prime}$ determinada por tres pares de puntos homólogos A^* y $A^{*\prime}$, B^* y $B^{*\prime}$, C^* y $C^{*\prime}$, y de-

finamos los puntos P^*, Q^* en que el eje construido corta a la circunferencia. Al proyectar los puntos P^*, Q^* desde el centro S sobre la recta a, hallaremos los puntos dobles buscados P, Q. (Todas las construcciones aparecen en la fig. 145.)

§ 149. CONSTRUCCIÓN DE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA ARBITRARIA CON LA LÍNEA DE SEGUNDO ORDEN DETERMINADA POR CINCO PUNTOS.

PROBLEMA. Una línea de segundo orden k está determinada por cinco puntos S, S', A, B, C (fig. 146); hallar los puntos de su intersección con una recta arbitraria a (la línea k no se supone trazada de hecho, se conocen sólo sus puntos S, S', A, B, C).

Este problema se reduce al anterior. En efecto, podemos considerar la línea k como punto geométrico de los puntos de intersección de los rayos proyectivamente correspondientes m, m' de los haces con los centros S, S' si la correspondencia $m \sim m'$ está determinada de forma que a los rayos SA, SB, SC les responden los rayos $S'A$, $S'B$, $S'C$. Los pares de los rayos proyectivamente correspondientes m, m', al cortar a la recta a, definen sobre ella los pares de puntos proyectivamente correspondientes M, M'; en particular, los pares de rayos correspondientes SA y $S'A$, SB y $S'B$, SC y $S'C$ determinan sobre la recta a los pares de los puntos homólogos A_1 y A_1', B_1 y B_1', C_1 y C_1'. Los puntos de intersección de la recta a con la línea k son aquellos en los que convergen los rayos homólogos m, m'; consiguientemente, los mismos constituyen puntos dobles de la correspondencia proyectiva $M \sim M'$. De tal suerte, para resolver el problema, tenemos que construir los puntos dobles de la aplicación proyectiva de la recta a sobre sí misma estimando que dicha aplicación viene determinada por tres pares de puntos A_1 y A_1', B_1 y B_1', C_1 y C_1'. La construcción requerida se aduce en el párrafo antecedente.

NOTA. En el caso de pasar la recta a por uno de los cinco puntos indicados, la construcción del único punto incógnito de su intersección con la línea k, se facilita considerablemente. En este caso podemos valernos del teorema de Pascal. En la fig. 147 los puntos dados de la línea k están marcados con 1, 2, 3, 4, 5, y el punto de

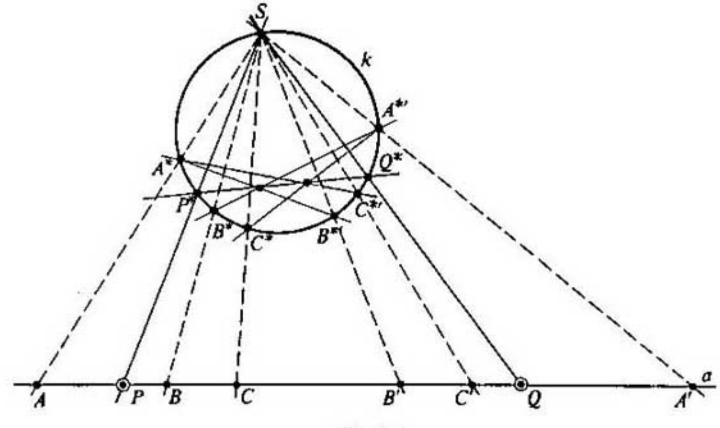


Fig. 145

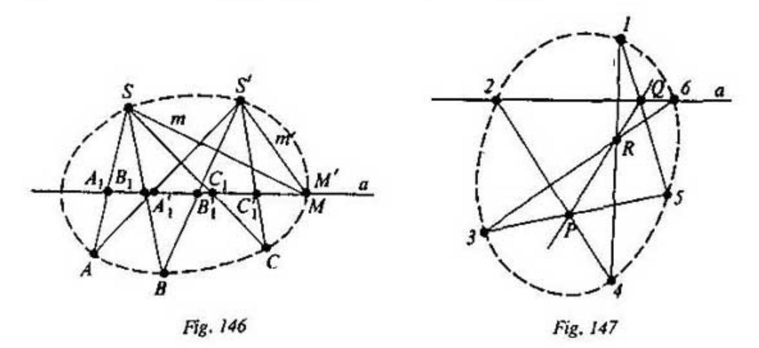


Fig. 146

Fig. 147

intersección de la recta a con la línea k buscado, con el número 6; las letras P, Q, R denotan los puntos de intersección de los lados opuestos del hexavértice 1, 2, 3, 4, 5, 6; como el referido hexavértice está inscrito en la línea de segundo orden k, los puntos P, Q, R se encuentran sobre una misma recta. Por esto la construcción del punto 6 puede realizarse del modo siguiente: en primer lugar, hallar los puntos P y Q, luego, trazando la recta PQ, hallar el punto R y, al fin, uniendo los puntos 3 y R de la recta, el punto 6.

§ 150. TRAZADO DE LAS TANGENTES DESDE UN PUNTO DADO DEL PLANO A LA LÍNEA DE SEGUNDO ORDEN DETERMINADA POR CINCO PUNTOS.

PROBLEMA. Viene determinada por los cinco puntos A, B, C, D, E una línea de segundo orden k, y dado un punto arbitrario P. Trazar las tangentes a la línea k desde el punto P.

RESOLUCIÓN. A través del punto P y cualesquiera dos de los cinco puntos dados, por ejemplo, A y B, tracemos dos rectas PA y PB (fig. 148). Siguiendo el procedimiento recién expuesto, hallemos los puntos A_1 y B_1 en que las rectas PA y PB cortan la línea k. Luego construyamos el cuadrivértice completo ABA_1B_1; de sus propiedades armónicas se infiere que su diagonal p es la polar del punto P respecto a la línea k (véase la definición de la polar en el § 131). Al fin, hallemos los puntos M_1 y M_2 de intersección de la polar p con la línea k y unámoslas mediante las rectas t_1 y t_2 con el punto P. Del teorema 51 se sigue que t_1 y t_2 son las tangentes buscadas.

§ 151. SEGUNDO TEOREMA DE DESARGUES. Ahora vamos a exponer un interesante teorema de la geometría proyectiva sobre los haces de curvas de segundo orden conocido bajo el nombre de segundo teorema de Desargues.

Se llama haz de curvas de segundo orden a la colección de curvas que, para los valores diferentes del parámetro λ (considerando $\lambda = \infty$), se determinan por la ecuación

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + \\ + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}) = 0, \qquad (*)$$

donde a_{ik}, b_{ik} son coordenadas constantes, x, y, coordenadas (proyectivas) variables; notoriamente, el haz constituye una colección de líneas que pasan por

cuatro puntos de intersección de dos líneas:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

y

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0;$$

estos cuatro puntos llamados *puntos básicos del haz*, pueden ser tanto reales como imaginarios.

TEOREMA 61 (DE DESARGUES). *Las líneas de segundo orden pertenecientes a algún haz, atraviesan a toda recta que no pase por los puntos básicos del haz, en los pares de puntos correspondientes en una misma involución.*

Antes de demostrar este teorema, hagamos recordar al lector el concepto de involución. En el § 113 llamamos involución sobre la recta a tal aplicación proyectiva de la recta sobre sí misma gracias a la cual todo punto de la recta después de aplicarse dos veces, vuelve a su lugar, es decir, si el punto $M' = f(M)$ es la imagen del M, entonces $M'' = f(M') = M$. En coordenadas proyectivas sobre la recta, las coordenadas x, x' de los puntos M, M' correspondientes en la involución, están enlazadas por la relación

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

a condición de $\alpha = -\delta$ (véase el § 113).

Ahora, pasemos a la demostración. Sea a la recta arbitraria de que se trata en el teorema de Desargues. Supongamos que el sistema de coordenadas está elegido de modo que el eje x coincide con la recta a. Entonces, para determinar los puntos de intersección de las líneas del haz con la recta a, será suficiente poner $y = 0$ en la ecuación (*). Obtendremos:

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}) = 0. \qquad (**)$$

Sean x, x' las coordenadas de los dos puntos M y M' en que la línea del haz correspondiente a cierto valor de λ, atraviesa a la recta a. Según el teorema de Viete, de

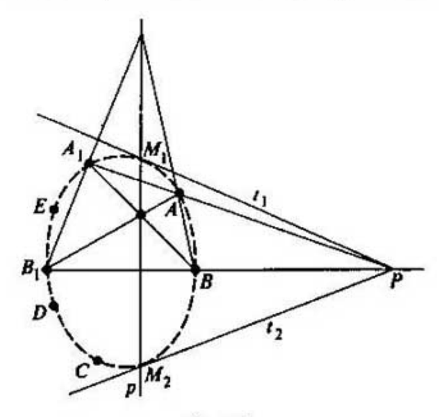


Fig. 148

(**) tenemos:

$$x + x' = -\frac{2(a_{13} + \lambda b_{13})}{a_{11} + \lambda b_{11}}, \qquad (\alpha)$$

$$xx' = \frac{a_{33} + \lambda b_{33}}{a_{11} + \lambda b_{11}}. \qquad (\beta)$$

Ahora, procuremos hallar la dependencia entre x y x'; para esto, eliminemos λ de las relaciones (α) y (β). Merced a la eliminación obtendremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x + x') + 2a_{13} & b_{11}(x + x') + 2b_{13} \\ a_{11}xx' - a_{33} & b_{11}xx' - b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$x' = \frac{(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})x + 2(a_{13}b_{33} - a_{33}b_{13})}{2(a_{13}b_{11} - a_{11}b_{13})x - (a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})}. \qquad (\gamma)$$

Vemos que x' se expresa a través de x mediante una función lineal fraccional; por consiguiente, la correspondencia $M(x) \sim M'(x')$ es proyectiva. Luego, al comparar la fórmula (γ) con la fórmula general $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, vemos que la condición $\delta = -\alpha$ que caracteriza la involución, en el caso dado se ha cumplido.

Mostremos que el determinante Δ de la transformación (γ) es desigual a cero. Pero $\Delta = -(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})^2 - 4(a_{13}b_{11} - a_{11}b_{13})(a_{13}b_{33} - a_{33}b_{13})$ es el resultado de las ecuaciones $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$ y $b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33} = 0$, tomado con el signo contrario; si $\Delta = 0$, estas ecuaciones tienen una raíz común, es decir, la recta a pasa por el punto básico del haz, lo cual está excluido por el enunciado del teorema. Consecuentemente, $\Delta \neq 0$, y el teorema queda demostrado.

En los dos párrafos que siguen, se examinan las aplicaciones del segundo teorema de Desargues.

§ 152. CONSTRUCCIÓN DE LOS PUNTOS DOBLES DE LA INVOLUCIÓN. En el § 113 hemos demostrado el teorema 42, conforme al cual la involución se determina al fijar dos pares diferentes de puntos correspondientes. Ahora vamos a mostrar cómo, a partir de dos pares de puntos correspondientes en la involución, construir una cantidad arbitraria de otros pares suyos y los puntos dobles (si existen tales).

Sean A, A' y B, B' dos pares de puntos correspondientes en cierta involución sobre la recta a. A través de los puntos A y A', tracemos una circunferencia k_a y, a través de los B y B', una circunferencia k_b, eligiendo las referidas circunferencias de forma que se intersequen en dos puntos; designemos con O_1 y O_2 los puntos de su intersección (fig. 149a y 149b). El sistema de circunferencias que pasan por los puntos O_1 y O_2, constituye un caso particular del haz de curvas de segundo orden. Según el segundo teorema de Desargues, las circunferencias de este sistema cortan a la recta a en los pares de puntos correspondientes de una misma involución. De tal suerte, al trazar circunferencias diferentes a través de los puntos O_1 y O_2 y al determinar los puntos de su intersección con la recta a, obtendremos diferentes pares de

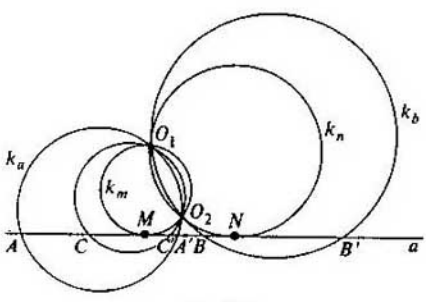


*Fig. 149*a

puntos correspondientes unos a otros en la involución definida por los pares A, A' y B, B'. Trazando a través de los puntos O_1 y O_2 dos circunferencias k_m y k_n tangentes a la recta a, hallaremos los puntos dobles de la involución, precisamente, los puntos adherentes de las circunferencias k_m y k_n con la recta a. En la fig. 149a los puntos dobles están designados por M y N.

Al comparar las figs. 149a y 149b, se comprende fácilmente que los dos pares de puntos A, A' y B, B' definen una involución hiperbólica (es decir, una involución que posee puntos dobles) si los referidos pares de puntos no separan uno a otro, y una involución elíptica (es decir, una involución que no posee puntos dobles) si los mismos separan uno a otro.

§ 153. DETERMINACIÓN DE LA CURVA DE SEGUNDO ORDEN A BASE DE CUATRO PUNTOS SUYOS Y UNA TANGENTE.

PROBLEMA. Vienen dados cuatro puntos y una tangente de una línea de segundo orden. Hallar el punto adherente de la tangente dada.

Este problema puede considerarse como un problema de determinación de la curva de segundo orden a base de cuatro puntos suyos y una tangente; en rigor, una vez determinado el punto adherente de la tangente dada, tendremos cinco puntos de la curva, y cinco puntos determinan globalmente una curva de segundo orden.

RESOLUCIÓN. Sean A, B, C, D cuatro puntos dados de una línea buscada de segundo orden y t, su tangente indicada. Consideremos un haz de líneas de segundo

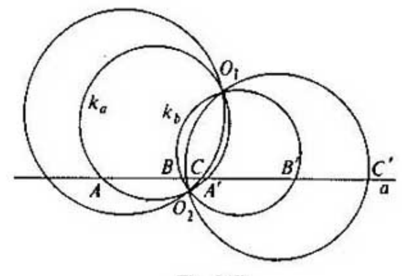


*Fig. 149*b

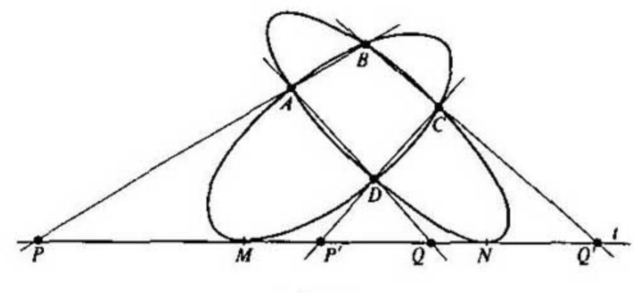


Fig. 150

orden con los puntos básicos A, B, C, D. Las líneas del referido haz, conforme al segundo teorema de Desargues, cortan la recta t en pares de puntos correspondientes de una misma involución. La línea buscada se incluye en el haz indicado, y su punto de adherencia es el punto doble de esta involución. De tal manera, el problema se reduce a hallar los puntos dobles de la involución. Para determinarlos, hay que conocer dos pares de puntos correspondientes. Los obtendremos atravesando la recta t con líneas cualesquiera del haz. A este fin, lo más cómodo es tomar dos líneas degeneradas del haz, por ejemplo, el par de rectas AB, CD y el par de rectas AD, BC (fig. 150).

Sean P, P' y Q, Q' los pares de puntos en que dichas líneas degeneradas de segundo orden atraviesan la recta t. Si los pares P, P' y Q, Q' no separan uno a otro, aplicando el procedimiento expuesto en el párrafo precedente, hallaremos dos puntos dobles de la involución M y N. Cada uno de ellos es punto de adherencia a la recta t de cierta línea de segundo orden que pasa por los puntos A, B, C, D dados. En este caso, por tanto, el problema tiene dos soluciones.

Si los pares P, P' y Q, Q' separan uno a otro, entonces la involución definida por los mismos, no posee puntos dobles. En este caso el problema (sobre el plano real) no tiene soluciones.

§ 154. En la presente sección hemos aducido una serie de teoremas concretos acerca de las propiedades proyectivas de las líneas de segundo orden. Su fuente es la construcción de la línea de segundo orden mediante dos haces proyectivos, expuesta por nosotros más arriba. Es natural preguntar, si se puede extender los mismos procedimientos a la teoría de lás líneas de órdenes superiores. En principio, esto es posible. Por ejemplo, las líneas de tercer orden se pueden construir mediante dos haces proyectivos entre los cuales uno es haz de líneas de segundo orden, y el otro, haz de rectas. Ahora vamos a mostrar en concreto el procedimiento.

Sea

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + \\ + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}) = 0 \qquad (*)$$

un haz de líneas de segundo orden e

$$y - y_1 = \lambda'(x - x_1), \qquad (**)$$

un haz de rectas. A la línea del haz (*), que corresponde a cierto valor del parámetro λ, hagamos corresponderle la recta del haz (**), que responde al valor del parámetro λ', definido por la fórmula

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \qquad (***)$$

donde α, β, γ, δ son las constantes que satisfacen la condición de $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Tal correspondencia entre los elementos de los haces (*) y (**) la llamaremos *proyectiva*.

Una vez eliminados los parámetros λ y λ', de las relaciones (*), (**) y (***) resulta la ecuación

$$\Phi(x, y) = 0$$

de tercer grado respecto a x, y. De aquí tenemos:

El lugar geométrico de los puntos de intersección de las líneas correspondientes de dos haces proyectivos entre los cuales uno constituye un haz de curvas de segundo orden, y el otro, un haz de rectas, es una línea de tercer orden.

Generalizando el concepto de correspondencia proyectiva para el caso de dos haces de líneas de segundo orden, del mismo modo se puede definir constructivamente las líneas de cuarto orden, etc.

Es posible formular en términos puramente geométricos la correspondencia proyectiva entre los haces de líneas de primero, segundo, etc. órdenes; a la vez, consecuentemente, es posible dar una definición constructiva y puramente geométrica de las imágenes de grados superiores. La investigación de las propiedades concretas de las imágenes de grados superiores, basada sobre esta idea, se emprendía por ciertos autores, pero la misma no es tan sencilla, clara y evidente como la investigación de las líneas de segundo orden y, debido a su carácter especial, requiere mayor amplitud que la de las tareas del presente libro*).

---

*) Al lector que desee conocer más detalladamente las proposiciones constructivas de la geometría proyectiva, le recomendamos el libro: *N. A. Glagólev*, Geometría proyectiva (Н. А. Глаголев, Проективная геометрия).

Capítulo VI

PRINCIPIOS DE LA TEORÍA DE GRUPOS EN LA GEOMETRÍA. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

1. Geometría y teoría de grupos

§ 155. En los capítulos precedentes del libro, en varias secciones donde se definía la equivalencia (igualdad) de figuras geométricas en diversos sistemas geométricos (en la geometría elemental, en la geometría proyectiva), señalábamos las llamadas propiedades de grupo del conjunto de las transformaciones que habían sido puestas por base de la definición de imágenes equivalentes (propiedades de grupo de los movimientos, de las transformaciones proyectivas). En todos los casos así teníamos manifestaciones de los principios de la teoría de grupos en la geometría, los cuales fueron elaborados por Sophus Lie y Felix Klein.

En las investigaciones geométricas contemporáneas los principios de la teoría de grupos juegan un papel importantísimo. El presente capítulo del libro está dedicado a ellos.

§ 156. GRUPO ABSTRACTO. El objeto principal de este capítulo serán los grupos de transformaciones. Antes de definirlos, haremos recordar al lector qué es un grupo en general.

DEFINICIÓN DEL GRUPO. *El grupo* es un conjunto de objetos de naturaleza arbitraria (en lo sucesivo, éstos se llamarán elementos, designándose con a, b, c, d, ...), que satisface las exigencias de los axiomas siguientes.

1. *A todo par de elementos de un conjunto, dispuestos en un orden determinado, le corresponde, conforme a una ley determinada, cierto elemento del referido conjunto.* Si a dos elementos a, b les corresponde el elemento c, entonces en tal caso se emplea la igualdad simbólica

$$c = ab;$$

el elemento c se llama *producto* de los elementos a, b.

2. (LEY ASOCIATIVA). *Cualesquiera que sean los elementos a, b, c, siempre tiene lugar la igualdad*

$$(ab)c = a(bc).$$

3. *Existe un elemento e tal que para cualquier elemento a tiene lugar la igualdad*

$$ae = a.$$

El elemento a se llama *unidad* del grupo.

4. *Cualquiera que sea el elemento a, existe tal elemento x dependiente de a, que tiene lugar la igualdad*

$$ax = e.$$

El elemento x se llama *recíproco* al elemento a y se denota por a^{-1}.

Mediante razonamientos sencillos, a base de estos axiomas se puede deducir los teoremas siguientes*).

a) Si $ax = e$, entonces $xa = e$. Merced a esta propiedad del grupo no hay necesidad de distinguir los elementos inversos «derecho» e «izquierdo».

b) Si e es la unidad del grupo, entonces para cualquier elemento a tiene lugar también la igualdad $ea = a$. Gracias a esta propiedad del grupo no hay necesidad de distinguir las unidades «derecha» e «izquierda».

c) Si $ax = e$ y $ay = e$, entonces $x = y$, es decir, *el elemento inverso se determina unívocamente a base de un elemento a dado.*

A consecuencia de los referidos teoremas tenemos una proposición: *a base de los elementos dados a y b siempre se determina, y además unívocamente, el elemento x que satisface la igualdad* $ax = b$, *a saber,* $x = a^{-1}b$; *así como el elemento y que satisface la igualdad* $ya = b$, *a saber,* $y = ba^{-1}$. De tal modo, *en un grupo siempre está determinada, y además unívocamente, una operación inversa de la multiplicación de grupo.*

Si los elementos e y e^* para cualquier a satisfacen las igualdades $ae = a$ y $ae^* = a$, entonces $e^* = e$, es decir, *todo grupo tiene una sola unidad.*

Demos una definición más: si las exigencias de los axiomas de grupo se satisfacen para cierta parte de elementos de un grupo, entonces dicha parte de elementos del grupo se llama *subgrupo* del mismo; evidentemente, un subgrupo siempre contiene la unidad del grupo y, junto con cada elemento suyo posee uno inverso del mismo.

En el presente párrafo hemos tratado de un grupo abstracto, en cuya teoría no importa la naturaleza de sus elementos ni la de la multiplicación de grupo; importa sólo lo que se exige por los axiomas 1 — 4. En lo sucesivo analizaremos exclusivamente *grupos* concretos *de transformaciones;* su definición general se ofrece en el párrafo siguiente.

§ 157. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES. Sea M un conjunto arbitrario; designemos sus elementos con $x, y, z, \ldots$ o con $x', y', z', \ldots$, etc. Si a cada elemento x del conjunto M le corresponde cierto elemento $x' = f(x)$ del referido conjunto, entonces diremos que está dada una aplicación del conjunto M en él mismo.

En el caso de 1) corresponder siempre elementos diferentes $x_1' = f(x_1)$ y $x_2' = f(x_2)$ a elementos diferentes x_1 y x_2 y 2) existir para cada elemento x' del conjunto M un elemento x tal que $x' = f(x)$, es decir, cuando todo elemento del conjunto M es la imagen de cierto elemento de este conjunto, la aplicación $x' = f(x)$ se llama transformación biunívoca del conjunto M.

Sea $x' = f(x)$ cierta transformación biunívoca del conjunto M; si a todo elemento y del conjunto M le ponemos en correspondencia el único elemento y' que pasa a ser elemento y en la aplicación dada (según la definición aducida), es decir, un elemento y' tal que $f(y') = y$, entonces obtendremos cierta nueva transformación biunívoca $y' = \varphi(y)$ del conjunto M. Esta se llama transformación *inversa* de la transformación dada.

*) Véase, por ejemplo, *L. S. Pontriaguin,* Grupos continuos, Editorial «Mir», Moscú, 1978.

De tal modo, toda transformación biunívoca $x' = f(x)$ tiene una sola transformación recíproca determinada (también biunívoca) inversa de la misma. La transformación inversa de la transformación dada $x' = f(x)$ suele denotarse así: $x' = f^{-1}(x)$.

Sean $x' = f_1(x)$ y $x' = f_2(x)$ dos transformaciones biunívocas del conjunto M; si a cada elemento y del conjunto M le hacemos corresponder el elemento y' en que se convierte y al realizarse sucesivamente la primera y la segunda transformaciones dadas (es decir, el elemento $y' = f_2(y^*)$, donde $y^* = f_1(y)$), entonces obtendremos cierta transformación biunívoca. Ésta se llama *producto* de dos transformaciones dadas (realizadas en una determinada sucesión) y puede representarse simbólicamente de la forma siguiente: $x' = f_2(f_1(x))$.

Hablando con propiedad, el producto de transformaciones depende de la sucesión en que éstas se realicen o, dicho en términos generales, $f_2(f_1(x)) \neq f_1(f_2(x))$.

La transformación $e(x) = x$ que deja fijos todos los elementos, se llama *idéntica*. Evidentemente, si $x' = f(x)$ es cierta transformación biunívoca y $x' = f^{-1}(x)$ es su transformación inversa, entonces $f(f^{-1}(x)) = x = e(x)$ y $f^{-1}(f(x) = x = e(x)$, es decir, el producto de una transformación dada y de la inversa de ella es una transformación idéntica (en tal caso no importa el orden en que se realicen la transformación dada y la inversa).

Sea dado un conjunto M. Consideremos todas las transformaciones biunívocas posibles de dicho conjunto; como siempre, representémoslas con las igualdades simbólicas $x' = a(x)$, $x' = b(x)$, $x' = f(x)$ y así sucesivamente o, lo cual es más cómodo ahora, simplemente con a, b, f, ... , etc. Si a y b son dos transformaciones $x' = a(x)$ y $x' = b(x)$, entonces su producto puede representarse por la igualdad $x' = a(b(x))$ o por la igualdad $x' = b(a(x))$, en función del orden en que éstas se realicen. De acuerdo con esto, convengamos en designar con $c = ab$ el producto de las transformaciones a, b cuando b es primera en realizarse, y por $c = ba$, el de las transformaciones a, b si a antecede a b.

Es fácil mostrar que *la colección de todas las transformaciones biunívocas del conjunto M constituye un grupo* si el producto de dos elementos de la referida colección, es decir, de dos transformaciones, se concibe según lo definido más arriba.

En rigor:

1) Junto con todo par de transformaciones a, b tomadas en un determinado orden, queda determinada una nueva transformación c; esto es, su producto:

$$c = ab.$$

2) Si a, b, c son transformaciones arbitrarias, entonces

$$(ab)c = a(bc).$$

La validez de esta igualdad es evidente. Efectivamente, si $x' = a(x)$, $x' = b(x)$, $x' = c(x)$ son transformaciones dadas, entonces $(ab)c$ y $a(bc)$ denotan igualmente la transformación $x' = a(b(c(x)))$. Vemos que el producto de las transformaciones siempre obedece a la ley asociativa.

3) Existe una transformación e (a saber, la transformación idéntica $e(x) = x$) tal que para cualquier transformación a tiene lugar la igualdad

$$ae = a.$$

En efecto, si $x' = a(x)$ es la transformación designada por a, siendo $e(x) = x$ la transformación idéntica, entonces ae es la transformación $x' = a(e(x)) = a(x)$ que no difiere de a.

4) Cualquiera que sea la transformación a, existe una transformación f tal que tiene lugar la igualdad

$$af = e.$$

La transformación inversa de la a dada constituye precisamente esta transformación f, es decir, $f = a^{-1}$.

Vemos que la serie de todas las transformaciones biunívocas del conjunto M satisface los axiomas de grupo 1 — 4. Por consiguiente, esta colección constituye un grupo. Su unidad es la transformación idéntica. Además del grupo de todas las transformaciones del conjunto M, se llama grupo de transformaciones del referido conjunto a cualquier colección determinada de transformaciones que satisfaga las exigencias de los axiomas de grupo.

Para que una cierta colección de transformaciones del conjunto M sea grupo, es suficiente que se cumplan las dos exigencias siguientes:

1) si a, b son transformaciones de una colección dada, entonces su producto ab debe estar en la colección dada;

2) si a es alguna transformación de una colección dada, entonces su transformación recíproca a^{-1} también debe estar en la colección dada.

En rigor, según lo notado más arriba, siempre se observa la ley asociativa para el producto de transformaciones; además, si una colección dada contiene, junto con toda transformación a, transformación inversa a^{-1} y, junto con todas dos transformaciones contiene el producto de éstas, entonces en dicha colección de transformaciones quede excluida la transformación idéntica $e = aa^{-1}$ (la unidad del grupo de transformaciones). Consiguientemente, si una colección de transformaciones satisface las dos exigencias señaladas, por tanto satisface las exigencias de todos los axiomas de grupo, constituyento así un grupo.

§ 158. GEOMETRÍA DE UN GRUPO DADO. Sean dados un conjunto de elementos arbitrarios M y cierto grupo de sus transformaciones G. Convengamos en llamar *espacio* al conjunto M, *puntos*, a sus elementos, y *figura*, a todo cúmulo de puntos. A la figura A llamémosla *equivalente*, o igual a la figura B, si en el grupo G existe una transformación que convierta la figura A en figura B.

De las dos condiciones que caracterizan el grupo de transformaciones, formuladas al final del **§ 157**, de inmediato se infiere que:

1) *Si la figura A equivale a la figura B, entonces la figura B equivale a la figura A.*

Efectivamente, si la figura A equivale a la figura B, entonces cierta transformación g del grupo G transforma A en B; por lo tanto la transformación inversa g^{-1} convierte B en A. Pero conforme a la segunda condición de las dos mencionadas, g^{-1} está en el grupo G. De tal modo, en el grupo G hay una transformación que convierte B en A, por consiguiente, B equivale a A.

2) *Si dos figuras A y B equivalen a una tercera figura C, entonces las figuras A y B equivalen una a otra.*

En efecto, si A equivale a C, entonces en el grupo G existe una transformación g que convierte A en C; y si B equivale a C, entonces en el grupo G existe una trans-

formación h que hace pasar B a C. Entonces la transformación h^{-1} convierte C en B y, por consecuencia, el producto $h^{-1}g$ transforma A en B. De aquí se deduce la equivalencia de las figuras A y B.

Vemos que las condiciones que determinan un grupo de transformaciones, se necesitan para asegurar las propiedades fundamentales de la equivalencia de figuras (reflexividad y transitividad),sin las cuales no tendría sentido utilizar el término «equivalen».

Siguiendo a F. Klein, llamaremos *geométricas* a tales propiedades de las figuras del espacio M y a tales magnitudes relacionadas con las figuras, que sean invariantes respecto a cualquier transformación del grupo G dado y, las cuales, por tanto, sean iguales para todas las figuras equivalentes. Llamaremos *geometría del grupo G* al sistema de proposiciones sobre las propiedades de figuras y de magnitudes, que sean invariantes respecto a todas las transformaciones del grupo G.

La idea de Klein de considerar diversas geometrias como teorías de los invariantes de los grupos correspondientes, permitió revelar los profundos nexos entre las geometrias descubiertas e investigadas para la década del 80 del siglo XIX. Esta idea fue expuesta por Klein al comenzar a ejercer la cátedra en Erlangen en 1878, en su conferencia «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen» conocida hoy en día bajo el título de «Programa de Erlangen».

Las aplicaciones concretas de los métodos de la teoría de grupos de Klein se exponen en la sección que sigue.

2. Grupo proyectivo y sus subgrupos principales

§ 159. En el párrafo antecedente definimos el concepto de geometría de un grupo dado. La definición enunciada por nosotros es extraordinariamente general, pues no impone restricciones algunas sobre el espacio M ni sobre el grupo G. Se entiende que la geometria del grupo dado G será substancial siempre que dicho grupo G y el espacio M en el cual se da aquél, estén suficientemente concretizados. En lo sucesivo, nos limitaremos a la consideración de LA GEOMETRÍA DEL GRUPO PROYECTIVO.

La investigación que realizaremos, nos hará ver de forma distinta y en un determinado sistema todas las geometrías distintas que estudiamos en los capítulos anteriores. Para no complicar la exposición con cálculos algebraicos engorrosos, la ejemplificaremos con un caso de dos dimensiones. Como aquí nos valdremos exclusivamente del método analítico, no costará trabajo alguno extender los resultados obtenidos al caso de dimensiones superiores. Para ello, cada una de las relaciones que hallemos, sólo habrá que sustituirla por una relación de la misma estructura, que debe tener un número mayor de variables. El propio lector podrá practicar fácilmente la modificación señalada.

§ 160. GRUPO PROYECTIVO. Consideremos un plano proyectivo, es decir, un conjunto de puntos determinados por una terna de coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3). La aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo, a consecuencia de la cual a cada punto $M(x_1, x_2, x_3)$ le corresponde un punto $M'(x_1', x_2', x_3')$ con las coordena-

das

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde c_{ik} son las constantes reales que satisfacen la condición de

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

y ρ' es cualquier número $\neq 0$, es una aplicación proyectiva o, como decimos también, una transformación proyectiva de un plano proyectivo.

En el § 106 mostramos que la colección de transformaciones proyectivas posee propiedades de grupo; a saber, según el teorema 23a, la transformación inversa de una transformación proyectiva también es proyectiva y, según el teorema 23b, el producto de dos transformaciones proyectivas es una transformación proyectiva. A consecuencia de ello y a base del § 157 podemos afirmar que *una colección de transformaciones proyectivas constituye un grupo.*

Hagamos notar que las propiedades de grupo de una colección de transformaciones proyectivas se establecen fácilmente por medios puramente analíticos (éstas fueron establecidas geométricamente en el § 106). En rigor, sean

$$\rho_1' x_i' = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(1)} x_\alpha \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

y

$$\rho_2' x_i' = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} x_\alpha \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

representaciones analíticas de dos transformaciones proyectivas $M' = f_1(m)$ y $M' = f_2(M)$. Consideremos un punto arbitrario $M(x_1, x_2, x_3)$; la primera transformación lo hace pasar a cierto punto $M'(x_1', x_2', x_3')$, y la segunda convierte el punto $M'(x_1', x_2', x_3')$ en el punto $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$. Conforme a las fórmulas (2) y (3) tenemos:

$$\begin{aligned} \rho_2' x_i'' &= \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} x_\alpha' = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} \left(\frac{1}{\rho_1'} \sum_{\beta=1}^{3} c_{\alpha\beta}^{(1)} x_\beta \right) = \\ &= \frac{1}{\rho_1'} \sum_{\beta=1}^{3} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} c_{\alpha\beta}^{(1)} \right) x_\beta. \end{aligned}$$

Si adoptamos $\rho_1'\rho_2' = \rho''$, $\sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} c_{\beta\alpha}^{(1)} = c_{i\beta}$, entonces podemos apuntar las relaciones antecedentes en forma de

$$\rho'' x_i'' = \sum_{\beta=1}^{3} c_{i\beta} x_\beta \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Vemos que las relaciones (4) que representan analíticamente la transformación $M'' = f_2(M') = f_2(f_1(M))$, es decir, el producto de las dos transformaciones dadas, tienen la misma estructura que las relaciones (1). En lo sucesivo, denotaremos

con $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ y C las matrices compuestas por las magnitudes $c_{ik}^{(1)}$, $c_{ik}^{(2)}$ y c_{ik}, respectivamente. A consecuencia de las igualdades $\sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} c_{\alpha k}^{(1)} = c_{ik}$ la matriz C es el producto de las matrices $C^{(1)}$ y $C^{(2)}$:

$$C = C^{(2)}C^{(1)}. \tag{5}$$

De tal modo, el producto de dos transformaciones proyectivas (2) y (3) es una transformación bilineal (4) cuya matriz es igual al producto de las matrices de las transformaciones (2) y (3).

Sean $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$ y Δ los determinantes de las matrices $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ y C. De la fórmula (5) se infiere la igualdad numérica

$$\Delta = \Delta^{(1)}\Delta^{(2)}. \tag{6}$$

De aquí, si $\Delta^{(1)} \neq 0$ y $\Delta^{(2)} \neq 0$, entonces $\Delta \neq 0$ también. Con esto mismo queda demostrado que el producto de transformaciones proyectivas es una transformación lineal con el determinante diferente de cero, es decir, es una transformación proyectiva.

Para cerciorarnos de que la transformación inversa de una transformación proyectiva es también proyectiva, baste notar que para $\Delta \neq 0$, las magnitudes x_1, x_2, x_3 se expresan linealmente por x_1', x_2', x_3' a partir de las relaciones (1). Luego, la transformación lineal obtenida por la inversión de las fórmulas (1), evidentemente, tiene una matriz inversa de la matriz de la transformación (1); su determinante Δ' es igual a $\frac{1}{\Delta}$. Consiguientemente, $\Delta' \neq 0$. Por cuanto la transformación inversa de una transformación proyectiva es lineal y posee un determinante diferente de cero, la misma es también proyectiva. Así pues, mediante cálculos algebraicos no complicados establecimos que el cúmulo de transformaciones proyectivas constituye un grupo, ya que satisface las dos condiciones que caracterizan el grupo de transformaciones (según el § 157).

El grupo de transformaciones proyectivas se llama grupo *proyectivo*. Toda transformación individual de un grupo proyectivo se define mediante la representación numérica de las magnitudes c_{ik} en las fórmulas (1). No obstante, dada la homogeneidad de las fórmulas (1), para definir la transformación (1), es suficiente prefijar ocho RELACIONES de las magnitudes c_{ik}. Las referidas ocho relaciones se llaman *parámetros* del grupo proyectivo.

Si toda transformación integrante de un grupo (cualquiera) se define mediante la representación numérica de n parámetros independientes, en este caso se trata de *un grupo de n términos*. De tal modo, el grupo proyectivo (sobre el plano) consta de ocho términos.

§ 161. INVARIANTES DEL GRUPO PROYECTIVO. La geometría proyectiva es la asignatura que estudia tales propiedades de figuras y tales magnitudes relacionadas con las figuras, que son invariantes respecto a cualquier transformación proyectiva. Por ende, *podemos definir la geometría proyectiva como geometría del grupo proyectivo*.

En el estudio de la geometría proyectiva un interés particular lo ofrecen los invariantes del grupo proyectivo, pues en la geometría proyectiva precisamente ellos constituyen magnitudes geométricas.

Llamaremos invariante de n puntos arbitrarios respecto del grupo proyectivo a una función escalar $F(M_1, M_2, \dots, M_n)$ que sea desigual idénticamente a la constante, pero que adquiera valores iguales en tales sistemas de n puntos que se convierten unos en otros mediante la transformación proyectiva*).

Hagamos constar que el grupo proyectivo no tiene invariantes de tres puntos y menos. Es fácil demostrarlo por reducción al absurdo. En efecto, admitamos que exista un invariante de tres puntos $F(M_1, M_2, M_3)$. Sobre un plano, elijamos tres puntos algunos M_1^0, M_2^0, M_3^0, designando con c el valor de la función $F(M_1^0, M_2^0, M_3^0)$. Sean M_1, M_2, M_3 tres puntos CUALESQUIERA. Sabemos que cualesquiera que sean los tres puntos M_1, M_2, M_3 y los tres puntos M_1^0, M_2^0, M_3^0, existe una transformación proyectiva que convierte los puntos M_1, M_2, M_3 en puntos M_1^0, M_2^0, M_3^0. Por eso $F(M_1, M_2, M_3) = c =$ const en contra de la definición es invariante. Se puede demostrar de la misma manera que un grupo proyectivo no tiene invariante de cuatro puntos ARBITRARIOS. Pero respecto al grupo proyectivo, existe un invariante de cuatro puntos SITUADOS SOBRE UNA MISMA RECTA: lo es la relación compleja (véase el § 115).

Para $n \geqslant 5$ existen ya invariantes de un sistema arbitrario de n puntos. Es notable que todos ellos pueden expresarse mediante relaciones complejas. Esta circunstancia quedará en claro si consideramos el caso más sencillo de $n = 5$.

Sean M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 cinco puntos arbitrarios de un plano. Mediante la construcción mostrada en la fig. 151, a base de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 dados podemos definir dos grupos de cuatro puntos cada uno: M_1, Q, M_2, P y M_5, R, M_4, P rectilíneamente dispuestos. Evidentemente, las relaciones complejas $(M_1QM_2P) = f_1$ y $(M_5RM_4P) = f_2$ son las funciones de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5; expresaremos este hecho del modo siguiente

$$f_1 = f_1(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$$

y

$$f_2 = f_2(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5).$$

Estas funciones son los invariantes del grupo proyectivo. Efectivamente, sean $M_1', M_2', M_3', M_4', M_5'$ un nuevo sistema de cinco puntos y P', Q', R', tres puntos definidos a base de los puntos M_i', al igual que P, Q, R están definidos a base de los puntos M_i. Si cierta aplicación proyectiva convierte los puntos $M_1, \dots, M_5$ en puntos $M_1', \dots, M_5'$, entonces esta misma aplicación hace pasar los puntos P, Q, R a puntos P', Q', R', por lo cual $(M_1QM_2P) = (M_1'Q'M_2'P')$ y $(M_5RM_4P) = M_5'R'M_4'P')$. De tal forma, toda vez que el sistema de puntos $M_1, \dots, M_5$ equivalga proyectivamente al sistema $M_1', \dots, M_5'$, tendrán lugar las igualdades $f_1(M_1, \dots, M_5) = f_1(M_1', \dots, M_5')$ y $f_2(M_1, \dots, M_5) = f_2(M_1', \dots, M_5')$. Precisamente esto significa que f_1 y f_2 son invariantes proyectivos.

---

*) Para evitar la necesidad de considerar los posibles casos especiales, al tratar de los puntos arbitrarios cuyo número sea más de dos, convengamos en sobreentender siempre un grupo de puntos tal que no tenga tres puntos algunos que se hallen sobre una misma recta.

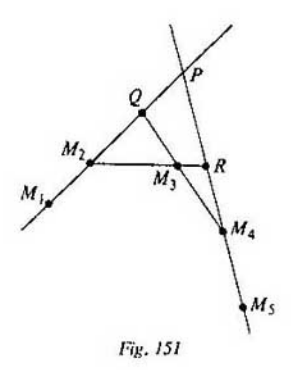


Fig. 151

Más aún, es fácil establecer que también viceversa, si tenemos $f_1(M_1, \dots, M_5) = f_1(M_1', \dots, M_5')$ y $f_2(M_1, \dots, M_5) = f_2(M_1', \dots, M_5')$, el sistema de cinco puntos $M_1, \dots, M_5$ equivale proyectivamente al sistema $M_1', \dots, M_5'$. En rigor, sean $M_1, \dots, M_5$ y $M_1', \dots, M_5'$ dos sistemas de puntos que satisfacen las relaciones $f_1(M_1, \dots, M_5) = f_1(M_1', \dots, M_5')$ y $f_2(M_1, \dots, M_5) = f_2(M_1', \dots, M_5')$. Podemos construir la aplicación proyectiva $M' = \varphi(M)$ que hace pasar los cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a cuatro puntos M_1', M_2', M_3', M_4'; por esta misma aplicación el punto P se convertirá en punto P'. Según el enunciado, $f_1(M_1, \dots, M_5) = f_1(M_1', \dots, M_5')$, es decir, $(M_1QM_2P) = (M_1'Q'M_2'P')$, y por eso la apl icación $M' = \varphi(M)$ debe transformar el punto Q en punto Q'. De manera análoga, de la igualdad $f_2(M_1, \dots, M_5) = f_2(M_1', \dots, M_5')$ se deduce que la aplicación $M' = \varphi(M)$ hace pasar el punto R a punto R'. Pero entonces, evidentemente, la aplicación $M' = \varphi(M)$ reduce el punto M_3 a punto M_3'. Con esto mismo queda demostrada la equivalencia de los sistemas $M_1, \dots, M_5$ y $M_1', \dots, M_5'$.

Ahora, supongamos que $F(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ sea cualquier invariante proyectivo de cinco puntos. Tomemos un sistema arbitrario de puntos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, deformándolo de modo que las magnitudes $f_1(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ y $f_2(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ permanezcan invariables. De cuanto precede resulta que todos los sistemas obtenidos por tal deformación equivalen al sistema de referencia y, consiguientemente, tras esta deformación la función $F(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ conserva un valor invariable. De tal modo, si f_1 y f_2 adquieren determinados valores numéricos, entonces F también adquiere un determinado valor numérico, por lo tanto F es una cierta función de f_1 y f_2, es decir, F tiene forma de $F = \Phi(f_1, f_2)$.

Por razonamientos exactamente análogos se puede mostrar que cualquier invariante proyectivo de $F(M_1, M_2, \dots, M_n)$, si $n \geqslant 5$, se expresa por medio de relaciones complejas. Por ende, a la relación compleja la llaman *invariante básico* del grupo proyectivo.

§ 162. GRUPOS DE AUTOMORFISMOS. Sea dado algún grupo de transformaciones G de un espacio arbitrario M. Las transformaciones del grupo G que convierten en sí mismo (es decir, aplican sobre sí mismo) cierto conjunto de puntos U del espacio M, se llaman *transformaciones automorfas* o, dicho en otros términos, *automorfis-*

mos respecto al conjunto U; los automorfismos pueden desplazar puntos del conjunto U; pero solamente de modo que todo punto del conjunto U se desplace a un punto del mismo conjunto.

La colección de todas las transformaciones del grupo G, automorfas respecto a un conjunto U, constituye un grupo.

Efectivamente:

1) Si cada una de las dos transformaciones del grupo G hace pasar el conjunto U a sí mismo, entonces el producto de dichas transformaciones es la transformación del grupo G, que posee la misma propiedad, es decir, el producto de dos automorfismos es un automorfismo.

2) Si cierta transformación del grupo G convierte el conjunto U en sí mismo, entonces la transformación inversa es la transformación del grupo G dotada de la misma propiedad, es decir, una transformación inversa de un automorfismo, es un automorfismo.

A base de lo expuesto en el § 157, estas propiedades individualizan el carácter de grupo de la colección de automorfismos.

§ 163. GRUPO AFÍN. Señalemos sobre un plano proyectivo una recta arbitraria: convengamos en llamarla infinitamente alejada, designándola con el símbolo ∞. La colección de transformaciones proyectivas automorfas respecto a la recta ∞, según lo dicho, es un subgrupo del grupo proyectivo. Lo llamaremos *grupo afín*, llamando *afín* a toda transformación que le pertenezca.

Evidentemente, las transformaciones afines hacen pasar los puntos finitos del plano proyectivo (es decir, los puntos no pertenecientes a la recta ∞) también a puntos finitos. Por eso las transformaciones afines son asimismo transformaciones biunívocas de un conjunto de puntos finitos del plano proyectivo, es decir, son transformaciones biunívocas del plano proyectivo cortado a lo largo de la recta ∞.

Llamaremos *plano afín**) al plano proyectivo sin la recta ∞.

Procuremos obtener la representación analítica de transformaciones afines. Con este objeto, introduzcamos en el plano proyectivo (de cuya consideración acabamos de partir) coordenadas homogéneas proyectivas (x_1, x_2, x_3) de modo que en estas coordenadas la recta ∞ tenga la ecuación $x_3 = 0$. Sea definida por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

cierta transformación proyectiva. La referida transformación será afín si de $x_3 = 0$, siendo cualesquiera x_1, x_2, se infiere la igualdad $x_3' = 0$ (es decir, si la recta $x_3 = 0$ se aplica sobre sí misma). Y para ello es necesario y suficiente que los coeficientes c_{31} y c_{32} sean iguales a cero. De tal manera obtenemos las representaciones siguientes de las transformaciones afines:

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= \qquad\qquad\qquad\quad c_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

*) Por su estructura topológica, el plano afín no difiere del plano euclídeo.

Como para todo punto finito $x_3 \neq 0$, el plano afín puede ser aritmetizado totalmente mediante las coordenadas heterogéneas $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$. Por eso huelgan las coordenadas homogéneas al investigar el grupo afín. Obtendremos una representación analítica del grupo afín en las coordenadas heterogéneas si dividimos la primera y la segunda igualdades de (**) en la tercera y pongamos $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, $\frac{x'_1}{x'_3} = x'$, $\frac{x'_2}{x'_3} = y'$; si en este caso además introducimos las notaciones $\frac{c_{i1}}{c_{33}} = a_i$, $\frac{c_{i2}}{c_{33}} = b_i$, $\frac{c_{i3}}{c_{33}} = c_i$, entonces el resultado podrá presentarse en forma de

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Toda transformación del tipo de (A) es afín, pero sólo a condición de $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$; en el caso contrario esta transformación no será biunívoca.

Dado que las fórmulas (A) contienen seis parámetros, el grupo afín se compone de seis términos.

§ 164. INVARIANTES DEL GRUPO AFÍN. La geometría del grupo afín se llama *afín*. La geometría afín que estudia las propiedades de figuras y las magnitudes invariantes respecto al grupo afín, relacionadas con dichas figuras, difiere sustancialmente de la geometría proyectiva. Por ejemplo, mientras que en la geometría proyectiva (sobre el plano proyectivo) dos rectas cualesquiera se intersecan, en la geometría afín (sobre el plano afín) existen rectas paralelas. Precisamente, las rectas del plano proyectivo convergentes en un cierto punto de la recta ∞, al cortarse el plano proyectivo a lo largo de la recta ∞, pasan a ser rectas paralelas del plano afín (pues se aleja su punto común al cortarse el plano). Evidentemente, en la geometría afín tiene lugar el postulado euclídeo de las paralelas: a través de todo punto que no pertenezca a una recta dada, pasa una, y sólo una recta, paralela a la dada. Notemos además que sobre la recta afín, al igual que sobre la euclídea, tiene lugar el orden lineal de puntos (véase el § 94).

Abordemos el problema de los invariantes del grupo afín, es decir, de las magnitudes geométricas desde el punto de vista de la geometría afín.

Ante todo, hagamos notar que todos los invariantes proyectivos al mismo tiempo son también invariantes afines. En efecto, si cierta función es invariante respecto a todas las transformaciones proyectivas, entonces es también invariante en el caso de todas las transformaciones afines, pues éstas constituyen una parte de aquéllas. Al contrario, existen invariantes afines no proyectivos.

El principal invariante afín es *la relación simple de tres puntos pertenecientes a una misma recta*. La relación simple de tres puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ (para designarla, introduciremos el símbolo $(M_1M_2M_3)$) puede determinarse por cualquiera de las dos fórmulas*):

*) Mediante la ecuación de la recta $y = kx + l$ se demuestra fácilmente que las referidas fórmulas determinan una misma magnitud.

$$(M_1M_2M_3) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}, \ (M_1M_2M_3) = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

La invariación de la función $(M_1M_2M_3)$ se demuestra sin dificultades algunas. En rigor, sean M_1', M_2', M_3' tres puntos resultantes de los puntos M_1, M_2, M_3 a consecuencia de alguna transformación del tipo de (A). Si designamos por x_i', y_i' las coordenadas de los puntos M_i', entonces de las fórmulas (A) obtendremos:

$$x_2' - x_1' = a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) =$$
$$= (M_1M_2M_3)[a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)],$$
$$x_3' - x_2' = a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2),$$

de donde

$$(M_1'M_2'M_3') = \frac{x_2' - x_1'}{x_3' - x_2'} = (M_1M_2M_3),$$

precisamente esto significa que la función $(M_1M_2M_3)$ es invariante respecto a cualquier transformación afín . No existen invariantes afines de tres puntos arbitrariamente dispuestos (que no se hallen sobre una misma recta). Esto se explica por que tres puntos arbitrarios que no se hallen sobre una misma recta, pueden transformarse afínmente en tres puntos cualesquiera no pertenecientes a una misma recta (en el § 161 señalamos que el grupo proyectivo no tiene invariantes de cuatro puntos arbitrarios; se demuestra bien análogamente la proposición de que el grupo afín desconoce invariante de tres puntos arbitrarios). Para $n \geqslant 4$ existen invariantes afines de un sistema arbitrario de n puntos. Es notable que todos ellos puedan expresarse a través de relaciones simples (esto puede demostrarse mediante razonamientos análogos a los aducidos en el § 161). Es por eso que la relación simple de tres puntos de una recta se llama *invariante básico del grupo afín*.

NOTA. El plano afín y, correspondientemente, la geometría afín pueden definirse de un modo absolutamente independiente de la geometría proyectiva, mediante un sistema apropiado de axiomas.

A saber, puede llamarse plano afín un conjunto de objetos de dos clases: puntos y rectas que satisfagan las exigencias de los axiomas de cinco grupos, de los cuales:

el primer grupo que define las relaciones de pertenencia recíproca entre objetos, comprende los primeros tres axiomas del grupo I del sistema de axiomas de la geometría euclidiana (§ 12) (es decir, los axiomas de dos dimensiones del grupo I);

el segundo grupo que define el orden de puntos sobre la recta, coincide con el segundo grupo de axiomas de la geometría euclidiana (dado el orden lineal de puntos sobre la recta afín, los axiomas afines de orden deben coincidir con los axiomas de orden de la geometría euclidiana);

el tercer grupo contiene el axioma de continuidad de Dedekind;

el cuarto grupo incluye el axioma de paralelismo de Euclides;

el quinto grupo encierra la proposición de Desargues (cuya formulación ha de modificarse un poco, tomando en consideración la existencia de las rectas paralelas)*).

*) Véase *D. Hilbert*, «Die Grundlagen der Geometrie».

Para definir el espacio afín, hemos de admitir todos los axiomas de la geometría tridimensional de Euclides, menos los axiomas de congruencia.

A su tiempo demostramos que los axiomas que subyacen en la base de la geometría elemental, constituyen un sistema completo. Del mismo modo se puede demostrar que el sistema de axiomas de la geometría afín es completo. En tanto, el sistema de axiomas afines es parte del sistema de Hilbert. A primera vista, esta circunstancia parece ser paradójica. No obstante, es fácil de explicar.

Es que la completitud de los axiomas afines (la misma significa que cualquier realización de éstos es isomorfa a una única realización determinada (aritmética, por ejemplo)), no impide que se agreguen nuevos axiomas de congruencia a los afines, pues JUNTO CON ELLOS SE INTRODUCE TAMBIÉN UNA NUEVA RELACIÓN ENTRE OBJETOS GEOMÉTRICOS (a saber, la relación de congruencia). Con este respecto, véase la definición de la completitud del sistema de axiomas enunciada en el § 75.

§ 165. GRUPO UNIMODULAR AFÍN. La transformación afín

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

la llamaremos *unimodular* si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Es fácil mostrar que las transformaciones unimodulares afines constituyen un grupo. Efectivamente:

1) El producto de dos transformaciones unimodulares afines es una transformación unimodular afín.

Para probarlo, notemos que si la transformación

$$x'' = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y'' = a_2x + b_2y + c_2$$

es el producto de las transformaciones

$$x' = a_1^{(1)}x + b_1^{(1)}y + c_1^{(1)},$$
$$y' = a_1^{(1)}x + b_2^{(1)}y + c_2^{(1)}$$

y

$$x'' = a_1^{(2)}x' + b_1^{(2)}y' + c_1^{(2)},$$
$$y'' = a_2^{(2)}x' + b_2^{(2)}y' + c_2^{(2)},$$

entonces las matrices de estas transformaciones están enlazadas por la relación

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1^{(2)} & b_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} & b_2^{(2)} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_1^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} & b_2^{(1)} \end{matrix} \right\| .$$

De aquí, para los determinantes de dichas matrices tiene lugar la igualdad $\Delta = \Delta^{(1)}\Delta^{(2)}$. Por consiguiente, si $\Delta^{(1)} = \pm 1$ y $\Delta^{(2)} = \pm 1$, entonces $\Delta = \pm 1$.

2) La transformación inversa de una transformación unimodular afín es unimodular afín.

Para demostrarlo, baste señalar que las transformaciones afines mutuamente inversas tienen matrices mutuamente inversas y, por lo tanto, determinantes biunívocos, es decir, si Δ_1 es el determinante de una transformación dada y Δ_2, el de su transformación inversa, entonces $\Delta_2 = \frac{1}{\Delta_1}$. De aquí, si $\Delta_1 = \pm 1$, entonces $\Delta_2 = \pm 1$.

Vemos que la colección de transformaciones unimodulares satisface las dos condiciones que determinan, según el § 157, el carácter de grupo de una colección de transformaciones. De tal forma, las transformaciones unimodulares constituyen, en efecto, un grupo. Lo llamaremos *unimodular afín,* al igual que la geometría basada en él.

El grupo unimodular afín consta de cinco términos, ya que en el caso de la transformación unimodular los seis parámetros de las fórmulas (*) están enlazados por la ecuación $a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$ y, por consiguiente, entre ellos hay sólo cinco términos independientes.

Evidentemente, todos los objetos de la geometría afín general al mismo tiempo son también objetos de la geometría unimodular afín. Pero en ésta concurren los objetos que no pertenecen a aquélla, pues la clase de los invariantes del grupo unimodular afín es más amplia que la de los invariantes del grupo afín general.

Ahora mostraremos que el grupo unimodular afín posee un invariante de tres puntos arbitrariamente dispuestos. Pasen a tres puntos $M_1'(x_1', y_1')$, $M_2'(x_2', y_2')$, $M_3'(x_3', y_3')$ tres puntos arbitrarios de un plano afín $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, a consecuencia de cierta transformación unimodular afín. Entonces, como se establece fácilmente por cálculo directo, tiene lugar la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

De aquí se ve que el valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ es el invariante de los tres puntos M_1, M_2, M_3.

En la geometría unimodular afín, a todo triángulo $M_1M_2M_3$ le puede ponerse en correspondencia el invariante

$$S = \text{valor absoluto} \, \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

El número S se llama *área del triángulo* $M_1M_2M_3$. Evidentemente, en la geometría unimodular afín se puede definir también el concepto de área de un polígono y de área de una figura curvilínea. Precisamente, se puede llamar área de un polígono a la suma de áreas de los triángulos que lo componen, y llamar área de una figura curvilínea al límite de la sucesión de áreas de los polígonos que aproximan dicha figura.

De tal modo, entre los objetos de la geometría unimodular están las áreas de figuras.

§ 166. GRUPO ORTOGONAL. La transformación afín

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

se llama *ortogonal* si su matriz

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

satisface la condición

$$AA' = I, \tag{3}$$

donde la virgulilla denota la operación de transposición, e I es una unidad, es decir,

$$A' = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right\|, \qquad I = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Demostremos que la colección de transformaciones ortogonales posee propiedades de grupo.

1) El producto de dos transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal.

DEMOSTRACIÓN. Sean dadas transformaciones ortogonales con las matrices A_1 y A_2; su producto es una transformación afín con la matriz $A = A_2A_1$. A base de la regla de multiplicación de matrices podemos apuntar la identidad

$$AA' = (A_2A_1)(A_2A_1)' = (A_2A_1)(A_1'A_2') = A_2(A_1A_1')A_2'.$$

De aquí y a consecuencia de las igualdades $A_1A_1' = I$, $A_2A_2' = I$, tenemos:

$$AA' = A_2IA_2' = A_2A_2' = I.$$

Con esto mismo queda demostrado lo que se exigía.

2) La transformación inversa de una transformación ortogonal es ortogonal.

DEMOSTRACIÓN. Sean A la matriz de cierta transformación ortogonal y $B = A^{-1}$, la matriz de la transformación inversa de ésta. De la condición de ortogonalidad $AA' = I$ se deduce que $A' = A^{-1}$. De tal modo, $B = A'$. De aquí

$$BB' = A'(A')' = A'A = A^{-1}A = I.$$

Con esto mismo queda demostrado lo que se exigía.

De suerte que una colección de transformaciones ortogonales constituye un grupo. Lo llamaremos *grupo ortogonal*.

De la igualdad (3) se deduce que el determinante de la matriz A es igual a ± 1. De aquí concluimos que el grupo ortogonal es un subgrupo del grupo unimodular.

La condición de ortogonalidad apuntada de forma matricial (3) equivale a las tres relaciones escalares:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Por cuanto el grupo ortogonal proviene del grupo afín al superponerse tres enlaces sobre los seis parámetros a_i, b_i, c_i, el mismo consta de tres términos.

A las condiciones de ortogonalidad se puede darles una forma diferente de la (4). En rigor, como mostramos más arriba (al probar la ortogonalidad de la transformación inversa de una transformación dada), la matriz A de la transformación ortogonal satisface la relación

$$A'A = I.$$

De aquí tenemos

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1,\\ b_1^2 + b_2^2 &= 1,\\ a_1b_1 + a_2b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Los sistemas de igualdades (4) y (4') equivalen uno a otro.

A diferencia de todos los grupos considerados antes, el grupo ortogonal posee invariante de dos puntos. Es invariante, por ejemplo, la función de dos puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

La invariación de esta función puede establecerse mediante cálculos sencillos. A saber, sean $M_1'(x_1', y_1')$ y $M_2'(x_2', y_2')$ dos puntos obtenidos por la transformación ortogonal de los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} &\rho(M_1', M_2') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} =\\ &= \sqrt{[a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1)]^2 + [a_2(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1)]^2} =\\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (b_1^2 + b_2^2)(y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

De aquí, a consecuencia de las relaciones (4') obtenemos:

$$\rho(M_1', M_2') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(M_1, M_2).$$

En la geometría del grupo ortogonal la magnitud $\rho(M_1, M_2)$ se llama *distancia* entre los puntos M_1 y M_2. La distancia es el invariante básico de dicha geometría, pues los demás invariantes pueden expresarse por medio de distancias.

Al parecer, huelga explicar que la geometría del grupo ortogonal es la geometría elemental (euclidiana).

§ 167. COMPARACIÓN DE DIVERSAS GEOMETRÍAS. Hemos considerado el grupo proyectivo con sus subgrupos básicos: afín, unimodular afín y ortogonal. A estos grupos les corresponden las geometrías proyectiva, afín, unimodular afín y elemental (euclidiana).

Entre los grupos enumerados el más amplio es el que forma la base de la geometría proyectiva (el grupo proyectivo), el más estrecho, el que subyace en la base de la geometría elemental (el grupo ortogonal). Al mismo tiempo, entrre las geometrías enumeradas, la proyectiva tiene la clase más pobre en objetos, la elemental tiene la clase más rica. En la geometría elemental se puede considerar tanto objetos afines (la relación simple de tres puntos de una recta, el paralelismo, etc.) como proyectivos (la relación compleja de cuatro puntos, etc.). En la geometría proyectiva, al contrario, no se consideran las propiedades propiamente afines de figuras, y

en la afín no se consideran las propiedades métricas, es decir, las propiedades que se determinan por la medición de segmentos.

En general, es evidente que cuanto más amplio es el grupo que forma la base de una geometría tanto más estrecha es la clase de objetos geométricos. Eso se entiende, pues cuanto más transformaciones contiene un grupo tanto menos relaciones y funciones permanecen invariantes tras todas las transformaciones suyas. Mas, en este caso es menester señalar que las propiedades de figuras y las magnitudes relacionadas con las figuras, invariantes respecto a algún grupo, son más «resistentes» que las de figuras y las magnitudes invariantes respecto a su subgrupo cualquiera, ya que siguen invariables después de diversas transformaciones.

3. Geometrías de Lobachevski, de Riemann y de Euclides en el sistema proyectivo

§ 168. GRUPO DE AUTOMORFISMOS RESPECTO A LA LÍNEA REGULAR DE SEGUNDO ORDEN. En esta sección mostraremos que la geometría de Euclides, la de Lobachevski y la de Riemann son geometrías de ciertos grupos de automorfismos proyectivos.

Sobre un plano proyectivo, sea dada cierta línea regular de segundo orden k. Consideraremos el grupo de automorfismos proyectivos respecto a la línea k, es decir, el grupo de transformaciones proyectivas que aplican la línea k sobre sí misma (el hecho de que el conjunto de automorfismos arbitrarios constituye un grupo, está demostrado en el § 162).

Tienen lugar dos teoremas importantes que siguen:

TEOREMA A. *Si k es una línea oval y A, A' son dos puntos arbitrarios situados en el interior de la línea k, entonces existen dos, y sólo dos, automorfismos respecto a k que hacen pasar el punto A a punto A', convirtiendo la dirección arbitrariamente dada del punto A en dirección arbitrariamente dada del punto A'.*

TEOREMA B. *Si k es una línea nula, y A, A' son puntos arbitrarios de un plano proyectivo, entonces existen dos, y sólo dos, automorfismos respecto a k que convierten el punto A en punto A', haciendo pasar la dirección arbitrariamente dada del punto A a dirección arbitrariamente dada del punto A'*[*].

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA A. Sean a y a' rectas que pasan por A y A' en las direcciones dadas (fig. 152). Designemos por C y C' los polos de estas rectas respecto a k, por B, el punto en el cual la polar del punto A cruza la recta a, por B', el punto en el cual la polar del punto A' corta la recta a'. El trivértice ABC es autopolar respecto a k, es decir, todos los lados suyos son polares de los vértices opuestos. Una propiedad análoga la posee el trivértice $A'B'C'$.

Introduzcamos sobre el plano un sistema de coordenadas homogéneas proyectivas x_1, x_2, x_3, adoptando el trivértice ABC como trivértice de coordenadas: $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$. En estas coordenadas la ecuación de la línea k tendrá forma de (véase el § 134).

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

[*] La definición de la línea nula y de la oval de segundo orden viene dada en el § 134; en el teorema B, el plano proyecitvo ha de concebirse completado por elementos imaginarios, a no ser así, el concepto de línea nula no tendrá sentido.

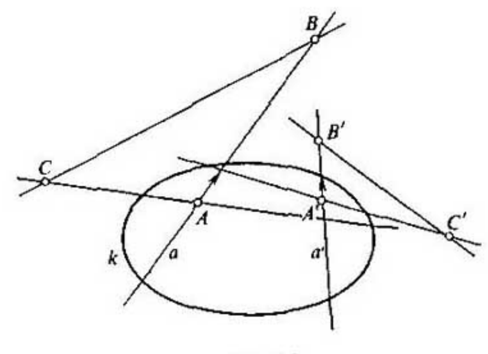


Fig. 152

Al elegir adecuadamente el punto de unidades $E(1, 1, 1)$, reduzcamos la ecuación de la línea k a la forma de

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \qquad (1)$$

Hagamos notar que precisamente los términos que contienen dos primeras coordenadas, deben llevar signos iguales en la ecuación, pues el punto A $(0, 0, 1)$ se halla en el dominio interior respecto a línea k (para este punto, el primer miembro de la ecuación (1) es negativo; véase el § 134).

Sobre el plano, introduzcamos un nuevo sistema de coordenadas homogéneas proyectivas x_1', x_2', x_3', adoptando el trivértice A', B', C' por trivértice de coordenadas de modo que sus vértices tengan las coordenadas siguientes: A' $(0, 0, 1)$, B' $(1, 0, 0)$, C' $(0, 1, 0)$. De ser adecuada la elección del punto de unidades E' $(1, 1, 1)$, la ecuación de la línea k en las coordenadas nuevas tendrá forma de

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0. \qquad (2)$$

(En esta ecuación deben figurar con signos iguales precisamente los términos que contienen las primeras dos coordenadas, pues el punto A' $(0, 0, 1)$ se halla en el dominio interior respecto a la línea k).

Supongamos que exista un automorfismo respecto a la línea k, que convierte el punto A en punto A', la recta a, en recta a', y una dirección dada, en una dirección dada (esto último quiere decir que los puntos situados sobre la recta a en un orden cíclico dado, pasan a puntos dispuestos en un orden cíclico dado sobre la recta a'). Como en este caso la línea k se transforma en sí misma, el polo de la recta a respecto a k debe pasar a polo de la recta a' respecto a k y, la polar del punto A debe convertirse en polar del punto A'; en otros términos, los puntos A, B, C deben convertirse en puntos A', B', C' (respectivamente). En tal caso el automorfismo φ debe representarse por las fórmulas

$$\rho' x_1' = c_{11}x_1, \quad \rho' x_2' = c_{22}x_2, \quad \rho' x_3' = c_{33}x_3, \qquad (3)$$

donde x_1, x_2, x_3 son las coordenadas viejas de la preimagen, x_1', x_2', x_3' son las coordenadas nuevas de la imagen. Transformando la ecuación (2) mediante las fórmulas

(3), obtendremos:

$$c_{11}^2x_1^2 + c_{22}^2x_2^2 - c_{33}^2x_3^2 = 0. \tag{4}$$

Esta es la ecuación de la preimagen de la línea k en las coordenadas viejas. Como φ es un automorfismo respecto a la línea k, las ecuaciones (1) y (4) deben equivaler una a otra; de aquí se deduce que deben tener lugar las igualdades

$$|c_{11}| = |c_{22}| = |c_{33}|.$$

Por cuanto en las fórmulas (3) el factor ρ' puede adoptarse arbitrariamente, entonces, sin perder la comunidad, podemos considerar iguales a uno los módulos de los números c_{11}, c_{22}, c_{33} y estimar positivo el número c_{11}. Para apuntar precisamente las fórmulas siguientes, admitamos que la dirección dada en el punto A vaya al dominio de los puntos de la recta AB, para los cuales $\frac{x_1}{x_3} > 0$, y la dirección dada en el punto A' vaya al dominio de los puntos de la recta $A'B'$, para los cuales $\frac{x_1'}{x_3'} > 0$; entonces, necesariamente tiene que haber $c_{33} > 0$, presentándose solamente dos posibilidades: 1) $c_{11} = 1$, $c_{22} = 1$, $c_{33} = 1$; 2) $c_{11} = 1$, $c_{22} = -1$, $c_{33} = 1$. De tal modo, pueden existir sólo dos automorfismos respecto a k, que satisfacen el enunciado del teorema:

$$1)\ \rho'x_1' = x_1, \qquad \rho'x_2' = x_2, \qquad \rho'x_3' = x_3, \tag{5}$$

$$2)\ \rho'x_1' = x_1, \qquad \rho'x_2' = -x_2, \qquad \rho'x_3' = x_3. \tag{6}$$

Pero es evidente que cada una de estas transformaciones proyectivas efectivamente es un automorfismo respecto a k, y cada una de ellas hace pasar el punto A a punto A', la recta a, a recta a', y una dirección dada sobre la recta a, a una dirección dada sobre la recta a'. Con esto mismo queda demostrado el teorema A.

La demostración del teorema B es la repetición casi literal de la antecedente, al cambiar la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ por la $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (al repetir la demostración antecedente aplicada al teorema B, hay que excluir la mención de los términos que deben concurrir con signos iguales en la ecuación; esta mención no tiene sentido puesto que todos los términos de la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ poseen signos iguales).

NOTA. De la demostración del teorema A se ve que cada automorfismo respecto a la línea oval k transforma los puntos internos de esta línea también en puntos internos, ya que, según las fórmulas (5) y (6), para $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$ se tendrá $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 < 0$.

El contenido de los teoremas A y B puede enunciarse también del modo siguiente:

1) *Cualesquiera que sean dos elementos lineales situados en el interior de la línea oval k, existen dos, y sólo dos, automorfismos respecto a la línea k, que superponen el primer elemento lineal sobre el segundo.*

2) *Cualesquiera que sean dos elementos lineales de un plano proyectivo, existen dos, y sólo dos, automorfismos respecto a la línea nula dada k, que superponen el primer elemento lineal sobre el segundo.*

Una propiedad análoga la poseen los movimientos (a la par con las reflexiones especulares) sobre el plano euclidiano. A base de tal analogía llamaremos *movi-*

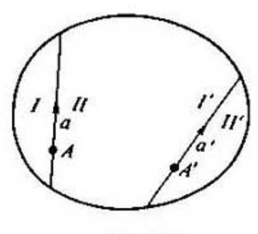


Fig. 153

mientos proyectivos a los automorfismos respecto a una línea regular de segundo orden k. La línea k que se transforma en sí misma a consecuencia de un movimiento proyectivo dado, la llamaremos *absoluto* del referido movimiento. Denominaremos *hiperbólicos* los movimientos del absoluto oval, *elípticos*, los del absoluto nulo.

En la fig. 153 se ofrecen una línea oval y, en su interior, dos elementos lineales aplicados a los puntos A y A'; las rectas, según las cuales están orientados dichos elementos lineales, están designadas por a y a'. Cada una de las rectas a y a' divide el interior de la línea k en dos segmentos; los denotamos con I, II y I', II'. De los razonamientos mediante los cuales fue demostrado el teorema A, se infiere que entre dos automorfismos del absoluto k, que superponen el primer elemento lineal sobre el segundo, el uno aplica el segmento I sobre el I' y el segmento II, sobre el II', y el otro aplica el segmento I sobre el II', el segmento II, sobre el I'. Si el punto A' coincide con el punto A, coincidiendo el elemento lineal del punto A' con el elemento lineal del punto A, entonces los automorfismos que superponen el primer elemento lineal sobre el segundo, se convierten en automorfismos que dejan invariable el elemento lineal adjunto al punto dado A. Uno de estos automorfismos será aplicación idéntica, el otro aplicará el segmento I sobre el II, y el segmento II, sobre el I. Este segundo automorfismo es análogo a la reflexión especular euclidiana respecto a una recta.

§ 169. MÉTRICA PROYECTIVA. Convengamos en llamar *hiperbólica* la geometría del grupo de movimientos hiperbólicos que tengan un absoluto cómun, *elíptica*, la geometría del grupo de movimientos elípticos con un absoluto común.

En cualquiera de tales geometrías dos figuras se consideran iguales, o congruentes, si una de ellas se transforma en otra mediante cierto automorfismo respecto al absoluto que determina la geometría (es decir, mediante un cierto movimiento proyectivo). Tanto en la geometría hiperbólica como en la elíptica existen invariantes de dos puntos. Por ejemplo, es un invariante de dos puntos arbitrarios P, Q la relación compleja $(PQUV)$, donde U, V son los puntos de intersección de la recta PQ con el absoluto, así como cualquier función de dicha relación compleja. Un interés particular lo ofrece el invariante del tipo de $c \ln (PQUV)$, donde c es constante. Mostraremos que el referido invariante posee propiedades análogas a las que caracterizan la longitud de segmento en la geometría elemental. Conviene considerar por separado los casos de la geometría hiperbólica y de la elíptica.

Primero, estudiaremos las propiedades del invariante $c \ln (PQUV)$ en la geometría hiperbólica.

Sea k una curva oval de segundo orden, la cual, en su calidad de absoluto, define la geometría hiperbólica; sean P, Q dos puntos arbitrarios situados en el interior de la línea k. Como P, Q se hallan dentro de k, serán reales los puntos U, V, en los cuales la recta PQ cruza la línea k; además, el par P, Q no separa el par U, V. Con tal disposición de los puntos P, Q, U, V la magnitud $(PQUV)$ es positiva, por consiguiente, $\ln (PQUV)$ es un número real. Luego, si el sentido del segmento PQ es contrario al del segmento UV, entonces $(PQUV) > 1$ y $\ln (PQUV) > 0$; si coinciden los sentidos de los segmentos PQ y UV, entonces $(PQUV) < 1$ y $\ln (PQUV) < 0$.

Supongamos que tenga lugar el primer caso. Tomemos sobre el segmento PQ un punto arbitrario R. Por cálculo directo es fácil mostrar que

$$(PQUV) = (PRUV) \cdot (PQUV).$$

Al someter a logaritmación esta igualdad, obtendremos la relación

$$\ln (PQUV) = \ln (PRUV) + \ln (RQUV). \qquad (^*)$$

La disposición de los puntos supuesta por nosotros hace que $(PQUV) > 1$, $(PRUV) > 1$ y $(RQUV) > 1$, consiguientemente, todos los términos de la igualdad $(^*)$ son positivos.

Si los segmentos PQ y UV tienen una misma dirección, entonces todos los términos de la igualdad $(^*)$ son negativos. En ambos casos, de $(^*)$ se deduce que

$$|\ln (PQUV)| = |\ln (PRUV)| + |\ln (RQUV)|.$$

De tal forma, si con un segmento arbitrario PQ situado dentro del absoluto k, comparamos un número positivo

$$\rho(PQ) = |c \ln (PQUV)|,$$

entonces en este caso

1) con segmentos congruentes se compararán números iguales, pues $\rho(PQ)$ es el invariante de los automorfismos del absoluto k;

2) los números comparados con el segmento PQ y con trozos del mismo PQ y RQ, satisfarán la igualdad

$$\rho(PQ) = \rho(PR) + \rho(RQ).$$

Por las mismas propiedades se caracteriza la longitud de segmento en la geometría elemental. A base de esta analogía, llamaremos longitud del segmento PQ al número positivo $\rho(PQ)$ en la geometría hiperbólica del absoluto k.

Junto con el número positivo $\rho(PQ)$, se puede comparar con el segmento arbitrario PQ el número relativo

$$s(PQ) = c \ln (PQUV),$$

el cual, en el caso de ser REAL la constante c, coincide con la longitud $\rho(PQ)$ del segmento PQ, o difiere en signo de ella.

Ahora, pasemos a la consideración del invariante $c \ln (PQUV)$ en la geometría elíptica.

El absoluto de la geometría elíptica denotado por k, constituye una línea nula de segundo orden; se define en las coordenadas proyectivas mediante una ecuación con coeficientes reales, pero consta exclusivamente de puntos imaginarios. Cualesquiera que sean los puntos reales P, Q sobre el plano proyectivo, los puntos U, V en los cuales la recta PQ cruza el absoluto, son imaginarios, en este caso las coordenadas

del punto U son números complejos conjugados con las coordenadas del punto V. Es fácil mostrar que para estas condiciones la relación compleja $(PQUV)$ es un número complejo con el módulo igual a uno. En efecto, si introducimos sobre la recta PQ un sistema de coordenadas no homogéneas proyectivas, designando con p, q, u, v las coordenadas de los puntos P, Q, U, V, entonces $u = \alpha + \beta i$, $v = \alpha - \beta i$ y

$$(PQUV) = \frac{u-p}{q-u} : \frac{v-p}{q-v} = \frac{[(\alpha - p) + \beta i][(q - \alpha) + \beta i)]}{[(\alpha - p) - \beta i]\,(q - \alpha) - \beta i)} .$$

Vemos que la relación compleja $(PQUV)$ es el cociente de dos números complejos conjugados, por consiguiente, $|(PQUV)| = 1$.

Al igual que todo número cuyo módulo es igual a 1, la relación compleja $(PQUV)$ puede representarse en forma de

$$(PQUV) = e^{i\varphi},$$

donde φ es una magnitud real determinada con la exactitud hasta el sumando $\pm 2\pi k (k = 1, 2, \dots)$. De aquí se deduce que $\ln (PQUV) = i\varphi$ es una magnitud puramente imaginaria y polidígito.

De tal manera, si tomamos una constante PURAMENTE IMAGINARIA c, entonces con el segmento arbitrario PQ se comparará una magnitud real polidígita

$$s(PQ) = c \ln (PQUV). \qquad (**)$$

Para comparar un determinado valor de esta magnitud con el segmento arbitrario PQ, consideremos un punto variable real X sobre la recta proyectiva que contiene el segmento PQ dado. Adoptemos $(PXUV) = e^{i\theta}$. Para $X \equiv P$ tenemos:

$$(PPUV) = 1 \quad \text{y} \quad \theta = \theta_0 = \dots = -4\pi, -2\pi, 0, +2\pi, +4\pi, \dots ;$$

si X ocupa una posición arbitraria dentro del segmento PQ, entonces a base de la ecuación $(PXUV) = e^{i\theta}$ se determina un conjunto numerable de valores correspondientes de θ. Al aproximarse X hacia el punto P, sin abandonar el interior del segmento PQ, cada uno de estos valores se aproxima hacia un determinado valor θ_0. Denotemos con $\tilde{\theta}$ el valor de θ que se aproxima hacia $\theta_0 = 0$, llamándolo principal. Convengamos también en llamar valor principal $\ln (PQUV)$ al límite, hacia el cual tiende la magnitud $\tilde{\theta}$ en el caso de tender X hacia el punto Q, permaneciendo dentro del segmento PQ.

Ahora, con cada segmento PQ, podemos comparar un número real bien determinado

$$s(PQ) = c \ln (PQUV), \qquad (**)$$

donde c es una constante imaginaria, $\ln (PQUV)$ es el valor principal del logaritmo natural de la magnitud $(PQUV)$.

Evidentemente, en este caso

1) con segmentos congruentes se compararán números iguales, ya que $s(PQ)$ es el invariante de los automorfismos del absoluto k;

2) los números comparados con el segmento PQ y con los trozos de este segmento PR y RQ, al tener signos iguales, satisfarán la igualdad

$$s(PQ) = s(PR) + s(RQ).$$

Estas propiedades del invariante $s(PQ)$ permiten llamar al número $|s(PQ)|$ longitud del segmento PQ en la geometría elíptica con el absoluto k.

Notemos de paso que en la geometría elíptica la longitud de toda una recta proyectiva, que sea igual a la del segmento PQ con los extremos unidos, se expresa por el número $2\pi|c|$.

Una vez determinada la longitud de segmento en las geometrías hiperbólica y elíptica, es natural determinar en estas geometrías la distancia entre dos puntos.

En la geometría hiperbólica cuyo campo es el dominio interior del absoluto, llamaremos distancia entre dos puntos a la longitud del único segmento que une los referidos puntos.

En la geometría elíptica cuyo campo es todo el plano proyectivo real*), llamaremos distancia entre dos puntos a la longitud del menor de dos segmentos definidos por dichos puntos.

Tanto en la geometría hiperbólica como en la elíptica la distancia $\rho(X, Y)$ entre los puntos arbitrarios X, Y posee las propiedades siguientes:

1) $\rho(X, X) = 0$.
2) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X) > 0$, si $x \neq Y$.
3) $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geqslant \rho(X, Z)$.

Dicho en otros términos, la magnitud $\rho(X, Y)$ tiene propiedades básicas inherentes a la distancia en el espacio euclidiano.

Omitimos la demostración de las propiedades 1) — 3) (sólo la última propiedad requiere demostración; las dos primeras son evidentes).

La definición de las longitudes de segmentos y de las distancias entre puntos, invariantes respecto al grupo de automorfismos del absoluto k, descrita en el presente párrafo, la llaman *métrica proyectiva*, dándole los calificativos *elíptica* o *hiperbólica*, en función de la clase del absoluto.

NOTA. Por cuanto el grupo de automorfismos del absoluto k según los teoremas A y B, es transitivo respecto a elementos lineales, podemos introducir *el proceso de medición de longitudes* tanto en la geometría hiperbólica como en la elíptica. Para ello, ante todo, ha de elegirse algún segmento AB por unidad de medida. Cualquiera que sea el otro segmento PQ, existe (a consecuencia de los teoremas A y B) un automorfismo del absoluto k que aplica el punto A en el punto P y convierte la dirección del segmento AB en la dirección del PQ. Si en este caso el punto B se aplica en el punto P_1 situado dentro del segmento PQ, entonces sobre el segmento PQ quedará trazado el segmento PP_1 congruente desde el punto de vista de la geometría del absoluto k al segmento AB. Trazando después el segmento $P_1P_2 \equiv AB$ sobre el segmento P_1Q y luego el segmento $P_2P_3 \equiv AB$ sobre el P_2Q, etc., determinaremos cuántos segmentos congruentes al segmento AB contiene el PQ. Así se hallará la parte entera de la longitud del segmento PQ. Luego podrán hallarse las décimas, centésimas, etc. de longitud.

Se entiende que la longitud determinada mediante esta medición, se expresará por el número $c \ln (PQUV)$, donde U, V son los puntos de intersección de la recta PQ con el absoluto k. En este caso el valor de la constante c está sujeto a la elección de la unidad lineal AB, a saber, $c = \dfrac{1}{\ln (ABUV)}$.

---

*) Hagamos recordar al lector que en la geometría elíptica el absoluto es una línea nula que consta de puntos imaginarios y no divide el plano proyectivo real en dominios algunos.

§ 170. Mostremos que la geometría hiperbólica dentro del absoluto oval es la geometría de Lobachevski.

Con este objeto, tomemos alguna línea oval de segundo orden designándola con k. Convengamos en llamar *puntos hiperbólicos* y *rectas hiperbólicas* a los elementos de la geometría hiperbólica determinada por el absoluto k. Los puntos hiperbólicos son puntos del plano proyectivo situados dentro de k; las rectas hiperbólicas son segmentos de rectas proyectivas, ubicados dentro de k, es decir, son cuerdas de la línea k. Los puntos de la propia línea k no se estiman como objetos hiperbólicos, por ende, los segmentos que representan rectas hiperbólicas son abiertos (no contienen sus extremos propios).

Las relaciones de pertenencia recíproca de objetos hiperbólicos satisfacen los requisitos del grupo I de axiomas de la geometría euclidiana. En rigor, al interpretar adecuadamente las propiedades más simples de las cuerdas de una línea de segundo orden, hallamos que:

1) A través de dos puntos hiperbólicos cualesquiera pasa una recta hiperbólica. En esto reside la exigencia del axioma I, 1.

2) A través de dos puntos hiperbólicos cualesquiera pasa sólo una recta hiperbólica. En esto radica la exigencia del axioma I, 2.

3) Sobre toda recta hiperbólica existen dos puntos hiperbólicos (inclusive una infinidad de puntos hiperbólicos); existen tres puntos hiperbólicos que no se hallan sobre una misma recta hiperbólica. En esto consiste la exigencia del axioma I,3.

Los demás axiomas del grupo I tienen un carácter espacial y no se toman en consideración en la geometría de dos dimensiones.

Luego, como sobre un segmento abierto los puntos están dispuestos en orden lineal, en la geometría hiperbólica, dentro de k, se cumplen los requisitos de los axiomas II,1 — II,3. El axioma de Pasch II,4 es válido en la geometría hiperbólica así como lo es sobre el plano proyectivo (véase el § 89).

De tal modo, en la geometría hiperbólica resultan cumplidos los requisitos de todos los axiomas de orden.

Abordemos los axiomas de congruencia.

En la fig. 154 aparecen dos segmentos hiperbólicos AB y $A'B'$ y dos ángulos hiperbólicos (h, k) y (h', k'). En la geometría hiperbólica, el segmento AB se considera congruente al segmento $A'B'$, si existe un automorfismo del absoluto k, que aplique el segmento AB sobre el $A'B'$; $\angle(h, k)$ se considera congruente al $\angle(h', k')$, si existe un automorfismo que haga pasar las semirrectas hiperbólicas h, k a semirrectas hiperbólicas $h'k'$. Del teorema A demostrado en el § 168 se infiere que sobre toda recta hiperbólica, en cada sentido respecto a cualquier punto de la misma, se puede trazar un segmento congruente a un segmento arbitrario dado, y que a cada semirrecta, desde cualquier lado de ésta, se puede aplicarle un ángulo congruente a un ángulo arbitrariamente dado.

De tal manera, a consecuencia del teorema A, en la geometría hiperbólica resultan satisfechas las exigencias básicas de los axiomas III, 1 y III, 4. Dado el carácter de grupo del conjunto de automorfismos, dos segmentos congruentes a un tercer segmento, son congruentes entre sí; con esto mismo queda satisfecha la exigencia del axioma III, 2.

Mediante un análisis no complicado podemos cerciorarnos de que los demás requisitos de los axiomas de congruencia también están satisfechos en la geometría hiperbólica (no vamos a aducir este análisis).

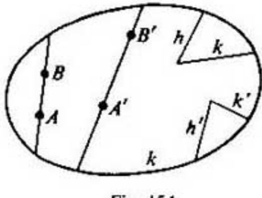


Fig. 154

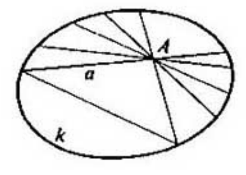


Fig. 155

Al fin, en la geometría hiperbólica es válido el principio de continuidad de Dedekind, puesto que el mismo se realiza sobre toda recta proyectiva. De aquí y del teorema 41 (del § 23) se desprende que en la geometría hiperbólica son válidas las proposiciones de Arquímedes y de Cantor.

Así pues, en la geometría hiperbólica del dominio interior del absoluto k se satisfacen las exigencias de todos los axiomas I — IV. Pero entonces, según sabemos, debe satisfacerse el requisito del axioma sobre las paralelas de Euclides o el del axioma sobre las paralelas de Lobachevski. Por lo visto, tiene lugar el segundo caso. Efectivamente, a través de un punto arbitrario A dentro de la línea k pasa una infinidad de cuerdas que no cruzan la cuerda dada a (fig. 155), y esto quiere decir que en la geometria hiperbólica a través de todo punto pasa una infinidad de rectas sin cruzar la recta hiperbólica dada.

A base de todo lo expuesto llegamos a la proposición siguiente: *la geometría hiperbólica del interior de un absoluto oval es la geometría no euclidiana de Lobachevski.*

§ 171. Es interesante considerar cómo son los diversos hechos de la geometría de Lobachevski al interpretarse dentro del absoluto k.

Señalemos algunos de ellos.

Por ejemplo, la recta hiperbólica h es perpendicular a la recta hiperbólica p si pasa a través del polo de la recta p respecto al absoluto k sobre el plano proyectivo.

En rigor, sean h y p rectas hiperbólicas que se intersecan en el punto Q; además, la recta h, siendo prolongada desde el interior del absoluto k, pase a través del polo P de la recta p (fig. 156). Apliquemos armónicamente el plano proyectivo sobre sí mismo, eligiendo por el centro de esta aplicación el punto P y, por el eje, su polar p. De la definición de la polar y de la aplicación armónica (véase el § 131 y la nota al final del § 106) se deduce que en el caso de la aplicación señalada, los segmentos del interior del absoluto k partidos por la recta p, se convierten unos en otros. De tal manera, respecto a la línea k, la referida aplicación es un automorfismo el cual, desde el punto de vista de la geometría hiperbólica, puede considerarse como reflexión especular respecto a la recta p.

Luego, es evidente que los trozos de la recta h partidos por el punto Q, se aplican uno en otro, mientras la recta p permanece inmóvil. Por consiguiente, los ángulos adyacentes definidos por las rectas h y p, desde el punto de vista de la geometría hiperbólica del absoluto k, son congruentes uno a otro, y entonces la recta h es perpendicular a la recta p.

Notemos de paso que el principio de reciprocidad, conocido en la teoría de polares, (que dice: si una recta contiene el polo de la otra, entonces ésta contiene el polo de la primera) en la geometría hiperbólica significa el carácter recíproco de la pro-

piedad de perpendicularidad de dos rectas (si una recta es perpendicular a otra, entonces ésta es perpendicular a la primera).

Detengámonos en la interpretación de las equidistantes y los oriciclos conocidos en la geometría no euclidiana (véanse los §§ 36 — 40).

Sea k_1 una línea oval de segundo orden que se halla en el interior del absoluto k y toca el absoluto en los puntos de su intersección con la recta p (fig. 157). Evidentemente, en el caso de la reflexión especular hiperbólica respecto a cualquier recta que pase a través del punto P (éste es el polo de la recta p respecto al absoluto), la línea k_1 se aplica sobre sí misma. Por lo tanto, todas las cuerdas de la línea k_1 orientadas hacia el punto P, son segmentos hiperbólicamente congruentes; además, la recta p es perpendicular a estas cuerdas, partiéndolas por la mitad. Por eso, la línea k_1 desde el punto de vista de la geometría hiperbólica, es una equidistante con el eje p. Si ambos puntos de adherencia de la línea k_1 al absoluto se convierten en uno solo, entonces, en el límite, la línea k_1 se convierte en ORICICLO. No nos detendremos en la demostración de esta última circunstancia.

Otros ejemplos numerosos de interpretación hiperbólica de los hechos no euclidianos los podrá hallar el lector en el libro de Baldus «Nichteuklidische Geometrie».

§ 172. Ahora, demostremos que *la geometría elíptica es la geometría de Riemann* (véanse los §§ 63 — 68).

Supongamos que el plano proyectivo, sobre el cual se establece la geometría elíptica, constituya un plano infinitamente alejado del espacio euclidiano E completado por elementos infinitamente alejados. En el espacio euclidiano E, sea dado un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z con el origen en el punto O. Partiendo de estas coordenadas, deduzcamos coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 (véase el § 102). Consideremos que el espacio E está completado no sólo por elementos infinitamente alejados, sino también por imaginarios (véase el § 127).

La ecuación $x_4 = 0$ define un plano infinitamente alejado. La ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ define sobre el referido plano una línea nula de segundo orden. Tomémosla por el absoluto de la geometría elíptica sobre el plano $x_4 = 0$. Al mismo tiempo, establezcamos sobre este plano las relaciones básicas de la geometría de Riemann así como se hizo en el § 67. Tenemos que establecer la identidad entre estas dos geometrías.

Al comparar las relaciones de enlace y de orden en estas geometrías, nos cercioraremos de que éstas son idénticas (iguales a las relaciones de enlace y de orden

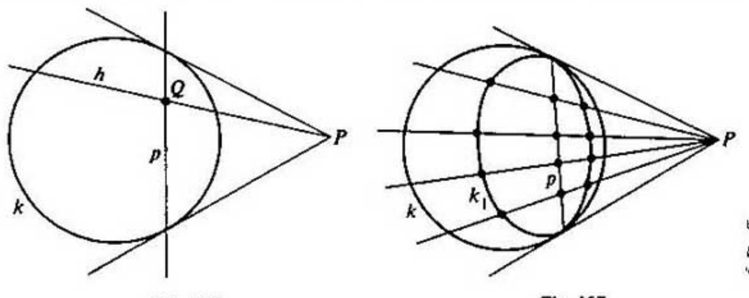


Fig. 156 *Fig. 157*

en la geometría proyectiva). Queda aclarar la cuestión de congruencia de figuras; a saber, hay que mostrar que dos figuras del plano $x_4 = 0$, congruentes en el sentido de la geometría elíptica, serán congruentes también en el sentido de la geometría de Riemann, y a la inversa. Dicho en otros términos, hay que mostrar que toda transformación de los puntos del plano $x_4 = 0$, la cual es un movimiento en el sentido de la geometría elíptica, será un movimiento en el sentido de la de Riemann, y viceversa.

Consideremos alguna esfera k, suponiendo que su centro esté en el punto O. Comparemos con un punto arbitrario M del plano $x_4 = 0$ un par de puntos diametralmente opuestos de la esfera k, que resultan al proyectarse el punto M del centro de la esfera k. Comparemos con una figura arbitraria F del plano $x_4 = 0$ una figura que pertenezca a la esfera k y conste de pares de puntos diametralmente opuestos correspondientes a los puntos de la figura F. De acuerdo con el § 67, dos figuras del plano $x_4 = 0$ se estiman congruentes en el sentido de la geometría de Riemann si son congruentes las figuras correspondientes a ellas sobre la esfera k. De aquí se deduce que sobre el plano $x_4 = 0$ todo movimiento en el sentido de la geometría de Riemann constituye tal transformación de puntos que las imágenes y preimágenes son proyecciones de las imágenes y preimágenes resultantes de cierto giro de la esfera k alrededor del centro o de una cierta reflexión especular de la esfera k respecto al plano diametral.

Ahora, notemos que todo giro de la esfera k alrededor del centro o la reflexión especular de la referida esfera respecto al plano diametral, se define en coordenadas cartesianas por las fórmulas del tipo de:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, \end{aligned} \tag{1}$$

donde x', y', z' son las coordenadas de la imagen, x, y, z, las de la preimagen. En las fórmulas (1) los coeficientes están enlazados por la condición de

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2}$$

Si x, y, z son las coordenadas cartesianas de algún punto sobre la esfera k, entonces la proyección del referido punto sobre el plano $x_4 = 0$ tiene como coordenadas homogéneas los números x_1, x_2, x_3 proporcionales a x, y, z (véase el § 102). De aquí se infiere que sobre el plano $x_4 = 0$ todo movimiento en el sentido de la geometría de Riemann se define por las fórmulas del género de:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}$$

donde x_1', x_2', x_3' son las coordenadas de la imagen, x_1, x_2, x_3 son las de la preimagen, ρ es cualquier número desigual a cero. A consecuencia de la identidad (2), toda vez que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, se tendrá también $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$. De tal forma, sobre el plano $x_4 = 0$ todo movimiento en el sentido de la geometría de Riemann es una transformación proyectiva automorfa respecto a la línea nula $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Con esto queda demostrado el hecho de que sobre el plano

$x_4 = 0$, todo movimiento en el sentido de la geometría de Riemann será también un movimiento en el sentido de la geometría elíptica con el absoluto $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Demostremos lo recíproco, es decir, que todo movimiento en el sentido de la geometría elíptica es un movimiento en el sentido de la de Riemann. Consideremos algún movimiento en el sentido de la geometría elíptica, designándolo con el símbolo f. En el plano $x_4 = 0$, tomemos un punto arbitrario M y una recta arbitraria orientada a que pase por M. El movimiento f convierte el punto M en cierto punto M' y la recta orientada a, en cierta recta orientada a'. Sean f_1 y f_2 dos movimientos en el sentido de la geometría de Riemann, cada uno de los cuales convierte M en M' y a en a'. Conforme a lo demostrado más arriba, f_1 y f_2 son movimientos en el sentido de la geometría elíptica. Pero en la geometría elíptica existen sólo dos movimientos que transforman M en M' y a en a' (véase el § 168, el teorema B). Por consiguiente, f coincide con f_1 o con f_2, es decir, un movimiento arbitrariamente adoptado en el sentido de la geometría elíptica es un movimiento en el de la geometría de Riemann. Así pues, sobre el plano $x_4 = 0$, un conjunto de todos los movimientos en el sentido de la geometría elíptica coincide con el conjunto de todos los movimientos en el sentido de la geometría de Riemann. Con esto mismo queda demostrada la identidad entre las referidas geometrías.

§ 173. GRUPO DE KLEIN. Ahora, mostraremos que la geometría de Euclides también es la geometría de un grupo de automorfismos proyectivos.

Sobre un plano proyectivo, tomemos alguna recta, designándola con el símbolo ∞; sobre ∞, tomemos dos puntos imaginarios cualesquiera I_1 e I_2 que posean coordenadas complejas conjugadas en un sistema arbitrario de coordenadas homogéneas proyectivas.

Para hacer cómodos los cálculos siguientes, supongamos que el sistema de coordenadas se haya elegido de modo que la ecuación $x_3 = 0$ represente la recta ∞, y los números $(1, i, 0)$ y $(1, -i, 0)$ sean las coordenadas de los puntos I_1 e I_2.

Consideraremos *la colección de transformaciones proyectivas automorfas respecto al par de puntos I_1 e I_2*. Llamaremos la referida colección (según el § 162, es un grupo) grupo de Klein.

Procuremos obtener representaciones analíticas de los automorfismos de Klein. Para ello, en primer lugar, notemos que todos los automorfismos de Klein al mismo tiempo son automorfismos respecto a la recta $x_3 = 0$, por eso pueden representarse analíticamente por las fórmulas

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= \qquad\qquad\qquad\quad c_{33}x_3 \end{aligned} \tag{*}$$

(más detalles al respecto véanse en el § 163).

Luego, debemos tomar en consideración dos posibilidades:

1) el automorfismo puede dejar fijo cada punto I_1 e I_2;

2) el automorfismo puede hacer pasar el punto I_1 a punto I_2 y el punto I_2, a punto I_1.

En el primer caso, poniendo en las ecuaciones (*) primero

$$x_1 = 1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 0, \quad x_1' = 1, \quad x_2' = i, \quad x_3' = 0, \quad \rho' = \rho_1,$$

luego

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = -i,\ \ x_3 = 0,\ \ x_1' = 1,\ \ x_2' = -i,\ \ x_3' = 0,\ \ \rho' = \rho_2,$$

obtendremos:

$$\rho_1 = c_{11} + ic_{12}, \qquad \rho_1 i = c_{21} + ic_{22}$$

y

$$\rho_2 = c_{11} - ic_{12}, \qquad -\rho_2 i = c_{21} - ic_{22}.$$

De aquí

$$c_{21} = -c_{12}, \quad c_{22} = c_{11}.$$

En el segundo caso, poniendo en las ecuaciones (*) primero

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = i,\ \ x_3 = 0,\ \ x_1' = 1,\ \ x_2' = -i,\ \ x_3' = 0,\ \ \rho' = \sigma_1,$$

después

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = -i,\ \ x_3 = 0,\ \ x_1' = 1,\ \ x_2' = i,\ \ x_3' = 0,\ \ \rho' = \sigma_2,$$

hallaremos:

$$\sigma_1 = c_{11} + ic_{12}, \qquad -\sigma_1 i = c_{21} + ic_{22}$$

y

$$\sigma_2 = c_{11} - ic_{12}, \qquad \sigma_2 i = c_{21} - ic_{22}.$$

De aquí

$$c_{21} = c_{12}, \qquad c_{22} = -c_{11}.$$

De tal modo, las fórmulas que representan los automorfismos de Klein, necesariamente tienen la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= \mp c_{12}x_1 \pm c_{11}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= \phantom{\mp c_{12}x_1 \pm c_{11}x_2 +} c_{33}x_3, \end{aligned} \qquad (^{**})$$

correspondiendo los signos superiores de la segunda línea a los automorfismos de primer tipo, y los inferiores, a los de segundo tipo. Es también del todo evidente que estas fórmulas, cualesquiera que sean los valores de sus parámetros, definen los automorfismos de Klein; en rigor, si en las fórmulas (**) ponemos $x_1 = 1$, $x_2 = \pm i$, $x_3 = 0$, entonces obtendremos $x_1' : x_2' : x_3' = 1 : \pm i : 0$. Por consiguiente, se ha encontrado la representación analítica del grupo de Klein en coordenadas homogéneas.

Con el propósito de considerar el grupo de Klein sobre un plano afín obtenido mediante el corte del plano proyectivo a lo largo de la recta $x_3 = 0$ y para todos los puntos del cual $x_3 \neq 0$, pasaremos a las coordenadas no homogéneas. Adoptemos

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{x_1'}{x_3'} = x', \quad \frac{x_2'}{x_3'} = y',$$

dividiendo término a término las primeras dos igualdades (**) por la tercera. Obtendremos las relaciones

$$x' = \frac{c_{11}}{c_{33}}x + \frac{c_{12}}{c_{33}}y + \frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad y' = \mp\frac{c_{12}}{c_{33}}x \pm \frac{c_{11}}{c_{33}}y + \frac{c_{23}}{c_{33}}.$$

Si apuntamos los parámetros de otro modo, suponiendo

$$\frac{c_{11}}{c_{33}} = r\cos\varphi, \quad \frac{c_{12}}{c_{33}} = -r\,\text{sen}\,\varphi, \quad \frac{c_{13}}{c_{33}} = u, \quad \frac{c_{23}}{c_{33}} = v,$$

entonces las igualdades precedentes podrán presentarse de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r(x\cos\varphi - y\ \text{sen}\,\varphi) + u, \\ y' &= r(\pm x\,\text{sen}\,\varphi \pm y\cos\varphi) + v. \end{aligned}\right\} \qquad (^{***})$$

De estas fórmulas se ve que el grupo de Klein coincide con la colección de tales transformaciones del plano euclidiano que se obtienen mediante la combinación de movimientos, reflexiones especulares y la variación en r veces de distancias entre todos los puntos. Tales transformaciones se llaman *transformaciones de semejanza*.

De tal forma, tiene lugar la proposición fundamental que sigue:

Si se consideran equivalentes figuras semejantes del plano euclidiano, entonces la geometría euclidiana puede estimarse como geometría del grupo de Klein.

Hagamos constar que una colección de rectas imaginarias que pasen por el punto I_1 o por el punto I_2, constituye un haz degenerado de segunda clase. Por cuanto éste se aplica sobre sí mismo a raíz de todas las transformaciones del grupo de Klein, lo llamaremos *absoluto* del referido grupo. Aplicando este término, podemos decir que la geometría de Euclides es la geometría del grupo de automorfismos respecto a una absoluto degenerado.

§ 174. PROPIEDADES DE LOS PUNTOS CÍCLICOS Y FÓRMULA DE LAGUERRE. Ahora partiremos de la consideración del plano euclidiano. Sobre éste, introduzcamos las coordenadas ortogonales cartesianas x, y y luego las coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, estimando que el punto de las coordenadas cartesianas x, y tiene coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3 ($x_3 \neq 0$), si $x_1 : x_3 = x$, $x_2 : x_3 = y$. Al fin, completemos el plano euclidiano por una recta infinitamente alejada $x_3 = 0$. Los puntos $I_1(1, i, 0)$ e $I_2(1, -i, 0)$ se llaman puntos circulares o *cíclicos* del plano euclidiano completado. Se denominan así por ser puntos comunes de todas las circunferencias. Efectivamente, en las coordenadas homogéneas, la ecuación de cualquier circunferencia

$$x_1^2 + x_2^2 + 2Ax_1x_3 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2 = 0 \qquad (^*)$$

se satisface si $x_1 = 1$, $x_2 = \pm i$, $x_3 = 0$, por consiguiente, la circunferencia (*) pasa por los puntos I_1 e I_2.

Las rectas imaginarias que pasen por un punto cíclico, se llaman *isótropas* o *mínimas*.

La ecuación de la recta que pase por el punto I_1, tiene la forma de $x_1 + ix_2 + cx_3 = 0$; la ecuación de la curva isótropa que pase por el punto I_1, tiene la forma de $x_1 - ix_2 + cx_3 = 0$. En las coordenadas no homogéneas, las rectas isótropas se definen por las ecuaciones del tipo de

$$y = ix + l$$

ó

$$y = -ix + l.$$

Es notable que la distancia entre dos puntos finales cualesquiera de una recta isótropa es igual a cero. En efecto, si $X_1(x_1, y_1)$ y $X_2(x_2, y_2)$ son dos puntos finales de una

recta isótropa, entonces

$$y_2 - y_1 = \pm i(x_2 - x_1),$$

de donde

$$\rho(X_1, X_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + i^2} = 0.$$

Precisamente merced a la propiedad referida las rectas isótropas se llaman mínimas. Evidentemente, a través de todo punto real (x_0, y_0) pasan dos rectas isótropas

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0);$$

designémoslas con j_1 y j_2. Sean u_1 y u_2 dos rectas reales que pasan por (x_0, y_0), con los coeficientes angulares k_1 y k_2. Podemos componer una relación compleja de dos pares de rectas u_1, u_2 y j_1, j_2, valiéndonos de la fórmula deducida en el § 119:

$$(u_1 u_2 j_1 j_2) = \frac{i - k_1}{k_2 - i} : \frac{-i - k_1}{k_2 + i}.$$

Esta magnitud constituye el invariante del grupo de Klein, y es natural que postulemos una relación existente entre ella y el valor euclídeo del ángulo formado por las rectas u_1 y u_2. Efectivamente, al denotar la magnitud $\angle (u_1, u_2)$ con φ de modo que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

y al efectuar las transformaciones (se aducen a continuación) del segundo miembro de la igualdad precedente, hallaremos:

$$(u_1 u_2 j_1 j_2) = \frac{i - k_1}{k_2 - i} : \frac{-i - k_1}{k_2 + i} = \frac{(i - k_1)(k_2 - i)}{(k_2 - i)(-i - k_1)} =$$

$$= \frac{k_1 k_2 + 1 - i(k_2 - k_1)}{k_1 k_2 + 1 + i(k_2 - k_1)} = \frac{1 - i \operatorname{tg} \varphi}{1 + i \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi} = e^{-2i\varphi}.$$

De aquí $-2i\varphi = \ln(u_1 u_2 j_1 j_2)$ y

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln(u_1 u_2 j_1 j_2). \qquad (^{**})$$

La fórmula (**) conocida por *fórmula de Laguerre* representa el ángulo euclídeo como un invariante proyectivo. Es análoga a las fórmulas que expresan la longitud de segmento en la geometría hiperbólica y la elíptica (véase el § 169). La fuente de esta analogia radica en el principio de dualidad (más detalles véanse en *Klein*, Nicht—Euklidische Geometrice, cap. VI).

A base de lo expuesto en los últimos párrafos, el lector pudo cerciorarse de que los métodos de la teoría de grupos reducen a un esquema único los sistemas geométricos más principales (de Euclides, de Lobachevski, de Riemann), permitiendo así ver algo consubstancial en lo que, al parecer, es contrario.

Capítulo VII

ESPACIO DE MINKOWSKI

1. Espacio afín multidimensional

§ 175. El objeto principal del presente capítulo es el espacio de Minkowski; dicho espacio ofrece un interés considerable desde el punto de vista del aparato matemático de la física, por estar enlazado directamente con las ecuaciones de la teoría especial de la relatividad. El espacio de Minkowski constituye un espacio afín con cierta métrica particular, es decir, un espacio afín en el cual están determinadas de cierto modo las distancias entre puntos (así también la congruencia de figuras, el movimiento, etc.).

En relación con la física, resulta ser particularmente importante el espacio CUADRIDIMENSIONAL de Minkowski. Con el propósito de estudiar el referido espacio, tenemos que exponer preliminarmente la teoría de espacios afines multidimensionales. La exposición se basa sobre el concepto de espacio lineal, y la parte principal de ésta no depende de las construcciones axiomáticas precedentes.

§ 176. Sea L algún conjunto; admitamos que 1) esté dada una regla según la cual a cada par de elementos x, y del conjunto L le corresponde un elemento del mismo conjunto L; lo llamaremos *suma* de x e y, designándolo con $x + y$; 2) esté dada una regla según la cual a cada par x, λ compuesto por el elemento x del conjunto L y el número real λ, también le corresponde un elemento del conjunto L; lo llamaremos *producto* de x por λ, denotándolo con λx(o $x\lambda$). Las operaciones de axicionar los elementos de L y de multiplicarlos por números reales pueden prefijarse de cualquier modo, pero en este caso deben observarse las exigencias de los aciomas siguientes:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Entre los elementos del conjunto L existe un elemento θ tal que $x + \theta = x$ para cualquier x; θ se llama elemento *nulo* de L.
4. Para todo x existe un elemento y tal que $x + y = \theta$; el elemento y se llama *opuesto* del elemento x, se designa con $-x$.
5. $1 \cdot x = x$.
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$; aquí y más abajo α, β denotan cualesquiera números reales.
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

El conjunto L para cuyos elementos están definidas las operaciones de adicionar y de multiplicar por números reales con la observación de los axiomas enumerados, se llama *espacio lineal* real; también llamaremos *vectores* a los elementos del espacio

lineal. En lo sucesivo, hablaremos sencillamente sobre el espacio lineal, sin especificar que se trata precisamente del espacio real, por cuanto no consideraremos espacios de otro tipo.

Uno de los ejemplos concretos más simples del espacio lineal es el conjunto de vectores geométricos cuyas adición y multiplicación por números reales están definidas según las reglas de álgebra vectorial elemental.

De los axiomas I — 8 pueden deducirse los siguientes teoremas (los aducimos sin demostrar, remitiendo al lector a cualquier curso de álgebra lineal):

1) En el espacio lineal se contiene solamente un único elemento nulo.

2) Para todo elemento x existe solamente un único elemento opuesto $-x$.

3) $0 \cdot x = \theta$ para cualquier x.

4) $\theta \cdot \alpha = \theta$ para cualquier número α.

§ 177. Si tiene lugar la igualdad

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda l = \theta, \tag{1}$$

donde $x, y, \ldots l$ son vectores, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ son números entre los cuales por lo menos uno es diferente de cero, entonces se dice que los vectores $x, y, \ldots, l$ son *linealmente dependientes*; si de (1) se infiere que $\alpha = 0, \beta = 0, \ldots, \lambda = 0$, entonces los vectores $x, y, \ldots, l$ se llaman *linealmente independientes.*

Un espacio lineal se llama n-dimensional si en él hay n vectores linealmente independientes, pero cualesquiera vectores de número n + 1 son linealmente dependientes.

EJEMPLO. Consideremos un conjunto K_n cuyos elementos (vectores) son grupos ordenados compuestos por n números reales cada uno: $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Definamos las operaciones de adición de vectores arbitrarios $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ y de multiplicación de un vector $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ por un número real arbitrario λ, mediante las reglas siguientes:

1) $x + y = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\}$;

2) $\lambda x = \{\lambda x_1; \ldots; \lambda x_n\}$.

En este caso es fácil comprobar que se observan todas las exigencias de los axiomas I — 8 (el vector nulo es $\theta = \{0, 0, \ldots, 0\}$); si $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un vector arbitrario, entonces su vector opuesto será $-x = \{-x_1, -x_2, \ldots, -x_3\}$. Por consiguiente, K_n con las operaciones dadas constituye un espacio lineal.

En el espacio K_n hay n vectores linealmente independientes, por ejemplo, $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}, \{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \{0, 0, 0, \ldots, 0, 1\}$. De otra parte, cualesquiera vectores de número $n + 1$ son linealmente dependientes. En rigor, consideremos vectores arbitrarios $a_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\}$, $a_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\}, \ldots, a_{n+1} = \{a_{n+1\,1}, a_{n+1\,2}, \ldots, a_{n+1\,n}\}$, componiendo una matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,n} \end{pmatrix}$$

Según el teorema conocido del rango de la matriz, el número máximo de filas linealmente independientes de una matriz es igual al número máximo de sus columnas linealmente independientes. Mas, en esta matriz hay sólo n columnas; por consiguiente, el número de columnas linealmente independientes no supera n, por lo tanto, el número de filas linealmente independientes tampoco es superior a n. De tal modo, las filas de esta matriz, cuyo total es $n + 1$, deben guardar una dependencia lineal, lo cual significa la dependencia lineal de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Así pues, en el espacio K_n hay n vectores linealmente independientes, pero cualesquiera vectores de número $n + 1$ son linealmente dependientes. Por consiguiente, K_n es un espacio lineal n-dimensional; lo llaman espacio *coordenado* o *aritmético* n-dimensional.

En el espacio n-dimensional lineal, todo grupo de vectores linealmente independientes tomados en número n, se llama *base*. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base, x, un vector arbitrario. Como el total de vectores $x, e_1, \ldots, e_n$ es igual a $n + 1$, entonces debe tener lugar la igualdad

$$\alpha x + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n = \theta, \tag{2}$$

donde por lo menos uno de los números $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ difiere de cero. El número α no puede ser igual a cero, pues entonces los vectores $e_1, \ldots, e_n$ resultarían linealmente dependientes. Por eso podemos dividir por α y reducir la igualdad (2) a la siguiente forma

$$x = \left(-\frac{\beta_1}{\alpha}\right) e_1 + \ldots + \left(-\frac{\beta_n}{\alpha}\right) e_n;$$

al introducir las notaciones $-\beta_k/\alpha = x_k$, obtendremos:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n. \tag{3}$$

La expresión del vector x mediante la fórmula (3) se llama *descomposición* de x respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$; los números $x_1, \ldots, x_n$ se llaman *coordenadas* de x respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$. Es fácil cerciorarnos de que la descomposición de x respecto a una base dada, es la única; en rigor, admitamos que además de (3) tenga lugar también la igualdad

$$x = x_n' e_1 + \ldots + x_n' e_n. \tag{4}$$

De (3) y (4) se deduce que

$$(x_1' - x_1)e_1 + \ldots + (x_n' - x_n)e_n = \theta; \tag{5}$$

puesto que los vectores $e_1, \ldots, e_n$ son linealmente independientes, a base de (5) obtenemos: $x_1' - x_1 = 0, \ldots, x_n' - x_n = 0$, ó $x_1' = x_1, \ldots, x_n' = x_n$, es decir, las descomposiciones (3) y (4) no pueden diferenciarse una de otra.

Al multiplicar (3) por un número λ, obtendremos:

$$\lambda x = (\lambda x_1)e_1 + \ldots + (\lambda x_n)e_n,$$

es decir, *a la multiplicación de un vector por un número le corresponde la multiplicación de todas las coordenadas suyas por el mismo número.*

Luego, esté descompuesto respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$ un vector arbitrario y:

$$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n. \tag{6}$$

Al sumar término a término (3) y (6), obtendremos:

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + \dots + (x_n + y_n)e_n,$$

es decir, *a la adición de vectores le corresponde la de sus respectivas coordenadas.* De tal manera, si en un espacio lineal n-dimensional está elegida una base, entonces la representación de los vectores del referido espacio y las operaciones con sus vectores se aritmetizan completamente; y además se aritmetizan bien uniformemente (sin depender de la naturaleza de los objetos que son elementos del espacio). Dicho de otro modo, todos los espacios lineales n-dimensionales son isomorfos respecto a un espacio lineal n-dimensional concreto, precisamente al espacio aritmético K_n.

§ 178. En un espacio lineal L cualquiera sean dados arbitrariamente los vectores linealmente independientes $a_1, a_2, \dots, a_m$. Consideraremos el conjunto L' de todas las combinaciones lineales de los vectores $a_1, a_2, \dots, a_m$, es decir, el conjunto de todos los vectores del tipo de

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ son números cualesquiera. Evidentemente, si x e y son dos vectores de L', entonces $x + y$ también pertenece a L'; si λ es un número cualquiera, entonces, λx pertenece a L'; el vector nulo $\theta = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_m$ y el vector $-x = (-\lambda_1)a_1 + \dots + (-\lambda_m)a_m$ pertenecen a L'. De tal modo, el propio conjunto L' es un espacio lineal. Este es isomorfo a un espacio K_m coordenado y por ende es m-dimensional. Los vectores $a_1, a_2, \dots, a_m$ componen la base de L'; los números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ son las coordenadas del vector x de L' respecto a la referida base.

§ 179. Sean dados algún conjunto $\mathfrak{A}$ cuyos elementos en lo sucesivo se llaman puntos, designándose con las mayúsculas A, B, C, y algún espacio lineal n-dimensional L; denotaremos sus vectores con las minúsculas a, b, x, y, ... (menos el vector nulo; lo designaremos con θ). Supongamos que a todo par ordenado de puntos A, B del conjunto $\mathfrak{A}$ le corresponda cierto vector x de L. Si en el par A, B el punto A se considera primero, y bajo esta condición al par A, B le corresponde el vector x, entonces nos valdremos de la inscripción:

$$AB = x.$$

A un par arbitrario de puntos iguales se le pone en correspondencia un solo vector de L, puesto que no tiene sentido estimar ordenado a tal par. La correspondencia de vectores de L a los pares de puntos de $\mathfrak{A}$ puede ser cualquiera; sólo se supone que se observan las exigencias de los dos axiomas siguientes:

1. *Para cualquier punto A y para cualquier vector x tendremos un único punto B tal que $AB = x$.*

2. *Si $AB = x$, $BC = y$, entonces $AC = x + y$. Un conjunto de puntos enlazado del modo referido con un espacio lineal de n dimensiones, se llama espacio afín n-dimensional.*

De los axiomas 1, 2 se infieren fácilmente dos teoremas:

1. *A todo par de puntos coincididos le corresponde un vector nulo.*

En efecto, sea x cualquier vector, y $AA = z$. Conforme al axioma 1, existirá un punto B tal que $AB = x$, y del axioma 2 sigue que $AB = z + x$; de tal forma, $z + x = x$ para cualquier x, de donde $z = \theta$.

2. *Si $AB = x$, entonces $BA = -x$.*

Efectivamente, si $BA = y$, entonces del axioma 2 se tiene $AA = x + y$, de donde $x + y = \theta$ e $y = -x$.

En lo sucesivo, para simplificar las formulaciones, vamos a llamar sencillamente vectores a los pares ordenados de puntos del espacio afín. A base de lo expuesto queda claro que en el sentido de las operaciones lineales (adición y multiplicación por un número), los pares ordenados de puntos del espacio afín juegan un papel plenamente análogo al de los vectores geométricos libres del álgebra vectorial ordinaria. No obstante, es sustancial el hecho de que tenemos vectores en un espacio de cualquier dimensión.

§ 180. En el espacio afín se puede introducir coordenadas afines. El sistema afín de coordenadas viene determinado por la fijación del origen de coordenadas 0 y de la base de coordenadas $e_1, e_2, \dots, e_n$. Sea M un punto arbitrario; descompongamos su radio vector OM respecto a la base de coordenadas:

$$OM = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Los coeficientes de esta descomposición se llaman *coordenadas* del punto M en el sistema dado.

Si M^* es un punto diferente, entonces

$$OM^* = x_1^* e_1 + x_2^* e_2 + \dots + x_n^* e_n.$$

De aquí

$$MM^* = OM^* - OM = (x_1^* - x_1)e_1 + \dots + (x_n^* - x_n)e_n.$$

De tal manera, al igual que en el álgebra vectorial ordinaria, obtenemos las coordenadas del vector MM^* sustrayendo las coordenadas del punto M de las del punto M^*.

Deduzcamos las fórmulas de transformación de las coordenadas afines al pasar a un nuevo origen O' y a una nueva base $e_1', e_2' \dots, e_n'$. Supongamos que se conozcan las coordenadas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ del punto O' respecto al sistema viejo, y los coeficientes de descomposición de vectores de la nueva base respecto a la base vieja:

$$\left.\begin{array}{l} e_1' = p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + \dots + p_{1n}e_n, \\ e_2' = p_{21}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{2n}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n' = p_{n1}e_1 + p_{n2}e_2 + \dots + p_{nn}e_n. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Anotemos brevemente las fórmulas (1) en forma de:

$$e_i' = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} e_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Si M es un punto arbitrario, entonces

$$OM = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

$$OM = O'M + OO' = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

Aquí las virgulillas marcan las nuevas coordenadas del punto M. Al comparar los segundos miembros de las dos últimas relaciones y al valernos de las fórmulas (2),

hallaremos:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k = \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_i' \sum_{k=1}^{n} \cdot p_{ik} e_k \right\} + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i' + a_k \right\} e_k.$$

En esta cadena de igualdades, la descomposición inicial y la obtenida al término del cálculo, están dadas respecto a una misma base. Como la descomposición respecto a la base dada es la única, obtenemos:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i' + a_k,$$

o, anotado detalladamente:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = p_{11} x_1' + p_{21} x_2' + \ldots + p_{n1} x_n' + a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = p_{1n} x_1' + p_{2n} x_2' + \ldots + p_{nn} x_n' + a_n. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Estas fórmulas expresan las coordenadas viejas del punto arbitrario mediante sus nuevas coordenadas. Designemos con P la matriz compuesta por los coeficientes de los segundos miembros de las fórmulas (1). Como los vectores $e_1', \ldots, e_n'$ son linealmente independientes, las filas de la matriz P también deben serlo. Por ende, el determinante de la matriz P difiere de cero. La matriz P^* resultante de la transposición de la matriz P, tiene el mismo determinante; por lo tanto, para P^* existe una matriz inversa. Evidentemente, los coeficientes de $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ que están en los segundos miembros de (3), componen la matriz P^*. Si designamos con q_{ik} los elementos de la matriz $Q = (P^*)^{-1}$, es decir, de la inversa de P^*, entonces de (3) obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x_1' = q_{11} x_1 + q_{12} x_2 + \ldots + q_{1n} x_n + b_1, \\ x_2' = q_{21} x_1 + q_{22} x_2 + \ldots + q_{2n} x_n + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = q_{n1} x_1 + q_{n2} x_2 + \ldots + q_{nn} x_n + b_n, \end{array} \right\} \quad (4)$$

donde $b_i = -\sum_{k=1}^{n} q_{ik} a_k$. Las fórmulas (4) expresan las nuevas coordenadas del punto a través de sus coordenadas viejas.

De conformidad con lo expuesto, si las fórmulas (4) responden a una cierta transformación de coordenadas afines, entonces el determinante de la matriz $Q = (q_{ik})$ es desigual a cero. A la inversa, si están escritas de antemano fórmulas del tipo de (4) con cualesquiera números b_i y con cualquier matriz $Q = (q_{ik})$ cuyo determinante es desigual a cero, entonces dichas fórmulas responden a una cierta transformación de coordenadas afines. En rigor, si Det $Q \neq 0$, entonces de las ecuaciones $\sum_{k=1}^{n} q_{ik} a_k = -b_i$ se hallarán a_k, es decir, se determinará el origen del

nuevo sistema; además, al invertir la matriz Q, hallaremos P^*, luego P, después de lo cual a base de las fórmulas (1) hallaremos la nueva base.

§ 181. Para mayor determinación, en lo sucesivo vamos a considerar $n = 4$. En el espacio cuadridimensional afín se determinan de forma natural *las rectas, los planos y los hiperplanos.*

Sean A un punto dado, a, un vector dado ($a \neq \theta$); llamaremos *recta* que pasa por el punto A en la dirección del vector a, a un conjunto de puntos M definidos por la ecuación

$$AM = \lambda a \tag{1}$$

para todos los valores numéricos posibles del parámetro λ; el propio punto A corresponde al valor $\lambda = 0$.

Es fácil comprender que todos los puntos de la recta son equitativos en el sentido de que a cada uno de ellos se puede atribuirle el papel del punto A. Efectivamente, si B es cualquier punto de la recta sujeta al examen, que responde al valor del parámetro $\lambda = \lambda_1$, entonces

$$BM = AM - AB = (\lambda - \lambda_1)a = \mu a, \tag{2}$$

donde $\mu = \lambda - \lambda_1$. De tal modo, el conjunto de puntos M definidos por la ecuación (1) con el parámetro λ puede definirse también por la (2) con el parámetro μ; en virtud de la ecuación (2), el punto B corresponde al valor de $\mu = 0$.

Ahora, sean dados un punto A y dos vectores linealmente independientes a y b; llamaremos *plano* que pasa por A en la dirección de los vectores a, b, a un conjunto de puntos M definidos por la ecuación

$$AM = \lambda a + \mu b \tag{3}$$

para todos los valores numéricos posibles de los parámetros λ y μ.

Al fin, si están dados un punto A y tres vectores linealmente independientes a, b, c, entonces al conjunto de puntos M definidos por la ecuación

$$AM = \lambda a + \mu b + \nu c \tag{4}$$

para todo género de valores numéricos de los tres parámetros λ, μ, ν, lo llamaremos *hiperplano* que pasa por el punto A en la dirección de los vectores a, b, c.

Al igual que en el caso de la recta, es fácil comprender que todos los puntos del plano y del hiperplano son equitativos en el sentido de que a cada uno de ellos puede atribuirse el papel del punto A.

Es importante notar que el hiperplano puede considerarse como un espacio afín de tres dimensiones. En efecto, el conjunto L' de todas las combinaciones lineales de los vectores a, b, c constituye un espacio lineal tridimensional (véase el § 178); al mismo tiempo, si M_1 y M_2 son dos puntos de un hiperplano, definidos por la ecuación (4) para $\lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1, \nu = \nu_1$ y para $\lambda = \lambda_2, \mu = \mu_2, \nu = \nu_2$, entonces al par ordenado de puntos M_1 y M_2 le corresponde el vector

$$M_1M_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)a + (\mu_2 - \mu_1)b + (\nu_2 - \nu_1)c$$

de L'. Esta correspondencia satisface los requisitos de los dos axiomas del § 179; consiguientemente, según la definición del § 179, el hiperplano es un espacio afín y además es tridimensional, pues lo es el espacio lineal L'. Los parámetros λ, μ, ν de la ecuación (4) no son sino las coordenadas del punto M en el sistema afín de coordenadas que se define dentro del hiperplano, dándose el punto A como origen de las

coordenadas y la terna de vectores a, b, c como base. Por supuesto, el mismo hiperplano puede definirse por la ecuación del tipo de (4), al tomarse en vez del punto A otro punto cualquiera del referido hiperplano, y en lugar de los vectores a, b, c, tres vectores cualesquiera de L', que sean linealmente independientes; tal modificación de la ecuación (4) corresponde al paso a otro sistema afín de coordenadas dentro del hiperplano dado.

De forma análoga a lo precedente se puede mostrar que todo plano es un espacio afín de dos dimensiones; toda recta es un espacio afín de una dimensión.

§ 182. De la definición de las rectas, los planos y los hiperplanos se deducen directamente la proposiciones siguientes:

1) Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A y B, existe una recta, y sólo una, que pasa por los puntos A y B (es decir, contiene dichos puntos); a saber, será una recta que pasa por A en la dirección del vector $a = AB$.

2) Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C no pertenecientes a una misma recta, existe un plano, y sólo uno, que pasa por los puntos A, B, C (precisamente, el plano que pasa por A en las direcciones de los vectores AB, AC).

3) Cualesquiera que sean cuatro puntos A, B, C, D no pertenecientes a un mismo plano, existe un hiperplano, y sólo uno, que pasa por puntos A, B, C, D (precisamente, el hiperplano que pasa por A en las direcciones de los vectores AB, AC, AD).

4) Si dos puntos diferentes A, B pertenecen a un plano α, entonces todos los puntos de la recta AB pertenecen al plano α. Para demostrarlo, baste definir el plano por la ecuación

$$AM = \lambda a + \mu b,$$

al adoptar $a = AB$; entonces todos los puntos de la recta AB se definen por la misma ecuación, si λ es variable y si $\mu = 0$.

5) Si dos planos diferentes α, β tienen dos puntos comunes A, B que no coinciden uno con otro, entonces todos los puntos comunes de los planos α, β se hallan sobre la recta AB. En efecto, si entre los puntos comunes de los planos α, β hubiese uno que no se hallase sobre la recta AB, entonces los planos α, β deberían coincidir en contradicción a la hipótesis.

6) Si tres puntos A, B, C que no se hallan sobre una misma recta, pertenecen a un hiperplano α, entonces todo el plano ABC pertenece a α (se demuestra análogamente a la cuarta proposición).

7) Si dos hiperplanos diferentes α, β tienen un punto común, entonces se intersecan según un plano.

DEMOSTRACIÓN. Sean e_1, e_2, e_3 vectores linealmente independientes en el hiperplano α. Como los hiperplanos α y β son diferentes, en el hiperplano β existirá un vector e_4 tal que e_1, e_2, e_3, e_4 sean linealmente independientes; además, en el hiperplano β existirán dos vectores e_5, e_6 más que componen una terna independiente junto con e_4. Por ser cuadridimensional todo el espacio, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 están sujetos a una dependencia lineal:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = 0;$$

aquí $\lambda_5 \neq 0$. Análogamente, existe la dependencia

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_6 e_6 = 0,$$

donde $\mu_6 \neq 0$. Adoptemos:

$$a = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \lambda_3 e_3,$$
$$b = \mu_4 e_4 + \mu_6 e_6 = -\mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 - \mu_3 e_3.$$

Los vectores a y b pertenecen al hiperplano α y al hiperplano β; de otra parte, estos vectores son linealmente independientes (ya que $\lambda_5 \neq 0$, $\mu_6 \neq 0$). Por eso, si A es un punto común de α y β, entonces la ecuación

$$AM = \lambda a + \mu b$$

define un plano perteneciente a α y a β. El referido plano abarca todos los puntos comunes de los hiperplanos α, β, pues en el caso contrario α y β deberían coincidir (según la tercera proposición).

8) Si el plano α tiene un punto común con el hiperplano β, entonces α se halla completamente en β, o α y β se intersecan según una recta (se demuestra análogamente a lo anterior).

§ 183. Sea definida una recta arbitraria por la ecuación $AM = \lambda a$; sean M_1, M_2, M_3 tres puntos diferentes de dicha recta, sean λ_1, λ_2, λ_3 los valores del parámetro λ correspondientes a ellos. Diremos que el punto M_2 se halla entre M_1 y M_3 si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ o $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$. Si en lugar del vector a tomamos el vector $b = \sigma a (\sigma \neq 0)$, entonces la misma recta se definirá por la ecuación $AM = \mu b$, donde $\mu = \frac{\lambda}{\sigma}$. De acuerdo a la nueva ecuación, a los puntos M_1, M_2, M_3 les corresponden los valores del nuevo parámetro: $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{\sigma}$, $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{\sigma}$, $\mu_3 = \frac{\lambda_3}{\sigma}$. Queda claro que si el número λ_2 está entre los números λ_1 y λ_3, μ_2 también está entre μ_1 y μ_3. De tal manera, la definición enunciada no depende de la elección del vector director de la recta; es fácil mostrar que ella tampoco depende de la elección del punto A.

Una vez definido el concepto "entre", se definen del modo ordinario el segmento, el triángulo, etc. Dentro de todo plano, para cualquier triángulo es válida la afirmación de Pasch; es válida la afirmación de que toda recta perteneciente a un plano dado, divide el referido plano en dos dominios, etc.

§ 184. En el espacio afín se define naturalmente *el paralelismo* de dos rectas, de una recta y de un plano, etc. Dos rectas definidas por las ecuaciones

$$A_1M = \lambda a_1, \qquad A_2M = \lambda a_2,$$

se llaman paralelas si no coinciden, y si los vectores directores son proporcionales (es decir, si a_2 es igual al producto de a_1 por un número). La recta

$$A_1M = \lambda a_1$$

se llama paralela al plano

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2$$

si no se halla en este plano, y si el vector a_1 puede descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2. La recta

$$A_1M = \lambda a_1$$

se llama paralela al hiperplano

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2$$

si no pertenece a dicho hiperplano, y si el vector a_1 puede descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2, c_2. Dos planos

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1, \qquad A_2M = \mu a_2 + \lambda b_2$$

se llaman paralelos si no coinciden, y si los vectores a_1, b_1 pueden descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2. El plano

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1$$

se llama paralelo al hiperplano

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2$$

si no se halla en el referido hiperplano, y si los vectores a_1, b_1 pueden descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2, c_2. Al fin, dos hiperplanos

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1, \quad A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2$$

se llaman paralelos si no coinciden uno con otro, y si los vectores a_1, b_1, c_1 pueden descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2, c_2. Son válidas las afirmaciones siguientes:

1) dos rectas son paralelas si, y sólo si, se hallan en un mismo plano y no se intersecan; a través de todo punto que no se halle sobre una recta, pasa una recta, y sólo una, paralela a la dada;

2) una recta y un plano son paralelos si, y sólo si, se hallan en un mismo hiperplano y no se intersecan;

3) una recta es paralela a un hiperplano si, y sólo si, no lo cruza;

4) un plano es paralelo a un hiperplano si, y sólo si, no lo corta;

5) dos hiperplanos son paralelos si, y sólo si, no se cortan.

En virtud de las proposiciones expuestas más arriba, se ve que por lo menos la geometría del espacio afín tridimensional que se desarrolla en la presente sección, no difiere de la geometría del espacio afín tridimensional en el sentido del § 164 (véase la nota al final del § 164).

§ 185. Las afirmaciones del párrafo precedente, al igual que las del § 183, son fáciles de demostrar algebraicamente (análogamente a como se hace en la geometría analítica ordinaria) si se emplean ecuaciones de imágenes geométricas en coordenadas afines.

Sea dado un sistema afín de coordenadas. Entonces toda ecuación de primer grado

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5 = 0 \tag{1}$$

define un hiperplano. Efectivamente, si $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ es alguna solución de la ecuación (1), entonces la referida ecuación puede apuntarse en forma de

$$A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + A_3(x_3 - x_3^0) + A_4(x_4 - x_4^0) = 0. \tag{2}$$

Suponiendo $x_i - x_i^0 = u_i$, obtendremos:

$$A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 + A_4u_4 = 0. \tag{3}$$

La ecuación (3) tiene tres soluciones linealmente independientes:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4),$$

presentándose cada solución de la ecuación (3) en forma de una combinación lineal de estas tres soluciones:

$$x_i - x_i^0 = u_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i \qquad (4)$$
$$(i = 1, 2, 3, 4);$$

dando todos los valores numéricos posibles a los parámetros λ, μ, ν, obtendremos todas las soluciones u_i de la ecuación (3) y, al mismo tiempo, todas las soluciones x_i de la ecuación (1). Si denotamos con M un punto que tiene las coordenadas x_i, con A, un punto que posee las coordenadas x_i^0, con a, b, c, los vectores que tienen las coordenadas a_i, b_i, c_i, entonces las igualdades numéricas (4) equivaldrán a la igualdad vectorial

$$AM = \lambda a + \mu b + \nu c. \qquad (5)$$

Con esto mismo queda demostrado que el conjunto M de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1), coincide con el hiperplano definido por la ecuación (5).

A la inversa, todo hiperplano se define por la ecuación de primer grado del tipo de (1). En rigor, si un hiperplano viene dado por una ecuación del tipo de (5), entonces, al pasar a las ecuaciones (4) equivalentes a ella y al excluir los parámetros λ, μ, ν, obtendremos una ecuación del tipo de (2), la cual se reduce de un modo evidente a una ecuación del tipo de (1).

De las afirmaciones recién demostradas y de las proposiciones 7), 8) del § 182 se infiere que 1) dos ecuaciones de primer grado que sean compatibles e independientes, definen un plano; 2) tres ecuaciones de primer grado que sean compatibles e independientes definen una recta.

§ 186. En el espacio afín se puede examinar hipersuperficies de segundo orden, es decir, las hipersuperficies que se definen en coordenadas afines por una ecuación de segundo orden. No vamos a exponer la clasificación de las hipersuperficies de segundo orden; en términos generales, es análoga a la clasificación afín bien conocida de las superficies de segundo orden en el espacio de tres dimensiones. Detengámonos sólo en un caso particular que tendrá importancia en lo sucesivo.

Sean (x_1, x_2, x_3, x_4) las coordenadas de un punto variable $M(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$, las de un punto constante A. Consideremos la ecuación

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) = 0 \qquad (1)$$

cuyo primer miembro es la forma cuadrática de los argumentos $x_1 - x_1^0, \ldots,$ $x_4 - x_4^0$ con los coeficientes g_{ik}; designaremos esta forma con Φ. Si adoptamos $x_i = x_i^0$, entonces la ecuación (1) quedará satisfecha. Esto quiere decir que el punto A pertenece a la hipersuperficie definida por la ecuación (1). Sea M otro punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1). Movamos el punto M según la recta que parte del punto A. Entonces las diferencias $x_i - x_i^0$ irán variando proporcionalmente, permaneciendo igual a cero el primer miembro de la ecuación (1). Por consiguiente, si cierto punto M se halla sobre la hipersuperficie (1), entonces todos los puntos de la recta AM estarán sobre dicha hipersuperficie. De tal manera, la hipersuperficie (1) consta de las rectas que pasan por el punto A, y por eso se llama cono de segundo orden con el vértice A. Desde luego, puede suceder que ningún punto, salvo A, satisfaga con sus coordenadas la ecuación (1); así será siempre que Φ sea una forma de signo definido. En este caso el cono se llama *imaginario*. Si Φ es una

forma de signo variable y regular (es decir, una forma de signo variable, cuyo determinante difiere de cero: Det $g_{ik} \neq 0$), entonces el cono 1) posee un conjunto infinito de rectas que lo conforman; 2) es cuadridimensional, es decir, no se halla por entero en algún hiperplano; 3) divide el espacio en dos dominios, en uno de los cuales $\Phi > 0$, en el otro $\Phi < 0$. Un cono así se llama cono real y regular de segundo orden. No vamos a demostrar que el cono real regular posee las propiedades enumeradas, sino explicaremos la esencia del fenómeno mediante un ejemplo. Consideremos la ecuación

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 - (x_4 - x_4^0)^2 = 0. \tag{2}$$

cuyo primer miembro es una forma cuadrática respecto a $x_i - x_i^0$ con los coeficientes $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -1$, $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. Esta forma es regular, pues Det $g_{ik} = -1 \neq 0$, y de signo variable (es positiva si $x_1 \neq x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 = x_4^0$, es negativa si $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 \neq x_4^0$). Consiguientemente, la ecuación (2) define un cono real regular de segundo orden. Para que se tenga una idea clara y evidente de las propiedades del cono definido por la ecuación (2), es útil notar que todo hiperplano $x_4 - x_4^0 = C$ corta dicho cono según una esfera de tres dimensiones

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = C^2$$

de manera análoga a como un plano perpendicular al eje de un cono circular ordinario, corta el referido cono según una circunferencia. El conjunto de puntos para los cuales el primer miembro de la ecuación (2) es negativo, se llama *región interior del cono* (2). El interior se divide en *dos huecos*, en uno de los cuales $x_4 > x_4^0$, en el otro $x_4 < x_4^0$.

§ **187**. Ahora nos ocuparemos de una proposición que tendrá un papel particularmente importante en lo sucesivo.

Sean dados cierto sistema afín de coordenadas y cuatro funciones:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ x_3' &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ x_4' &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

cada una de las cuales está definida en todo el espacio; con esto mismo viene dada la aplicación del espacio en sí mismo, pues a todo punto $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ le corresponde un punto $M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$. *Admitamos que la aplicación* (1) *sea una aplicación biunívoca del espacio sobre sí mismo* (a cualquier punto M' le corresponde una preimagen M, y sólo una); *además, sea colineal, es decir, a tres puntos cualesquiera M_1, M_2, M_3 situados sobre una misma recta, les correspondan las imágenes M_1', M_2', M_3' también ubicadas sobre una misma recta. Para estas condiciones las funciones f_1, f_2, f_3, f_4 son lineales, es decir, tienen forma de*

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + q_{14}x_4 + b_1,\\ x_2' &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3 + q_{24}x_4 + b_2,\\ x_3' &= q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3 + q_{34}x_4 + b_3,\\ x_4' &= q_{41}x_1 + q_{42}x_2 + q_{43}x_3 + q_{44}x_4 + b_4, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

siendo diferente de cero el determinante de la matriz $Q = (q_{ik})$.

En breve: *si una aplicación es colineal, será también lineal.*

Expondremos las principales etapas de la demostración de este teorema, omitiendo algunos detalles de los razonamientos.

1) Consideremos alguna aplicación colineal biunívoca del espacio afín sobre sí mismo. Sean A, B, C tres puntos del espacio que no están sobre una misma recta, α, un plano definido por los puntos A, B, C. Supongamos que las imágenes A', B', C' de estos puntos tampoco se hallen sobre una misma recta, denotando con α' el plano que pasa por A', B', C'. Entonces, las imágenes de todos los puntos del plano α están situadas en el plano α'. En rigor, sea M cualquier punto de α; en el plano α, tracemos a través de M, dos rectas distintas a y b de modo que a interseque las rectas AC y BC en dos puntos diferentes P y Q, y que la recta b cruce las rectas AC y BC en dos puntos diferentes P y Q, y que la recta b cruce las rectas AC y BC en dos puntos diferentes R, S. De la definición de la aplicación sujeta al examen (y del punto 4 del § 182) se deduce que los puntos P', Q', R', S' correspondientes a los puntos P, Q, R, S según la aplicación, se hallan en el plano α'. Pero la imagen M' del punto M se define por la intersección de las rectas $P'Q'$ y $R'S'$; consiguientemente, el punto M' también está en el plano α'.

2) Según la definición de la aplicación colineal, las imágenes de puntos de una recta arbitraria a se hallan sobre una determinada recta a'; diremos que la recta a' corresponde a la recta a a consecuencia de la aplicación. Si en el plano α, sobre el cual se trató en el punto precedente, ciertas dos rectas a, b son paralelas, entonces las rectas a', b' correspondientes a ellas en el plano α', son paralelas también (esto se infiere del carácter biunívoco de la aplicación que estamos considerando). Por ende, podemos completar los planos α y α' con puntos infinitamente alejados (de forma análoga a como lo hicimos en los §§ 80, 81) y atribuirles la aplicación dada, considerando que un punto infinitamente alejado de la recta a sobre el plano α, tiene por su imagen un punto infinitamente alejado de la recta a' sobre el plano α'. Así pues, a todo punto del plano α le corresponde un punto del plano α'; a los puntos ubicados sobre una misma recta en el plano α, les corresponden los puntos que también se hallan sobre una misma recta del plano α'; a una recta infinitamente alejada del plano α le corresponde una recta infinitamente alejada del plano α'; al fin, sobre el plano α hay tres puntos A, B, C que no se localizan sobre una misma recta, y cuyas imágenes A', B', C' en el plano α' tampoco se localizan sobre una misma recta. Conforme al § 106, tal aplicación es una aplicación proyectiva del plano completado α sobre el plano completado α'.

3) Ahora, con la aplicación que estamos considerando, permanezcan fijos, es decir, coincidan con sus imágenes los puntos A, B, C. En tal caso, el plano α permanece fijo, aplicándose proyectivamente sobre sí mismo. Hagamos notar que junto con los puntos A, B, C siguen inmóviles los puntos infinitamente alejados de las rectas CA y CB. Designemos con a la recta que pasa por el punto A y por un punto infinitamente alejado de la recta CB, denotando con b la recta que pasa por B y por un punto infinitamente alejado de la recta CA. Las rectas a y b siguen fijas; por consiguiente, permanece fijo el punto P en el cual ellas se intersecan. De tal modo, siguen fijos cuatro puntos A, B, C, P del plano α, sin que haya entre ellos tres puntos que estén sobre una misma recta. De aquí y del teorema 26 del § 106 se desprende que todos los puntos del plano α permanecen fijos.

4) En un espacio, sean dados cuatro puntos A, B, C, D que no estén ubicados en un mismo plano, permaneciendo fijos en el caso de la aplicación dada. Ahora, de-

signemos con α un hiperplano definido por los puntos A, B, C, D, y demostremos que todos los puntos suyos permanecen fijos. Consideremos un punto arbitrario M del hiperplano α. Denotemos con K el punto de intersección de la recta DM con el plano ABC; del punto antecedente se infiere que el punto K permanece fijo. Del modo análogo permanece fijo el punto de intersección de la recta CM con el plano ABD. De aquí se desprende que el propio punto M también está fijo.

5) Sean A, B, C, D, E cinco puntos de un espacio, no pertenecientes a un mismo hiperplano; si estos puntos están fijos, entonces todos los puntos del espacio lo están también. Esta afirmación se deduce de la del punto 4) del mismo modo que la última fue deducida de la afimación del punto 3).

6) Ahora, consideremos la aplicación colineal dada en el enunciado del teorema; designémosla simbólicamente: $M' = f(M)$. Sean O, e_1, e_2, e_3, e_4 el origen y la base del sistema dado de coordenadas afines; sean A_1, A_2, A_3, A_4 los extremos de los vectores básicos aplicados al punto O. De la definición de la base se infiere que cinco puntos O, A_1, A_2, A_3, A_4 no están en un mismo hiperplano; en tal caso sus preimágenes O^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^* tampoco lo están. Por eso existe un sistema de coordenadas afines con el origen O^* y la base integrada por los vectores $a_i^* = \overline{O^*A_i^*}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Convengamos en llamar nuevo a este sistema y viejo, al inicialmente dado. Sea M un punto arbitrario del espacio, x_i^* sus coordenadas respecto al nuevo sistema, M', la imagen del punto M en virtud de la aplicación dada, x_i', las coordenadas de M' en el sistema viejo. Definamos una aplicación más, $M'' = \varphi(M)$, haciéndolo del modo siguiente: en el sistema viejo, el punto M'' tiene justamente las mismas coordenadas x_i^* que las que tiene M respecto al nuevo sistema. Es evidente que la aplicación $M'' = \varphi(M)$ es biunívoca, siendo colineales ella misma y su aplicación inversa $M = \psi(M'')$ (en efecto, si, por ejemplo, M se mueve según una recta definida por tres ecuaciones cualesquiera de primer grado en el nuevo sistema, entonces la trayectoria de M'' se define por las ecuaciones absolutamente iguales en el sistema viejo y, por consiguiente, también es recta). Hagamos constar que la aplicación $M = \psi(M'')$ hace pasar los puntos O, A_i a puntos O^*, A_i^*. Ahora, construyamos la aplicación $M' = f(\psi(M''))$; dicho en otros términos, apliquemos primero el punto M'' en punto $M = \psi(M'')$, luego el punto M en punto $M' = f(M)$. La aplicación $M' = f(\psi(M''))$ es biunívoca y colineal (ya que los componentes de su aplicación poseen estas propiedades); además, la aplicación $M' = f(\psi(M''))$ deja fijos los puntos O, A_i (puesto que los referidos puntos primero pasan a puntos O^*, A_i^*, luego vuelven a sus lugares). De aquí y del punto 5) se deduce que a consecuencia de la aplicación $M' = f(\psi(M''))$ todos los puntos permanecen fijos, es decir, todo punto M' coincide con su preimagen M''. Por lo tanto, en el sistema viejo el punto $M' = f(M)$ tiene justamente la mismas coordenadas que las que tiene M en el nuevo sistema: $x_i' = x_i^*$. Mas, según el § 180, las nuevas coordenadas x_i^* de un punto arbitrario se expresan linealmente mediante sus coordenadas viejas x_i. De tal manera, x_i' son funciones lineales de las magnitudes x_i, es decir, tienen la forma (2). La desigualdad a cero del determinante de la matriz Q se debe a la invertibilidad unívoca de las fórmulas (2), la cual viene asegurada por el enunciado del teorema.

§ 188. La aplicación biunívoca y colineal del espacio afín sobre sí mismo se llama *transformación afín* del referido espacio. Conforme al teorema demostrado, *toda transformación afín se representa en coordenadas afines por fórmulas lineales del tipo* (2) *con el determinante de la matriz Q desigual a cero*. Para toda transformación afín existe una transformación inversa, la cual también es afín; esto se in-

fiere del teorema demostrado (dado que la transformación colineal se representa por fórmulas lineales, la transformación inversa a ella también se representa por fórmulas lineales y, por lo tanto, es de forma colineal). Luego, es evidente que el producto de dos transformaciones afines es una transformación afín. De tal modo, todas las transformaciones afines de un espacio afín dado integran un grupo; lo llaman *grupo afín* del referido espacio. La teoría de los invariantes del grupo afín de un espacio afín n-dimensional se llama *geometría afín* n-dimensional. Los conceptos de recta, plano, hiperplano, paralelismo, etc. deducidos más arriba, son invariantes respecto al grupo afín; correspondientemente a ello, son objetos de la geometría afín.

2. Espacios de Euclides y espacio de Minkowski

§ **189.** Sea dado un espacio afín (real) n-dimensional $\mathfrak{A}$. Supongamos que a cada par de vectores x, y de este espacio le corresponda cierto número real que se designa en lo sucesivo con xy, observándose los requisitos de los tres axiomas siguientes:

1. $xy = yx$.

2. $x(\lambda y + \mu z) = \lambda(xy) + \mu(xz)$, donde λ, μ son cualesquiera números reales.

De estos axiomas se infiere, en particular, que para un vector nulo θ y para cualquier vector x tendremos $\theta x = 0$ (como $\theta = 0 \cdot x$, entonces $\theta x = x\theta = x(0 \times \times x) = 0\,(xx) = 0)$.

3. Si $xy = 0$ para algún x y para cualquier y, entonces $x = \theta$.

El número xy se llama *producto escalar* de los vectores x e y. *El espacio n-dimensional afín con un producto escalar prefijado de sus vectores se llama espacio n-dimensional euclidiano* (mediante nuestra definición introdujimos el espacio euclidiano real, pues suponíamos que $\mathfrak{A}$ era un espacio afín real, y (x, y), números reales).

§ **190.** Al considerar algún espacio n-dimensional euclidiano, tomemos sobre él un sistema afín arbitrario de coordenadas; sea O el origen del referido sistema, $e_1, \ldots, e_n$, la base. Denotemos con g_{ik} el producto escalar de un par arbitrario de vectores básicos e_i, e_k:

$$e_i e_k = g_{ik}; \tag{1}$$

según el axioma 1, debe ser $g_{ik} = g_{ki}$. Ahora, sean x e y cualesquiera vectores,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k, \tag{2}$$

sus descomposiciones respecto a la base dada. Multipliquemos escalarmente los primeros y segundos miembros de las igualdades (2); al multiplicar término a término los segundos miembros (a base del axioma 2) y al servirnos de la tabla de multiplicar (1) de los vectores básicos, obtendremos:

$$xy = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i y_k; \tag{3}$$

el segundo miembro de esta igualdad constituye la forma bilineal de las coordenadas de los vectores x, y con los coeficientes g_{ik}.

Designemos con g el determinante de la matriz (g_{ik}); *del axioma 3 se deduce que* $g \neq 0$ (es decir, la matriz (g_{ik}) es regular).

Efectivamente, si $g = 0$, entonces se puede escoger el vector $x \neq 0$ de modo que para todas las coordenadas suyas x_i, todas las sumas $\sum_{i=1}^{n} g_{ik}x_i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ serán iguales a cero; pero entonces $xy = 0$ para cualquier y, lo cual queda excluido por el axioma 3.

Así pues, *en el espacio euclidiano n-dimensional el producto escalar xy se expresa por la forma bilineal de las coordenadas de los vectores x, y, cuyos coeficientes integran una matriz simétrica y regular.*

Ahora, sea dado un espacio n-dimensional afín; queremos introducir en él un producto escalar, es decir, hacer euclidiano este espacio. Con tal objeto, elijamos en el espacio dado un sistema afín de coordenadas, asignemos los números g_{ik}, observando la condición $g_{ik} = g_{ki}$, y comparemos el número xy con un par arbitrario de vectores x, y según la fórmula (3). En este caso, se observarán los axiomas 1 y 2, dado que la matriz escogida g_{ik} es simétrica, y el segundo miembro de la igualdad (3) es lineal respecto a los argumentos x_i y respecto a los y_i. Para observar el axioma 3, es menester elegir los números g_{ik} de modo que el determinante g de la matriz (g_{ik}) sea desigual a cero. Nos cercioramos fácilmente de que esta condición asimismo es suficiente. En rigor, supongamos que $g \neq 0$; si $xy = 0$ para cualquier y, entonces de (3) se infiere la igualdad $\sum_{i=1}^{n} g_{ik}x_i = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, y como $g \neq 0$, de estas igualdades obtendremos $x_i = 0$ ó $x = \mathit{0}$.

Así pues, si en el espacio afín n-dimensional determinamos el número xy mediante la fórmula (3) tomando en el segundo miembro cualquier forma bilineal con la matriz simétrica y regular, entonces xy satisfará los tres axiomas del producto escalar.

NOTA. Como acabamos de mostrar, el axioma 3 equivale a la regularidad de la matriz (g_{ik}). Por eso el axioma 3 se llama *condición de regularidad.*

§ 191. En el espacio euclidiano se examinan los importantes conceptos que siguen:

1. *Ortogonalidad de vectores, de rectas, etc.* Los vectores x e y se llaman *ortogonales* o *perpendiculares* uno a otro, si $xy = 0$. Dos rectas se llaman ortogonales si lo son sus vectores directores; una recta y un plano son ortogonales si el vector director de aquélla es ortogonal a todo vector director del plano; de forma análoga se define la ortogonalidad de una recta y de un hiperplano.

2. *Norma de vector.* La norma del vector x se denota con el símbolo $\|x\|$ y se define mediante la igualdad

$$\|x\| = \sqrt{x^2}, \tag{1}$$

donde $x^2 = xx$. Para mayor determinación, supondremos el signo más ante la raíz. No obstante, hay que tener en cuenta que la definición general del producto escalar aducida más arriba, no excluye el caso de $x^2 < 0$; en este caso el vector tiene norma imaginaria. Tampoco se excluye la posibilidad de $\|x\| = 0$ para $x \neq 0$.

El vector x se llama *unitario* si $x^2 = 1$, *imaginario unitario* si $x^2 = -1$, *isótropo* si $x^2 = 0$ para $x \neq \theta$.

De la fórmula (3) del § 190 y la (1) del § 191 se deduce la expresión de la norma de vector en coordenadas:

$$\|x\|^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i x_k. \tag{2}$$

Aquí a la derecha tenemos una forma cuadrática cuyos argumentos son las coordenadas del vector x; la llaman *forma métrica del espacio euclidiano*. Como Det $g_{ik} \neq 0$, la forma métrica es regular.

3. *Distancia entre dos puntos.* La distancia entre dos puntos A y B se supone igual a la norma del vector AB:

$$\rho(A, B) = \|AB\|.$$

Designemos con mayúsculas las coordenadas de puntos (para no confundirlas con las de vectores). Tengan los puntos A y B coordenadas $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$. Entonces las coordenadas del vector AB serán $x_1 = X_1^* - X_1$, $x_2 = X_2^* - X_2$, etc.; de aquí y de la fórmula (2) obtenemos:

$$\rho^2(A, B) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(X_i^* - X_i)(X_k^* - X_k). \tag{3}$$

La definición general del espacio euclidiano no excluye el hecho de que la distancia entre ciertos puntos pueda ser imaginaria o igual a cero. Sean A un punto fijo con las coordenadas X_i^0, M, un punto variable cuyas coordenadas las denotaremos con X_i. Hallemos todos los puntos M que se encuentren a distancia nula de A; para las coordenadas de los referidos puntos resulta la ecuación

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(X_i - X_i^0)(X_k - X_k^0) = 0. \tag{4}$$

Si la forma métrica es de signo definido, entonces la ecuación (4) se satisface sólo en el caso de $X_i = X_i^0$ aquí $\rho(A, M) = 0$ sólo cuando M coincide con A. Si la métrica es de signo variable, entonces la ecuación (4) define un cono regular real de segundo orden con el vértice A, llamado *cono isótropo* en el punto A (el cono isótropo es regular, pues lo es la forma métrica; véase el § 186). Las rectas que conforman el cono isótropo, se llaman *rectas isótropas*. Toda recta isótropa se caracteriza con que para cualquier par de sus puntos la distancia es igual a cero.

§ 192. En el espacio afín toda recta, todo plano o hiperplano a su vez es un espacio afín de dimensión correspondiente (véase el § 181). Si el espacio afín está convertido en espacio euclidiano, es decir, para cualquier par de sus vectores está determinado un producto escalar, entonces con esto mismo queda determinado el producto escalar para cualquier par de vectores de una recta, de un plano o un hiperplano dados. Por eso toda recta dada, todo plano o hiperplano dados se tornan espacio euclidiano de dimensión correspondiente, si dentro de dicha recta, dicho plano o hiperplano se observa la condición de regularidad, pero ésta puede faltar. A saber, según la condición de regularidad, si $xy = 0$ para un determinado x y para *cualquer y*, entonces $x = \theta$; pero puede suceder que sobre cierta recta, sobre cierto plano o hiperplano haya un vector $x \neq 0$ tal que $xy = 0$ para cualquier *y que esté sobre la referida recta, el referido plano o hiperplano*. Por ejemplo, el producto escalar de dos

vectores cualesquiera situados sobre una recta isótropa, es igual a cero. Análogamente a las rectas, los planos e hiperplanos del espacio euclidiano, en cuyo interior no se observe la condición de regularidad, se llaman *isótropos*.

§ 193. Sean $e_1, \ldots, e_n$ la base de un sistema afín de coordenadas, en el cual la forma métrica del espacio tiene el aspecto (2) del § 191. Pasemos a una nueva base $e_1', \ldots, e_n'$ suponiendo

$$e_i' = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} e_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \operatorname{Det} p_{ik} \neq 0; \tag{1}$$

entonces las coordenadas viejas x_i de un vector arbitrario x se expresan mediante sus nuevas coordenadas x_i' por las fórmulas

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i', \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

(Véase el § 180; no nos interesa la posición de los orígenes nuevo y viejo de coordenadas, puesto que tenemos coordenadas de vectores y no de puntos; las fórmulas de transformación de las coordenadas de vectores son homogéneas, es decir, los términos independientes de los segundos miembros de las referidas fórmulas son iguales a cero.) En la fórmula métrica (2) del § 191 en lugar de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pongamos sus expresiones mediante $x_1', x_2', \ldots, x_n'$; con esto mismo dejaremos reducida a nuevas coordenadas la forma métrica. Conforme a la teoría de las formas cuadráticas, los coeficientes p_{ik} de la transformación lineal (2) pueden escogerse (observando la condición de $\operatorname{Det} p_{ik} \neq 0$) de suerte que en las nuevas coordenadas la fórmula métrica tomará un aspecto canónico, es decir, poseerá sólo términos con los cuadrados de coordenadas, el número de dichos términos será igual a n (en vista de la regularidad de la forma), y los números $+1$ ó -1 les servirán de coeficientes. Dicho en otros términos, si denotamos con σ_{ik} los coeficientes de la forma transformada, obtendremos:

$$\sigma_{ii} = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sigma_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

En las coordenadas especiales halladas tenemos:

$$\|x\|^2 = x_1'^2 + \ldots + x_m'^2 - x_{m+1}'^2 - \ldots - x_n'^2;$$

aquí los primeros m coeficientes de σ_{ii} son positivos, lo cual puede lograrse con la numeración apropiada de las coordenadas. No se descartan los casos de ser positivos ($m = n$) o negativos ($m = 0$) cuantos coeficientes comprenda esta expresión. Tengamos en cuenta que $e_i'e_k' = \sigma_{ik}$; de aquí se infiere que

$$e_1'^2 = \ldots = e_m'^2 = +1, e_{m+1}'^2 = \ldots = e_n'^2 = -1, e_i'e_k' = 0, i \neq k,$$

es decir, los vectores básicos son unitarios o imaginarios unitarios, siendo ortogonales de dos en dos. La base de tal género se llama *ortonormal*. Hemos demostrado que en todo espacio euclidiano existe una base ortonormal.

La reducción de la forma cuadrática al aspecto canónico puede efectuarse por infinidad de procedimientos; esto quiere decir que *en el espacio euclidiano existe una infinidad de bases ortonormales diversas*. Según la ley de inercia que rige en la teoría de las formas cuadráticas, el número de términos negativos en la representación canónica de una forma métrica no está sujeto al procedimiento de reducir

dicha forma al aspecto canónico. El referido número expresa propiedades geométricas de un espacio euclidiano dado y se llama su *índice*. Al mismo tiempo, el índice es el número de vectores imaginarios unitarios presentes en cualquier base ortonormal.

Si el índice es igual a cero, entonces la norma de un vector, el producto escalar de dos vectores, etc. se expresan por fórmulas completamente análogas a las bien conocidas de la geometría analítica ordinaria. En este caso las propiedades geométricas del espacio de hecho no difieren de las del espacio euclidiano tridimensional ordinario, pero, a decir más exactamente, pueden diferir sólo en dimensión. Correspondientemente, un espacio euclidiano de índice nulo se llama *propiamente euclidiano*; los demás espacios de Euclides se llaman *seudoeuclidianos*. Un espacio euclidiano que tenga el índice igual a uno se llama espacio *de Minkowski*; éste será el objeto de nuestra exposición ulterior.

§ **194**. Sea introducido en el espacio de Minkowski un sistema de coordenadas con algún origen O y con la base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$. Supongamos que los vectores básicos estén numerados de forma que $e_1^2 = \ldots = e_{n-1}^2 = +1, e_n^2 = -1$. Entonces la norma de un vector x que tenga las coordenadas x_i se expresará por la fórmula

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2; \tag{1}$$

para el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_i, y_i, obtendremos la expresión

$$xy = x_1y_1 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n; \tag{2}$$

para el cuadrado de la distancia entre dos puntos $A(X_i)$, $B(X_i^*)$ tendremos

$$\rho^2(A, B) = (X_1^* - X_1)^2 + \ldots + (X_{n-1}^* - X_{n-1})^2 - (X_n^* - X_n)^2. \tag{3}$$

El cono isótropo con el vértice $A(X_1^0, \ldots, X_n^0)$ en las coordenadas dadas se define por la ecuación

$$(X_1 - X_1^0)^2 + \ldots + (X_{n-1} - X_{n-1}^0)^2 - (X_n - X_n^0)^2 = 0, \tag{4}$$

siendo real y regular. Los puntos en que el primer miembro de la ecuación (4) es negativo, constituyen la región interior del cono isótropo; la región interior se divide en dos huecos, en uno de los cuales $X_n > X_n^0$, en el otro $X_n < X_n^0$.

§ **195**. Para mayor evidencia, consideremos algunos objetos del espacio de Minkowski en los casos de $n = 2$ y $n = 3$.

1. Construyamos un modelo de geometría bidimensional de Minkowski sobre el plano euclidiano. Ante todo, convengamos en concebir del modo corriente los puntos, los vectores y las operaciones lineales con los vectores. Elijamos un sistema de coordenadas afines con el origen O y la base e_1, e_2; las coordenadas X_1, X_2 de un punto arbitrario M también tendrán el sentido corriente (por ejemplo, X_1 se representa mediante un segmento cortado por una recta que pasa por M paralelamente al segundo eje; por supuesto, el referido segmento debe medirse en la escala de e_1). Más aún, nada se opone a que los vectores e_1, e_2 tengan una misma longitud y sean perpendiculares uno a otro desde el punto de vista euclidiano. Entonces el sistema de coordenadas elegido será simplemente cartesiano rectangular. Sin embargo, introduciremos el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_i, y_i ($i = 1, 2$) en el sentido de la geometría de Minkowski, suponiendo

$$xy = x_1y_1 - x_2y_2;$$

dicha forma al aspecto canónico. El referido número expresa propiedades geométricas de un espacio euclidiano dado y se llama su *índice*. Al mismo tiempo, el índice es el número de vectores imaginarios unitarios presentes en cualquier base ortonormal.

Si el índice es igual a cero, entonces la norma de un vector, el producto escalar de dos vectores, etc. se expresan por fórmulas completamente análogas a las bien conocidas de la geometría analítica ordinaria. En este caso las propiedades geométricas del espacio de hecho no difieren de las del espacio euclidiano tridimensional ordinario, pero, a decir más exactamente, pueden diferir sólo en dimensión. Correspondientemente, un espacio euclidiano de índice nulo se llama *propiamente euclidiano*; los demás espacios de Euclides se llaman *seudoeuclidianos*. Un espacio euclidiano que tenga el índice igual a uno se llama espacio *de Minkowski*; éste será el objeto de nuestra exposición ulterior.

§ **194.** Sea introducido en el espacio de Minkowski un sistema de coordenadas con algún origen O y con la base ortonormal $e_1, \dots, e_n$. Supongamos que los vectores básicos estén numerados de forma que $e_1^2 = \dots = e_{n-1}^2 = +1$, $e_n^2 = -1$. Entonces la norma de un vector x que tenga las coordenadas x_i se expresará por la fórmula

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2; \tag{1}$$

para el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_i, y_i, obtendremos la expresión

$$xy = x_1y_1 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n; \tag{2}$$

para el cuadrado de la distancia entre dos puntos $A(X_i)$, $B(X_i^*)$ tendremos

$$\rho^2(A, B) = (X_1^* - X_1)^2 + \dots + (X_{n-1}^* - X_{n-1})^2 - (X_n^* - X_n)^2. \tag{3}$$

El cono isótropo con el vértice $A(X_1^0, \dots, X_n^0)$ en las coordenadas dadas se define por la ecuación

$$(X_1 - X_1^0)^2 + \dots + (X_{n-1} - X_{n-1}^0)^2 - (X_n - X_n^0)^2 = 0, \tag{4}$$

siendo real y regular. Los puntos en que el primer miembro de la ecuación (4) es negativo, constituyen la región interior del cono isótropo; la región interior se divide en dos huecos, en uno de los cuales $X_n > X_n^0$, en el otro $X_n < X_n^0$.

§ **195.** Para mayor evidencia, consideremos algunos objetos del espacio de Minkowski en los casos de $n = 2$ y $n = 3$.

1. Construyamos un modelo de geometría bidimensional de Minkowski sobre el plano euclidiano. Ante todo, convengamos en concebir del modo corriente los puntos, los vectores y las operaciones lineales con los vectores. Elijamos un sistema de coordenadas afines con el origen O y la base e_1, e_2; las coordenadas X_1, X_2 de un punto arbitrario M también tendrán el sentido corriente (por ejemplo, X_1 se representa mediante un segmento cortado por una recta que pasa por M paralelamente al segundo eje; por supuesto, el referido segmento debe medirse en la escala de e_1). Más aún, nada se opone a que los vectores e_1, e_2 tengan una misma longitud y sean perpendiculares uno a otro desde el punto de vista euclidiano. Entonces el sistema de coordenadas elegido será simplemente cartesiano rectangular. Sin embargo, introduciremos el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_i, y_i ($i = 1, 2$) en el sentido de la geometría de Minkowski, suponiendo

$$xy = x_1y_1 - x_2y_2;$$

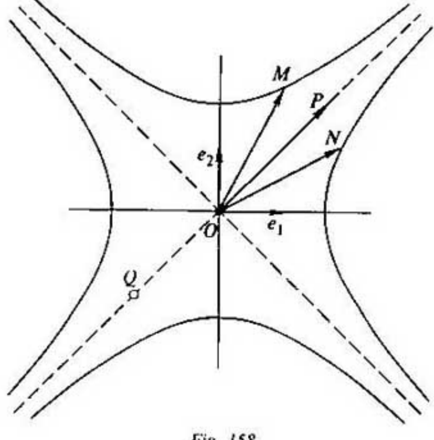


Fig. 158

correspondientemente, la norma del vector x se definirá por la ecuación

$$\|x\|^2 = x_1^2 - x_2^2.$$

El cono isótropo cuyo vértice lo ubicamos en el origen de coordenadas por razones de sencillez, se da por la ecuación

$$X_1^2 - X_2^2 = 0;$$

el cono isótropo consta de dos bisectrices coordenadas euclídeas (fig. 158). En cualquiera de estas dos bisectrices, el vector OP tiene norma igual a cero; cualesquiera puntos P, Q de la bisectriz coordenada se encuentran a una distancia nula uno respecto a otro. La región interior del cono isótropo se define por la desigualdad $X_1^2 - X_2^2 < 0$; lo componen los puntos situados dentro de los ángulos verticales, uno de los cuales está acotado por los rayos superiores de las bisectrices, el otro, por los inferiores. Todo punto M situado en el interior del cono isótropo, se encuentra a una distancia imaginaria respecto al origen de coordenadas. Sea $\rho(O, M) = ai$; entonces todos los puntos que se hallan a esta misma distancia del punto O, satisfacen la ecuación

$$X_1^2 - X_2^2 = -a^2.$$

En el sentido de la geometría de Minkowski, estos puntos integran una circunferencia de un radio imaginario ai; en el sentido euclidiano ellos se hallan sobre una hipérbola ordinaria (pues esta última ecuación define una hipérbola con los vértices ubicados en el segundo eje de coordenadas). Todo punto N que está en la región exterior del cono isótropo, se halla a una distancia real con relación al punto O. Sea $\rho(O, N) = a$; entonces todos los puntos situados a la misma distancia de O, satisfacen la ecuación

$$X_1^2 - X_2^2 = a^2.$$

En el sentido euclidiano, esta ecuación define una hipérbola con los vértices localizados en el primer eje de coordenadas; en el sentido de la geometría de Minkowski, esta misma hipérbola es una circunferencia de un radio real a.

Los vectores OM y ON con las coordenadas (x_1, x_2), (y_1, y_2) son perpendiculares uno a otro en el sentido de Minkowski, si $x_1y_1 - x_2y_2 = 0$; en el sentido euclidiano esta igualdad expresa la simetría de las direcciones de OM y ON respecto a las bisectrices coordenadas. En particular, dos vectores que se hallan sobre una misma bisectriz coordenada, son perpendiculares uno a otro en el sentido de la geometría de Minkowski.

2. La construcción de un modelo de geometría tridimensional de Minkowski puede realizarse de forma análoga a la antecedente, realizada en el espacio euclidiano de tres dimensiones. Partamos de un sistema de coordenadas rectangulares oridinario con la base e_1, e_2, e_3; para dos vectores arbitrarios x, y con las coordenadas x_i, $y_i (i = 1, 2, 3)$, definamos el producto escalar en el sentido de Minkowski por la fórmula

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Entonces la norma del vector x se definirá por la fórmula

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,$$

el cono isótropo, por la ecuación

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0,$$

su región interior, por la desigualdad

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 < 0.$$

Desde el punto de vista de la geometría euclidiana, el cono isótropo es un cono ordinario de revolución alrededor del tercer eje de coordenadas; su región interior se compone de dos huecos del propio cono. Todo punto que está dentro del cono isótropo, se halla a una distancia imaginaria del origen de coordenadas. Si esta distancia es igual a ai, entonces todos los puntos situados a la misma distancia del punto O, conforman una esfera de un radio imaginario ai, en el sentido euclidiano ésta es un hiperboloide de dos hojas con la ecuación correspondiente

$$X_1^2 + X^2{}_2 - X_3^2 = -a^2.$$

El hiperboloide de dos hojas definido por la ecuación

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = a^2,$$

en la geometría de Minkowski representa una esfera de un radio real a.

Si en las fórmulas que expresan xy y $\|x\|^2$, suponemos iguales a cero las terceras coordenadas, entonces obtendremos fórmulas bidimensionales del álgebra vectorial ordinaria. Esto quiere decir que en el plano de coordenadas que pasa por los vectores e_1, e_2 tiene lugar la geometría propiamente euclidiana. En general, todo plano que pasa por el origen de coordenadas y no contiene generatriz alguna del cono isótropo, es un espacio propiamente euclidiano bidimensional (puesto que sobre él no hay rectas isótropas). Todo plano que pasa por el origen de coordenadas y corte el cono isótropo según dos generatrices, es un espacio bidimensional de Minkowski. El cono isótropo de la métrica de Minkowski *sobre este plano* y su región interior se

define por la intersección del plano con el cono isótropo espacial. Si un plano que corta el cono isótropo espacial, se convierte en su plano tangente, entonces las rectas integrantes del cono isótropo del plano, se reducen a una sola, desapareciendo la región interior del referido cono. El cono isótropo de tal plano resulta degenerado. Por consiguiente, todo plano tangente a un cono isótropo del espacio tridimensional de Minkowski es un plano isótropo de dicho espacio.

Las propiedades del espacio cuadridimensional de Minkowski han de concebirse por la analogía natural con el modelo tridimensional considerado.

§ 196. A toda transformación afín del espacio de Minkowski, a consecuencia de la cual la distancia entre dos puntos cualesquiera sea igual a la distancia entre sus imágenes, la llamamos *movimiento* en el referido espacio. En el espacio de Minkowski (lo suponemos cuadridimensional), haya introducido un sistema afín de coordenadas con el origen O y la base ortonormal e_1, e_2, e_3, e_4 $(e_4^2 = -1)$. Entonces, toda transformación afín que haga pasar el punto $M(X_i)$ a punto $M'(X_i')$, se representa por las fórmulas del tipo de (2) del § 187; las anotaremos abreviadamente:

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k + b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Se comprende fácilmente que la transformación (1), hablando en general, no conservará la distancia entre los puntos; para conservarla, sus coeficientes deben satisfacer ciertas condiciones. Procuremos hallar dichas condiciones.

En primer lugar, consideremos un caso particular de la transformación (1):

$$X_i' = X_i + b_i. \tag{2}$$

Sean convertidos los puntos $M(X_i)$ y $N(X_i^*)$ en puntos $M'(X_i')$ y $N'(X_i^{*\prime})$ por la transformación (2); si $x_i = X_i^* - X_i$ son las coordenadas del vector MN, $x_i' = X_i^{*\prime} - X_i'$, las del vector $M'N'$, entonces, a consecuencia de las fórmulas (2) tenemos: $x_i' = x_i$; de aquí se deduce que las normas de los vectores MN y $M'N'$ son iguales. De suerte que la transformación (2), cualesquiera que sean b_i, conserva la distancia entre los puntos; este caso particular del movimiento se llama *desplazamiento paralelo*. Evidentemente, el desplazamiento paralelo puede elegirse de modo que el origen de coordenadas se desplazará a cualquier punto prefijado.

En otro caso particular de la transformación (1), cuando $b_i = 0$, el origen de coordenadas permanece fijo.

Cualquier transformación del tipo de (1) puede obtenerse mediante la realización sucesiva de las dos transformaciones consideradas: primero, ha de desplazarse paralelamente el origen de coordenadas junto con la base a una nueva posición, luego ha de realizarse la transformación que se da en las nuevas coordenadas por las fórmulas del tipo de (1) con la misma matriz (q_{ik}), pero con términos independientes iguales a cero. Como el primer desplazamiento paralelo obviamente no ofrece interés, en lo sucesivo consideraremos homogéneas las fórmulas (1):

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k. \tag{3}$$

Sean $M(X_i)$ y $N(X_i^*)$ dos puntos arbitrarios, $M'(X_i')$ y $N'(X_i^{*\prime})$, sus imágenes, sean $x_i = X_i^* - X_i$ y $x_i' = X_i^{*\prime} - X_i'$ las coordenadas de los vectores MN y $M'N'$.

Merced a las fórmulas (3) tenemos:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}x_k. \tag{4}$$

La igualdad de las distancias $\rho(M', N')$ y $\rho(M, N)$ equivale a la igualdad de las normas de los vectores $M'N'$ y MN; por consiguiente, las fórmulas (3) definirán un movimiento si los coeficientes q_{ik} están seleccionados de forma que

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \tag{5}$$

En este caso la relación (5) debe observarse como corolario de las igualdades (4), para cualesquiera x_1, x_2, x_3, x_4. Denotemos con σ_{ik} los coeficientes de la forma métrica en las coordenadas ortonormales ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = +1$, $\sigma_{44} = -1$, $\sigma_{ik} = 0$ si $i \neq k$), apuntemos el primer miembro de (5) como suma doble con los coeficientes σ_{ik} y apliquemos las fórmulas (4):

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik}x_1'x_k' =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik}\left(\sum_{\alpha=1}^{4} q_{i\alpha}x_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{4} q_{k\beta}x_\beta\right) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4}\left(\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik}q_{i\alpha}q_{k\beta}\right)x_\alpha x_\beta;$$

anotando también como suma doble el segundo miembro de (5):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta.$$

A consecuencia de (5), las expresiones obtenidas deben ser iguales; de aquí

$$\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik}q_{i\alpha}q_{k\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Precisamente éstas son las condiciones buscadas para los coeficientes q_{ik}; al observarse estas condiciones, la transformación (3) o la (1) es un movimiento. A las condiciones (6) puede dárseles forma matricial. Al igual que antes, denotemos con Q la matriz que posee los elementos q_{ik}, con Q^*, la matriz que contiene los elementos $q_{\alpha i}^* = q_{i\alpha}$($Q^*$ se obtiene de Q mediante la transposición), con I, la matriz que tiene los elementos σ_{ik}. Entonces las relaciones (6) pueden escribirse como siguen

$$\sum_{i,k=1}^{4} q_{\alpha i}^*\sigma_{ik}q_{k\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Pero, escritas así, evidentemente, equivalen a una sola igualdad matricial:

$$Q^*IQ = I \tag{8}$$

o, detalladamente:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} & q_{41} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} & q_{42} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{43} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}.$$

De tal modo, *la transformación afín* (1) *es un movimiento si, y sólo si, su matriz Q satisface la condición* (8).

Hagamos notar que de aquí, la desigualdad a cero del determinante de la matriz Q ya deriva de por sí sola; más aún, de la relación (8) tenemos: $(\text{Det } Q)^2 = 1$, consiguientemente,

$$\text{Det } Q = \pm 1. \tag{9}$$

§ 197. Mediante las fórmulas (6) se muestra fácilmente que a consecuencia de cualquier movimiento en el espacio de Minkowski se conservan el producto escalar y la ortogonalidad de vectores. En rigor, a raíz de un movimiento, conviértanse los vectores $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ en vectores $x' = \sum x_i' e_i$, $y' = \sum y_i' e_i$ (descompuestos respecto a la misma base). Entonces

$$x'y' = x_1'y_1' + x_2'y_2' + x_3'y_3' - x_4'y_4' = \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} x_i' y_k' =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} \left(\sum_{\alpha=1}^{4} q_{i\alpha} x_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta=1}^{4} q_{k\beta} x_\beta \right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \left(\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} q_{i\alpha} q_{k\beta} \right) x_\alpha x_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 = xy.$$

Así pues, $x'y' = xy$. En particular, si $xy = 0$, entonces $x'y' = 0$, es decir, *las imágenes de vectores ortogonales son ortogonales.* De aquí se infiere una conclusión importante: *en el espacio de Minkowski todo movimiento hace pasar la base ortonormal a base ortonormal.*

§ 198. Si a consecuencia de cierto movimiento un punto dado del espacio permanece fijo, entonces el cono isótropo del espacio cuyo vértice está en el punto dado, también permanece fijo (sus puntos se desplazan a nuevas posiciones, pero se quedan sobre él). Efectivamente, supongamos, a modo de ejemplo, que permanezca inmóvil el origen de coordenadas O. Si M es un punto arbitrario de un cono isótropo con el vértice O, entonces $\rho(O, M) = 0$, y, dado que durante el movimiento se conservan las distancias, entonces, para la imagen M' del punto M tenemos $\rho(O, M') = 0$; por consiguiente, M' se halla sobre el mismo cono isótropo. Mediante razonamientos análogos se puede mostrar que, a consecuencia de tal movimiento, los puntos situados dentro del cono isótropo, permanecen en su interior; no obstante, no se excluye el hecho de que dos huecos del cono isótropo se cambien de lugares.

§ 199. El conjunto de todos los movimientos en el espacio de Minkowski constituye un grupo, ya que el producto de dos movimientos es un movimiento, y la transformación recíproca al movimiento es un movimiento también.

Estas propiedades de grupo dimanan evidentemente de la definición de los movimientos. El grupo de movimientos en el espacio de Minkowski es uno de los subgrupos del grupo afín. En el espacio de Minkowski, entre todo el grupo de movimientos se puede distinguir, a su vez, un subgrupo de movimientos que dejan fijo un punto. Un grupo más reducido lo integran los movimientos, a causa de los cuales permanece fijo cada hueco del cono isótropo.

§ 200. La transformación

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k + b_i, \quad \operatorname{Det} q_{ik} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

que constituye cierto movimiento en el espacio de Minkowski, se llama *transformación general de Lorentz*. La transformación general de Lorentz se caracteriza por la ecuación (8) del § 196 para la matriz $Q = (q_{ik})$. Los números b_i que pueden ser cualesquiera, no juegan un papel sustancial en el estudio de las transformaciones generales de Lorentz, por ende, al prescindir de los números b_i, frecuentemente se llama transformación general de Lorentz a la transformación homogénea

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

con la misma condición para la matriz Q. El conjunto de todas las transformaciones de Lorentz integra un grupo llamado *grupo general de Lorentz*.

Si la transformación (1) constituye un movimiento en el espacio de Minkowski, a raíz del cual cada hueco del cono isótropo permanece fijo, entonces tal transformación se llama sencillamente *transformación de Lorentz*. Estas transformaciones, además de la condición (8) del § 196 para la matriz Q, se caracterizan por que ellas mismas hacen pasar el punto $(0, 0, 0, x_4)$, $x_4 > 0$, al punto (x_1', x_2', x_3', x_4'), $x_4' > 0$. Las transformaciones de Lorentz componen un grupo llamado *grupo de Lorentz*.

§ 201. Además, las transformaciones de Lorentz (o las transformaciones generales de Lorentz) pueden interpretarse geométricamente de un modo distinto.

Sea dado un sistema de coordenadas con el origen O y con la base ortonormal e_1, e_2, e_3, e_4 $(e_4^2 = -1)$; luego, introdúzcase un nuevo sistema de coordenadas con el origen O' y con la base ortonormal e_1', e_2', e_3', e_4' $(e_{24}' = -1)$. Entonces, si

$$e_i' = \sum_{k=1}^{4} p_{ik}e_k \tag{1}$$

son las descomposiciones de los vectores de la nueva base respecto a la vieja base, y

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k + b_i \tag{2}$$

son las expresiones de las nuevas coordenadas a través de las coordenadas viejas, entonces la matriz $Q = (q_{ik})$ resulta de la matriz $P = (p_{ik})$ mediante la transposición y la inversión: $Q = (P^*)^{-1}$ (véase el § 180). Como las bases vieja y nueva son ortonormales, en las designaciones del § 196 tenemos:

$$e_ie_k = \sigma_{ik}, \quad e_i'e_k' = \sigma_{ik}.$$

De aquí

$$\sigma_{ik} = e_i'e_k' = \sum_{\alpha=1}^{4} p_{i\alpha}e_\alpha \sum_{\beta=1}^{4} p_{k\beta}e_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} (e_\alpha e_\beta)p_{i\alpha}p_{k\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha\beta}p_{i\alpha}p_{k\beta}. \tag{3}$$

Si introducimos los elementos de la matriz P^*, es decir, $p^*_{\beta k} = p_{k\beta}$, entonces las igualdades antecedentes tomarán la forma siguiente:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{4} p_{i\alpha}\sigma_{\alpha\beta}p_{\beta k} = \sigma_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Todas estas relaciones equivalen a una sola igualdad matricial

$$PIP^* = I. \tag{5}$$

Mas, como las matrices P^* y Q son mutuamente inversas, entonces

$$P^*Q = E, \qquad Q^*P = E,$$

donde E es una matriz unidad. Por ende, al multiplicar ambos miembros de la igualdad (5) a la izquierda por la matriz Q^*, a la derecha, por la matriz Q, obtendremos:

$$Q^*PIP^*Q = EIE = I = Q^*IQ \tag{6}$$

ó

$$Q^*IQ = I.$$

Esta última igualdad coincide exactamente con la igualdad (8) del § 196. Por consiguiente, *toda transformación de coordenadas que corresponde al paso de un sistema ortonormal a un nuevo sistema ortonormal, es una transformación general de Lorentz* (no homogénea, dicho en términos generales). A la inversa, si la base e_1, e_2, e_3, e_4 es ortonormal, y si se observa la condición (6), entonces, por cuanto de (6) sigue (5), luego (4), luego (3), obtendremos $e_i'e_k' = \sigma_{ik}$, es decir, la nueva base será ortonormal también. Por lo tanto, *toda transformación general de Lorentz puede considerarse como una transformación de coordenadas ortonormales.* Ante tal interpretación de las transformaciones generales de Lorentz, *las llamadas de Lorentz a secas concurrentes entre ellas, se caracterizan por el que los vectores básicos e_4 y e_4' se hallan en un mismo hueco del cono isótropo.*

§ 202. Al concluir esta sección, indicaremos una relación que existe entre el grupo de Lorentz y el grupo de movimientos en la geometría de Lobachevski. Para simplificar la exposición, vamos a considerar el espacio tridimensional de Minkowski con un cono isótropo

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0. \tag{1}$$

Cortemos este cono con el plano $X_3 = 1$. En la sección se forma una circunferencia

$$X_1^2 + X_2^2 = 1, \; X_3 = 1; \tag{2}$$

la denotaremos con k. Sea dada una transformación homogénea de Lorentz

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= q_{11}X_1 + q_{12}X_2 + q_{13}X_3, \\ X_2' &= q_{21}X_1 + q_{22}X_2 + q_{23}X_3, \\ X_3' &= q_{31}X_1 + q_{32}X_2 + q_{33}X_3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

le corresponde un movimiento en el espacio de Minkowski, que hace pasar el punto arbitrario $M(X_1, X_2, X_3)$ al punto $M'(X_1', X_2', X_3')$, dejando fijo el origen de coordenadas.

A la transformación de Lorentz dada le ponemos en correspondencia cierta transformación del plano $X_3 = 1$. Precisamente, si P es el punto de intersección de la recta OM con el plano $X_3 = 1$, P' es el punto de intersección de la recta OM' con el mismo plano, entonces consideraremos P' como imagen del punto P. Esta transformación es fácil de expresar en coordenadas.

Sean $(x, y, 1)$ las coordenadas del punto P; dado que O, P, M se hallan sobre una misma recta,

$$\frac{x}{X_1} = \frac{y}{X_2} = \frac{1}{X_3}.$$

Por consiguiente,

$$x = \frac{X_1}{X_3}, \quad y = \frac{X_2}{X_3}.$$

Análogamente, si $(x', y', 1)$ son las coordenadas de P', entonces

$$x' = \frac{X_1'}{X_3'}, \quad y' = \frac{X_2'}{X_3'}.$$

De aquí y de las fórmulas (3) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{q_{11}x + q_{12}y + q_{13}}{q_{31}x + q_{32}y + q_{33}}, \\ y' &= \frac{q_{21}x + q_{22}y + q_{23}}{q_{31}x + q_{32}y + q_{33}}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Por cuanto $\operatorname{Det} q_{ik} \neq 0$, la aplicación del plano $X_3 = 1$ sobre sí mismo expresada por las fórmulas (4), es proyectiva (véase el § 112). Tengamos en cuenta que la transformación de Lorentz dada en el espacio, deja fijos el cono isótropo y su región interior; de aquí se deduce que sobre el plano $X_3 = 1$ la transformación (4) deja fijos la circunferencia k y su región interior. Por eso la transformación (4) es un movimiento no euclidiano en la métrica de Lobachevski que está definida sobre el plano $X_3 = 1$ dentro del absoluto k (véase el § 170). Hemos mostrado que toda transformación de Lorentz induce cierto movimiento no euclidiano dentro de k sobre el plano $X_3 = 1$. Ahora, mostremos que a base de un movimiento no euclidiano dado de antemano dentro de k, se puede hallar, y además unívocamente, la transformación de Lorentz que lo induce.

Sea dado un movimiento no euclidiano por las fórmulas del tipo de (4). Entonces la transformación buscada de Lorentz debe tener forma de

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= \lambda(q_{11}X_1 + q_{12}X_2 + q_{13}X_3), \\ X_2' &= \lambda(q_{21}X_1 + q_{22}X_2 + q_{23}X_3), \\ X_3' &= \lambda(q_{31}X_1 + q_{32}X_2 + q_{33}X_3), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

donde λ es cierto número $\neq 0$. Para cualquier $\lambda \neq 0$ las fórmulas (5) definen una transformación afín en el espacio. Demostremos que con la elección apropiada de λ esta transformación afín será una transformación de Lorentz.

En rigor, la transformación (4) deja fijas la circunferencia k y su región interior; de aquí se infiere que la transformación afín (5) deja fijos el cono isótropo y su región interior. Algebraicamente, esto quiere decir que a consecuencia de las igualdades (5) tiene lugar la relación

$$X_1'^2 + X_2'^2 - X_3'^2 = \sigma(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2), \tag{6}$$

donde σ es proporcional a λ^2 con el factor de proporcionalidad positivo. Elijamos λ observando la igualdad $\sigma = 1$; entonces la transformación (5) expresará un movimiento en el espacio de Minkowski. Hagamos constar además que $q_{33} \neq 0$, pues en el caso contrario, el punto interior (0, 0, 1) del cono isótropo se convertirá en punto exterior $(\lambda q_{13}, \lambda q_{23}, 0)$ por la transformación (5), lo cual queda excluido. Por ende, podemos elegir el signo de λ de modo que $\lambda q_{33} > 0$. Bajo esta condición la transformación (5) deja fijo cada hueco del cono isótropo y, consiguientemente, es una transformación de Lorentz. Está claro que la elección requerida de λ es unívoca.

Así pues, las transformaciones homogéneas de tres dimensiones se hacen corresponder biunívocamente a los movimientos de la geometría bidimensional de Lobachevski. Además, es fácil comprobar que el producto de dos transformaciones de Lorentz se hace corresponder al producto de los movimientos no euclidianos correspondientes. Por consiguiente, *el grupo homogéneo tridimensional de Lorentz y el grupo de movimientos de la geometría bidimensional de Lobachevski son isomorfos.*

Análogamente se puede mostrar el isomorfismo del grupo homogéneo cuadridimensional de Lorentz y del grupo de movimientos en la geometría tridimensional de Lobachevski.

3. Espacio de sucesos de la teoría especial de la relatividad

§ 203. Considérese cierto suceso M. Imaginémonos que en realidad nos interesa no la naturaleza del suceso M, sino el lugar y el tiempo en que transcurre este suceso; además, admitamos que el suceso M tiene lugar en una porción tan pequeña del espacio y en un intervalo de tiempo tan corto que se puede considerar que dicho suceso *transcurre instantáneamente* en un determinado punto e. Entonces llamaremos elemental al suceso sujeto a la consideración. El lugar de un suceso elemental arbitrario se determina respecto a cierto cuerpo material elegido de antemano, y el tiempo se establece mediante un determinado reloj. Por ejemplo, se puede determinar el lugar de todo suceso respecto a la Tierra y registrar el tiempo según el reloj del observatorio de Púlkovo.

Sea elegido cierto cuerpo material T respecto al cual se determina el lugar de un suceso elemental arbitrario; estén ligados fijamente con el cuerpo T tres ejes cartesianos mutuamente perpendiculares y sea dada una escala, respecto a los cuales el lugar del suceso M se caracteriza por las coordenadas x, y, z (considerando euclídeas las propiedades geométricas del espacio real); sea dado, al fin, un reloj, según el cual el momento del suceso M se caracteriza por el número t (considerando t igual al número de unidades de tiempo a partir de cierto momento de referencia). El complejo integrado por el cuerpo T, la escala, los ejes, el reloj y el momento de referencia se llama *sistema de referencia*, los números x, y, z, t se llaman *coordenadas* del suceso M en un sistema de referencia dado.

La elección del sistema de referencia puede variar; entonces el mismo suceso M en un nuevo sistema de referencia, hablando en general, tendrá otras coordenadas x', y', z', t'. En este caso, si se toma el mismo cuerpo T, cambiando sólo los ejes ligados con él, la escala, la unidad de medida de tiempo y el momento de referencia, entonces el cambio del sistema de referencia y la transformación correspondiente de las coordenadas de sucesos se llaman *triviales*. En oposición a esto, llamaremos *esenciales* el cambio del sistema de referencia y la transformación correspondiente de las coordenadas de sucesos, si en lugar del cuerpo T se toma un cuerpo distinto T' *el cual se mueve respecto a* T.

Para la física, reviste una importancia de principio el problema de cómo se transforman las coordenadas de sucesos al cambiar esencialmente el sistema de referencia. Por cierto, tiene sentido plantear tal problema sólo respecto a algunas determinadas clases de sistemas de referencia, que sean suficientemente abarcables. A continuación se expone la solución del referido problema en cuanto a los sistemas inerciales.

§ 204. Llamaremos *inercial* a cierto sistema de referencia S si todo punto material independiente se mueve rectilínea y uniformemente respecto al sistema S. Al hablar del punto material independiente, tenemos en cuenta un cuerpo de pequeñas dimensiones tan alejado de otros cuerpos que se puede despreciar la acción de éstos sobre el referido cuerpo.

Sean S y S' dos sistemas inerciales de referencia, M, un suceso arbitrario. Nuestro objeto es obtener o caracterizar las fórmulas que expresen las coordenadas (x', y', z', t') del suceso M en el sistema S' a través de las coordenadas (x, y, z, t) del mismo suceso en el sistema S.

Primero, veamos cómo se resuelve este mismo problema desde el punto de vista de la física clásica. Ante todo, en la física clásica se admite que se pueda sincronizar universalmente los relojes, estableciendo un mismo sistema de referencia de tiempo; entonces $t' = t$. A la par con esto, se considera posible establecer una sola escala para medir las longitudes de segmentos en todos los ejes de coordenadas de los sistemas S y S'. Estos supuestos y la ley de la composición de velocidades formulada por la cinemática clásica prueban que en el caso de cierta elección especial de los ejes de coordenadas en los sistemas S y S', las coordenadas de cualquier suceso M, al pasar del sistema S al S', cambiarán con arreglo a la fórmulas

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{1}$$

(los ejes de coordenadas están elegidos de modo que $O'x'$ desliza por el Ox, y los ejes $O'y'$, $O'z'$ siguen siendo paralelos a los ejes Oy, Oz; v es la velocidad de movimiento de S' respecto a S).

De tal manera, las fórmulas buscadas se deducen fácilmente de las hipótesis de la física clásica y tienen forma muy sencilla.

No obstante, hagamos constar que la posibilidad de sincronizar universalmente todos los relojes, en absoluto, no es tan evidente como puede parecer a primera vista. Se podría sincronizar los relojes en todos los sistemas inerciales si existiesen señales de propagación instantánea. Bastaría fijar en una cierta fase el reloj de un sistema inercial, enviando al instante una señal a otros sistemas y allí fijar los relojes en la misma fase en el momento de recibir la señal; luego se podría unificar la marcha de los relojes dando otra señal tras un determinado lapso de tiempo. En este caso to-

dos los sistemas inerciales resultarían equitativos en el sentido de que la transmisión de una señal de cualquier sistema y la recepción de la misma en otro sistema cualquiera tendrían lugar en unas mismas fases de los relojes de estos sistemas. Mas, en la naturaleza no existen señales que se propaguen instantáneamente. Si se vale de señales luminosas, mediante el procedimiento recién referido se puede lograr sólo una sincronización aproximada de los relojes en los sistemas inerciales, a condición de que sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz, la de movimiento de unos sistemas inerciales respecto a otros.

En el sentido aproximado, no ofrecen lugar a dudas otras dos hipótesis que alegamos (la posibilidad de unificar las escalas, la ley clásica de la composición de velocidades). Por ende, las fórmulas (1) también son aproximadamente exactas si v es pequeña en comparación con la velocidad de la luz.

Pero las fórmulas (1) contradicen a los datos experimentales de la física moderna de gran velocidad. El caso consiste en lo siguiente. Es sabido desde hace mucho que las leyes de la mecánica se observan igualmente en todos los sistemas inerciales. Las fórmulas (1) no contradicen a esta tesis si se sobreentienden las leyes de la mecánica clásica, pues sus ecuaciones son invariantes respecto a la transformación según las fórmulas (1). Al mismo tiempo, de las fórmulas (1) se deduce que las leyes de la electrodinámica tienen que depender de la elección del sistema inercial, por cuanto las ecuaciones de la electrodinámica no son invariantes respecto a la transformación (1). Ante todo, la velocidad de la luz tiene que ser diferente con respecto a diversos sistemas inerciales; a saber, si en el sistema S la luz se propaga en dirección hacia el eje x con una velocidad c, entonces según las fórmulas (1), en el sistema S' debe existir una velocidad de la luz $= c - v$. No obstante, los experimentos adecuados no registraron tal efecto. En virtud de esta circunstancia, en la física está adoptado *el postulado sobre la independencia de la velocidad de la luz en cuanto a la elección del sistema inercial de referencia*. Aquí toma su principio la teoría especial de la relatividad descubierta por la obra de Lorentz, Poincaré, Minkowski y, sobre todo, de Einstein; según la referida teoría, no sólo las leyes de la mecánica, sino también las de la electrodinámica son unas mismas en todos los sistemas inerciales. La teoría de la relatividad sustituye las hipótesis iniciales de la física clásica que conducen a las fórmulas (1), por tesis más exactas concordantes con la física experimental de grandes velocidades. Con esto mismo se sustituyen también las fórmulas (1) por fórmulas más exactas. Estas serán deducidas en los párrafos inmediatos. En este caso, tendremos que utilizar esencialmente los conceptos geométricos desarrollados en dos secciones precedentes.

§ 205. Sea S algún sistema inercial de referencia, M, un suceso elemental arbitrario, t, x, y, z, las coordenadas del referido suceso en el sistema S (aquí y más abajo el tiempo t se considera como la primera coordenada para hacer cómodo el apunte de algunas fórmulas que siguen).

Designemos con $\mathfrak{A}$ un espacio cuadridimensional afín, en el cual están elegidos de un modo cualquiera el origen O y la base a_1, a_2, a_3, a_4 de un sistema afín de coordenadas. Convengamos en hacer corresponder al suceso M un punto del espacio $\mathfrak{A}$, que se define por las coordenadas t, x, y, z respecto al origen y la base elegidos; diremos que este punto representa el suceso M en el espacio $\mathfrak{A}$. El punto que representa el suceso, lo denotaremos con la misma letra que el propio suceso.

El espacio cuadridimensional afín $\mathfrak{A}$ cuyos puntos representan sucesos elementales de todo género, se llama *espacio de sucesos*. Notemos que los sucesos que transcurren durante cierto lapso de tiempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ en un punto del espacio físico, inmóvil respecto a los ejes del sistema S y dotado de las coordenadas x_0, y_0, z_0, se representan en el espacio $\mathfrak{A}$ por medio del segmento $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$; evidentemente, tal segmento es paralelo al vector a_1. Correspondientemente a esto, el eje de coordenadas orientado según el vector básico a_1 en el espacio de sucesos, se llama *eje de tiempo*.

§ 206. Ahora haremos el primer paso en la resolución del problema de transformación de las coordenadas de sucesos al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Considérese, además del sistema S, un otro sistema de referencia S', también inercial; sean t, x, y, z las coordenadas de un suceso arbitrario M respecto a S; sean t', x', y', z' las coordenadas del mismo suceso respecto a S'. Entonces t', x', y', z' son determinadas funciones de t, x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} t' &= f(t, x, y, z), \\ x' &= \varphi(t, x, y, z), \\ y' &= \psi(t, x, y, z), \\ z' &= \chi(t, z, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Supongamos que 1) f, φ, ψ, χ están determinados para cualesquiera valores de t, x, y, z; 2) según cualesquiera valores de t', x', y', z' de las ecuaciones (1) se determinan, y además de un único modo, t, x, y, z.

Con esto mismo suponemos que respecto a cada uno de los sistemas S, S', los sucesos puedan tener lugar dondequiera y en cualquier momento; estos supuestos significan también que los sistemas S, S' son siempre inerciales.

Demostraremos que las fórmulas (1) *son lineales, es decir, tienen forma de*

$$\left.\begin{aligned} t' &= c_{11}t + c_{12}x + c_{13}y + c_{14}z + d_1, \\ x' &= c_{21}t + c_{22}x + c_{23}y + c_{24}z + d_2, \\ y' &= c_{31}t + c_{32}x + c_{33}y + c_{34}z + d_3, \\ z' &= c_{41}t + c_{42}x + c_{43}y + c_{44}z + d_4. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Además, $\operatorname{Det} c_{ik} \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar este teorema, tenemos que adoptar una suposición física más. A saber, supondremos que a través de cualquier lugar de un espacio físico, en cualquier momento de tiempo en cualquier dirección puede pasar con cualquier velocidad conocida en la física experimental, un punto material independiente (sin embargo, no suponemos que un punto material puede tener cualquier velocidad en general, puesto que nadie ha registrado velocidades arbitrariamente grandes, y tal suposición carece de fundamento; más aún, como se verá en lo sucesivo, la misma resultaría también errónea). Al hablar de la velocidad de un punto material, tendremos en cuenta la velocidad respecto al sistema S. Designemos con C un número positivo tal que sea factible cualquier velocidad inferior a C.

Pase volando en el espacio algún punto material independiente. Como el sistema S es inercial, respecto al sistema S el movimiento de dicho punto es rectilíneo y uni-

forme. Por tanto, las ecuaciones del movimiento de tal punto deben tener forma de

$$x - x_0 = l(t - t_0), \quad y - y_0 = m(t - t_0),$$
$$z - z_0 = n(t - t_0), \tag{3}$$

donde l, m, n son las componentes de la velocidad del punto en vuelo, (x_0, y_0, z_0) es el lugar en que el punto se encuentra en el momento $t = t_0$. En virtud de la hipótesis admitida al comenzar la demostración, los números t_0, x_0, y_0, z_0 pueden considerarse cualesquiera. En cuanto a l, m, n, éstos deben satisfacer la desigualdad

$$l^2 + m^2 + n^2 < C^2. \tag{4}$$

El hecho de que en el momento t el punto en vuelo se encuentra en el lugar (x, y, z), es un suceso que se representa por medio de un punto (t, x, y, z) en el espacio de sucesos $\mathfrak{A}$. Todo el proceso de movimiento del punto en vuelo se representa en el espacio de sucesos mediante cierta recta, pues t, x, y, z están sujetas a tres ecuaciones independientes de primer grado (3) (véase el § 185). Denotemos esta recta con b. Luego, hagamos notar que de las relaciones (3) y (4) se infiere la desigualdad

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - C^2(t - t_0)^2 < 0, \tag{5}$$

que define la región interior de cierto cono real regular de segundo orden con el vértice (t_0, x_0, y_0, z_0) (véase el § 186); lo designaremos con K_0. Por cuanto la desigualdad (5) es un corolario de las relaciones (3) y (4), entonces la recta b que pasa por el vértice del cono K_0, se halla en su región interior. De las hipótesis admitidas se desprende que toda recta del espacio de sucesos que pasa dentro del cono K_0 por su vértice, puede representar el proceso de movimiento de un punto material independiente que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) en el momento t_0.

Ahora, abordemos las ecuaciones (1). En virtud de las referidas ecuaciones, a todo punto $M(t, x, y, z)$ del espacio de sucesos le corresponde un punto $M'(t', x', y', z')$ es decir, está definida una cierta aplicación $M' = f(M)$; en virtud de las condiciones impuestas a las ecuaciones (1), esta aplicación es una aplicación biunívoca del espacio de sucesos sobre sí mismo. Ahora, tengamos en cuenta que el sistema de referencia S' es inercial también. Por eso, si t, x, y, z constituyen coordenadas corrientes en las ecuaciones (3), entonces t', x', y', z' satisfacen las ecuaciones análogas, aunque sean distintos los parámetros (dado que las ecuaciones (3) definen el movimiento de un punto material independiente, y tal movimiento en el sistema S' será rectilíneo y uniforme). De aquí se infiere que si en el espacio de sucesos un conjunto de puntos M se halla sobre la recta b, entonces los puntos correspondientes de $M' = f(M)$ también se hallan sobre cierta recta b'. Así pues, 1) en el espacio de sucesos para cualquier punto $M_0(t_0, x_0, y_0, z_0)$ está definido un cono K_0 con el vértice M_0; 2) si la recta b pasa por M_0 dentro de K_0, entonces a causa de la aplicación $M' = f(M)$, todas las imágenes de los puntos de la recta b quedan dispuestas sobre cierta recta b'. Ahora, demostremos que cualquiera que sea la recta b, las imágenes de sus puntos también están situadas sobre una recta, es decir, que la aplicación $M' = f(M)$ es colineal.

Sobre la recta b, tomemos tres puntos diferentes M_1, M_2, M_3; sean K_1, K_2, K_3 los conos definidos para los puntos M_1, M_2, M_3 de manera análoga a que el cono K_0 fue definido para el punto M_0. Ahora ya es natural considerar que la recta b no pasa por las regiones interiores de los conos K_i. Dentro de K_1, tracemos a través de M una

recta arbitraria. Las rectas b y b_1 definen el plano (bidimensional) β que las contiene. A través de los puntos M_2 y M_3, tracemos las rectas b_2^* y b_3^* paralelas a la recta b_1; las referidas rectas se situarán en el plano β y dentro de los conos correspondientes K_2 y K_3. La continuidad del primer miembro de la desigualdad (5) impone que a consecuencia de una pequeña modificación de las coordenadas de los vectores directores de las rectas b_2^* y b_3^*, los vectores directores modificados definan rectas que también se hallan dentro de los conos K_2 y K_3. Por eso, existirán rectas b_2 y b_3 que 1) pasan por M_2 y M_3 en el plano β y dentro de los conos K_2 y K_3; 2) están situadas de manera que las tres rectas b_1, b_2, b_3 se intersecan dos a dos en tres puntos diferentes P, Q, R del plano β.

Sean P', Q', R' las imágenes de los puntos P, Q, R creadas por la aplicación $M' = f(M)$. Dado el carácter biunívoco de esta aplicación, los puntos P', Q', R' son diferentes. Si R' se halla sobre la recta $P'Q'$, entonces $M_i' = f(M_i)(i = 1, 2, 3)$ están sobre la misma recta. Por consiguiente, en este caso no hay que demostrar nada. Supongamos que P', Q', R' no estén sobre una misma recta. Entonces ellos definen el plano β' que los contiene. Como las rectas b_1, b_2, b_3 pasan dentro de los conos K_1, K_2, K_3, las imágenes de sus puntos se hallan sobre tres rectas b_1', b_2', b_3'. Las rectas b_1', b_2', b_3' se intersecan dos a dos en los puntos P', Q', R' y por eso están situadas en el plano β' (véase el § 182); junto con ellas, el plano β' contiene los puntos $M_i' = f(M_i)(i = 1, 2, 3)$. Por el punto M_1 dentro del cono K_1 se puede trazar una recta c_1 que no pertenece al plano β. Aplicando a la recta c_1 la misma construcción que fue aplicada a la b_1, obtendremos análogamente a lo aducido más arriba, un plano γ' que contiene los puntos M_1', M_2', M_3' y no coincide con el plano β'. Ya que los planos β' y γ' son diferentes, entonces todos los puntos comunes suyos se hallan sobre una misma recta. A consecuencia de esto mismo los puntos M_1', M_2', M_3' están situados sobre una misma recta, resultando establecido el carácter colineal de la aplicación $M' = f(M)$. Pero según el § 187, si la aplicacion $M' = f(M)$ es colineal, entonces en las coordenadas afines la misma se representará por fórmulas lineales con un determinante diferente de cero. Por esto mismo queda demostrada nuestra afirmación.

NOTA. La demostración sigue siendo válida si se considera que el sistema S' es inercial *respecto al* sistema S, es decir, si se exige solamente que todo movimiento rectilíneo y uniforme de un punto material (con una velocidad admisible) respecto a S sea rectilíneo y uniforme también respecto a S'. En la demostración no se necesitó la reciprocidad de tal relación entre S y S'.

Ahora sabemos que las fórmulas buscadas de transformación de las coordenadas de sucesos tienen forma lineal. A continuación hay que establecer los coeficientes de las referidas fórmulas, lo cual haremos a partir del postulado sobre la independencia de la velocidad de la luz en cuanto a la elección del sistema inercial de referencia. Preliminarmente tendremos que completar un poco el concepto de espacio de sucesos expuesto en el § 205.

§ 207. Al definir el espacio de sucesos $\mathfrak{A}$, partíamos de la consideración de un sistema inercial de referencia S en el espacio físico. Junto con S, elegimos en el espacio afín $\mathfrak{A}$ el origen O y la base a_1, a_2, a_3, a_4 del sistema afín de coordenadas; el punto M que representa un suceso, se construye en el sistema de coordenadas elegido a base de las coordenadas del suceso (t, x, y, z); las referidas coordenadas se consideran dadas respecto a S. Si S' es otro sistema inercial de referencia cualquiera, en

el cual el mismo suceso tiene nuevas coordenadas t', x', y', z', entonces estas nuevas coordenadas se expresan a través de t, x, y, z según las fórmulas lineales (2) del § 206 con un determinante diferente de cero. Mas, conforme al § 180, cualquier transformación lineal de cuatro variables cuyo determinante difiera de cero, puede considerarse como transformación de coordenadas afines en el espacio afín de cuatro dimensiones. Esto quiere decir que existe un nuevo sistema de coordenadas afines en el espacio $\mathfrak{A}$, definido por un origen O' y una base a_1', a_2', a_3', a_4'. Respecto al referido sistema, el punto M que representa el suceso dado, tiene coordenadas t', x', y', z'. De tal modo, a todo sistema inercial de referencia ubicado en el espacio físico le corresponde un determinado sistema afín de coordenadas del espacio de sucesos.

§ 208. Sean M_0 y M dos sucesos que se observan desde el punto de vista del sistema inercial de referencia S. Estimemos que M_0 suceda en un lugar dado (x_0, y_0, z_0) del espacio físico en un momento dado t_0. Consideraremos arbitrario el lugar (x, y, z) del suceso M; denotaremos con t el instante del suceso M. Supongamos que en el caso de $t_0 < t$ una señal luminosa enviada desde el lugar del suceso M_0 en el instante t_0, llegue al lugar del suceso M justamente en el instante t, a la inversa, si $t < t_0$, entonces la señal luminosa del suceso M_0 llega al lugar del suceso M_0 precisamente en el instante t_0.

Entonces

$$-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0, \qquad (1)$$

donde c es la velocidad de la luz, ya que el trayecto recorrido por la señal es igual a su velocidad multiplicada por un intervalo de tiempo correspondiente. En el espacio $\mathfrak{A}$ los sucesos M_0 y M se representan por dos puntos; los designaremos también con M_0 y M, siendo M_0 un punto fijo, y M, en un punto corriente. El conjunto de todos los puntos M del espacio $\mathfrak{A}$ definidos por la ecuación (1), constituye un cono con el vértice en el punto M_0 (véase el § 186); este cono se llama *cono de luz* del espacio de sucesos en el punto M_0. La ecuación (1) define un cono de luz en el sistema afín O, a_1, a_2, a_3, a_4 correspondiente al sistema inercial S.

La región interior del cono de luz se define por la desigualdad

$$-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < 0.$$

Junto con la condición $t > t_0$, esta desigualdad define un hueco del cono de luz; lo llamaremos *superior*. Al hueco superior le corresponden los sucesos M cuyo lugar alcanza la señal luminosa del suceso M_0 anticipando los referidos sucesos. El otro hueco del cono de luz, correspondiente a la condición de $t < t_0$, lo llamaremos *inferior*; le corresponden los sucesos M antecedentes a M_0, la señal luminosa del suceso M también alcanza el lugar del suceso M_0 antes que lo alcance dicho suceso.

La región exterior del cono de luz corresponde a los sucesos M que no pueden comunicarse con el suceso M_0 aun mediante señales luminosas (así ocurre, por ejemplo, si M_0 y M suceden en distintos lugares del sistema S y a un mismo tiempo, es decir, $t = t_0$).

§ 209. Ahora tenemos la posibilidad de determinar los coeficientes presentes en las fórmulas de transformación de las coordenadas de sucesos al cambiar de sistema inercial de referencia. Pasemos al sistema afín O', a_1', a_2', a_3', a_4' correspondiente al sistema de referencia S'. En el nuevo sistema, los puntos M_0 y M tienen nuevas co-

ordenadas, pero el cono de luz se define análogamente al caso anterior mediante la fórmula

$$-c^2(t' - t_0')^2 + (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 = 0 \quad (2)$$

con el mismo valor de c; esto se infiere del postulado sobre la independencia de la velocidad de la luz en cuanto a la elección del sistema inercial de referencia.

Transformemos la ecuación (2) respecto a las coordenadas viejas t, x, y, z, mediante las fórmulas (2) del § 206.

Obtendremos:

$$-c^2(t' - t_0')^2 + (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 =$$
$$= A(t - t_0)^2 + B(t - t_0)(x - x_0) + \dots + K(z - z_0)^2. \quad (3)$$

Aquí en el segundo miembro tenemos una forma cuadrática respecto a las diferencias $t - t_0$, $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, cuyos coeficientes A, B, ..., K son ciertas expresiones compuestas por los coeficientes c_{ik} de las fórmulas (2) del § 206 y por el número c.

Si consideramos igual a cero el segundo miembro de la ecuación (3), tendremos la ecuación del cono de luz en las coordenadas viejas. Pero el mismo cono, también en las coordenadas viejas, está definido por la ecuación (1). De aquí se deduce que los coeficientes del segundo miembro de la igualdad (3) deben ser proporcionales a los de la ecuación (1).

De tal modo resulta que en rigor la igualdad (3) debe tener forma siguiente

$$-c^2(t' - t_0')^2 + (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 =$$
$$= H\{-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}, \quad (4)$$

donde H es cierta expresión integrada por los coeficientes c_{ik} de las fórmulas (2) del § 206, siendo $H > 0$ (en virtud de la ley de inercia de las formas cuadráticas). Ahora, admitamos que *en uno de dos sistemas de referencia S, S'* la escala lineal y la unidad de medida de tiempo varíen un mismo número de veces; en tal caso, todas las diferencias $t - t_0, x - x_0, y - y_0, z - z_0$ se multiplican por un mismo número (al mismo tiempo varían proporcionalmente los coeficientes c_{ik} en las fórmulas (2) del § 206). Por consiguiente, mediante cierta coordinación de las escalas lineales y las unidades de medida de tiempo en los sistemas S, S' podemos lograr la igualdad $H = 1$. En lo sucesivo consideraremos que tal coordinación tiene lugar en todo caso; bajo esta condición, para cualquier par de puntos M_0, M, como corolario de las fórmulas (2) del § 206, debe observarse la igualdad

$$-c^2(t' - t_0')^2 + (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 =$$
$$= -c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \quad (5)$$

De tal manera, para que las fórmulas (2) del § 206 expresen la transformación de las coordenadas de sucesos al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, sus coeficientes deben estar escogidos de modo que se observe idénticamente la igualdad (5). De aquí resultan las condiciones necesarias para los coeficientes de las fórmulas buscadas. Pero, más aún, estas condiciones resultan también suficientes; a saber, según lo mostrará el análisis ulterior, al observarse las referidas condiciones, la arbitrariedad de la elección de coeficientes corresponde precisamente a la de la elección de sistemas inerciales posibles.

No hay necesidad de hacer medición para obtener las condiciones en cuestión. De hecho, el resultado requerido ya lo obtuvimos en la sección precedente donde consideramos el espacio de Minkowski; hay que sólo saber sacarlo. Con este objeto, introduciremos en el espacio de sucesos la métrica de Minkowski.

A un par arbitrario de puntos M_0, M del espacio de sucesos, hagamos corresponderle el número

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \tag{6}$$

llamándolo *distancia* entre los puntos M_0, M o entre los sucesos M_0, M. Al mismo tiempo determinaremos el producto escalar de un par arbitrario de vectores M_0M, M_0N, suponiéndolo igual a la forma bilineal de las coordenadas de los vectores M_0M, M_0N; los coeficientes de dicha forma bilineal, naturalmente, los adoptaremos iguales a los de la forma cuadrática que está bajo el signo de radical cuadrático en la igualdad (6) (véase el § 191).

La fórmula (6) expresa la distancia entre sucesos en las coordenadas pertenecientes a un determinado sistema inercial de referencia S. Mas, como muestra la igualdad (5), aquí no importa la elección del sistema inercial de referencia. Dicho en otros términos, la métrica *de Minkowski introducida en un espacio de sucesos, es invariante respecto al paso de un sistema inercial de referencia a otro.*

La distancia entre dos sucesos M_0 y M puede ser imaginaria, igual a cero y positiva. Precisamente, $\rho(M_0, M)$ es imaginaria si M_0 y M pueden comunicarse mediante una señal cuya velocidad es $< c$; $\rho(M_0, M) = 0$ si la comunicación es posible únicamente mediante una señal luminosa; $\rho(M_0, M) > 0$ cuando ni siquiera una señal luminosa que comunica un suceso, puede anticipar el otro. Estas tres clases de sucesos M responden a la región interior del cono de luz con el vértice M_0, al propio cono y a su región exterior respectivamente (véase el § 208). Hagamos constar de paso que un cono de luz de un espacio de sucesos no es sino el cono isótropo de la métrica de Minkowski introducida en el referido espacio.

De la fórmula (6) se deduce que la norma del primer vector básico del sistema elegido de coordenadas afines es igual a ci; las normas de los demás vectores básicos son iguales a uno. Sustituyamos el primer vector básico por un vector unitario imaginario orientado en el mismo sentido; dejemos sin cambiar los demás vectores, pero ahora designaremos los vectores básicos con e_1, e_2, e_3, e_4 (en el § 207 usamos los símbolos a_1, a_2, a_3, a_4). De tal manera,

$$e_1 = \frac{1}{c} a_1, \quad e_2 = a_2, \quad e_3 = a_3, \quad e_4 = a_4.$$

Correspondientemente, ahora la primera coordenada del suceso será ct y no t. Introduzcamos nuevas notaciones de las coordenadas de sucesos suponiendo

$$ct = X_1, x = X_2, y = X_3, z = X_4;$$

llamaremos coordenadas normalizadas de un suceso a las coordenadas X_i. De la fórmula (6) tenemos:

$$\rho^2(M_0, M) = -(X_1 - X_1^0)^2 + (X_2 - X_2^0)^2 + (X_3 - X_3^0) + (X_4 - X_4^0)^2, \tag{7}$$

donde X_k^0 y X_k son las coordenadas normalizadas de los sucesos M_0 y M. Conforme a la fórmula (7), el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_k, y_k

se expresa mediante la fórmula

$$xy = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4. \tag{8}$$

Por cuanto las fórmulas (7) y (8) tienen aspecto canónico, la base e_1, e_2, e_3, e_4 es ortonormal; $e_1^2 = -1$ (véase el § 193). En un espacio físico, pásese del sistema inercial S al sistema inercial S'. Entonces las coordenadas de sucesos se transformarán según fórmulas lineales; apuntémoslas abreviadamente para las coordenadas normalizadas

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k + b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{3}$$

En el espacio de sucesos esta transformación corresponde al paso del sistema afín O, e_1, e_2, e_3, e_4 confrontado con S, al sistema afín O', e_1', e_2', e_3', e_4' comparado con S'. Dada la invariación de la métrica del espacio de sucesos, la base e_1', e_2', e_3', e_4' también es ortonormal, siendo $e_1'^2 = -1$. De tal modo, *si en el espacio físico un sistema inercial de referencia se sustituye por otro, entonces las coordenadas de un suceso arbitrario* (X_1, X_2, X_3, X_4) *se transforman según las fórmulas* (9) *que coinciden con las de transformación de coordenadas ortonormales en el espacio cuadridimensional de Minkowski.*

Con esto, el problema planteado queda resuelto en lo fundamental, pues la cuestión de la transformación de coordenadas ortonormales se ha estudiado en la sección precedente (véase el § 201). Queda un solo detalle del cual vamos a hablar.

§ 210. Para facilitar la exposición, haremos notar que mediante una transformación trivial de los sistemas inerciales de referencia S y S', las fórmulas (9) pueden hacerse homogéneas. En efecto, recordemos que el sistema inercial de referencia es un complejo integrado por un cuerpo material T, tres ejes cartesianos ligados fijamente con el cuerpo T, una escala, un reloj y un instante inicial de medida de tiempo. Al desplazar paralelamente los ejes cartesianos de uno de los sistemas S, S', procuremos que se dispongan de modo que en cierto instante el punto de origen de los ejes del sistema S coincida con el del sistema S'; el momento de observaciones de este suceso en los sistemas S y S' lo adoptaremos como instante inicial de medida de tiempo en cada uno de estos sistemas. Entonces a los valores nulos de t, x, y, z les corresponderán los valores nulos de t', x', y', z'. Por consiguiente, en las fórmulas (9) los términos independientes b_i serán iguales a cero, resultando

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k. \tag{1}$$

En el espacio de sucesos las fórmulas (1) corresponden a la variación de la base de coordenadas ortonormales al permanecer invariable el origen. Consideremos un cono de luz con el vértice ubicado en el origen de coordenadas. Como los primeros vectores e_1, e_1' de las bases vieja y nueva son unitarios imaginarios, ambos se encuentran en la región interior del cono de luz. Dado que el hueco superior del cono de luz responde a los sucesos futuros respecto al instante nulo de medición de tiempo del sistema S, e_1 está orientado precisamente hacia el hueco superior. Mas, entonces e_1' también debe estar orientado hacia el mismo hueco del cono de luz. De aquí se desprende que la transformacíon (1) de las coordenadas normalizadas de sucesos

corresponde en el espacio de sucesos al paso a una nueva base ortonormal a condición de que el nuevo vector básico e'_1 se halle en el mismo hueco del cono de luz donde está el vector básico viejo e_1.

Conforme al § 201, esta afirmación puede formularse del modo siguiente: *toda transformación de coordenadas inerciales ortonormales de sucesos es una transformación cuadridimensional de Lorentz* (se tiene en cuenta la transformación de Lorentz en el sentido estricto).

§ 211. Ahora podemos apuntar de una vez las condiciones que deben satisfacerse por los coeficientes q_{ik}, si las fórmulas (1) del § 210 expresan una transformación de coordenadas inerciales normalizadas de sucesos; basta alegar la relación matricial (6) del § 201 (véase también el § 196). Sólo hay que tener en cuenta que ahora por vector imaginario unitario se toma el vector e_1 y no el e_4, como en los §§ 196 — 201. Por eso, en el caso dado

$$I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Así pues, *si las fórmulas* (1) *del* § 210 *expresan una transformación de coordenadas inerciales normalizadas, entonces la matriz* $Q = (q_{ik})$ *satisface las condiciones*

$$Q^* I Q = I, \quad q_{11} > 0 \tag{2}$$

(la relación $q_{11} > 0$ significa que e_1 y e'_1 están en un mismo hueco hel cono de luz).

§ 212. Podemos dar una forma muy sencilla a la matriz Q realizando transformaciones triviales adecuadas de los sistemas inerciales sujetas a la consideración.

Imaginémonos que en el sistema inercial S pasemos a nuevas coordenadas cartesianas, sin variar la medición de tiempo ni la escala. Entonces las coordenadas de sucesos tendrán una transformación trivial con la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ 0 & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}$$

dado que $t' = t$ y x', y', z' se expresan sólo mediante x, y, z.

La matriz

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}$$

constituye una matriz ortogonal tridimensional ordinaria que se conoce bien de la geometría analítica. La transformación de coordenadas con la matriz Q dada corresponde en el espacio de sucesos al paso de la base e_i a la base e'_i, y si

$$e'_i = \sum_{k=1}^{4} p_{ik} e_k,$$

entonces la matriz $P = (p_{ik}) = (Q^*)^{-1}$ (véase el § 180).

De aquí

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que $e'_1 = e_1$, y los vectores e'_2, e'_3, e'_4 se expresan sólo a través de los vectores e_2, e_3, e_4 según las fórmulas cuyos coeficientes constituyen la matriz

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

Evidentemente, $P_1 = (Q_1^*)^{-1}$ y, por consiguiente, P_1 también es una matriz ortogonal de tres dimensiones. Por lo tanto, los vectores e'_2, e'_3, e'_4 se hallan en el hiperplano de los vectores e_2, e_3, e_4 y pueden obtenerse a consecuencia del movimiento euclidiano ordinario de una terna de vectores e_2, e_3, e_4 como un todo. Aquí hay que tener en cuenta que en el hiperplano $e_2e_3e_4$ se realiza la geometría euclidiana tridimensional (véase el § 159). Viceversa, si en el espacio de sucesos $e'_1 = e_1$, y los vectores e'_2, e'_3, e'_4 se obtienen de la terna de vectores e_2, e_3, e_4 a raíz del movimiento euclidiano en el hiperplano $e_2e_3e_4$, entonces tal transformación corresponde al paso trivial en el sistema S a nuevos ejes cartesianos.

Ahora, sean S y S' dos sistemas inerciales arbitrarios (coordenados sólo en el sentido del § 210), e_i y e'_i, las bases correspondientes a ellos en el espacio de sucesos (los puntos de origen O y O' coinciden). Si $e'_1 = e_1$, entonces S' se obtiene mediante una transformación trivial de S, lo cual no ofrece interés. Estimaremos que $e'_1 \neq e_1$ (el caso de $e'_1 = -e_1$ queda excluido en absoluto; véase el § 210). Denotemos con α el hiperplano de los vectores e_2, e_3, e_4, con α', el hiperplano de los vectores e'_2, e'_3, e'_4. Estos hiperplanos tienen un punto común O, sin coincidir uno con el otro. Por eso y según el § 182, los hiperplanos α, α' se cortan según el plano bidimensional β. Dejemos invariable el vector e_1, dando una nueva posición a la terna de vectores e_2, e_3, e_4 mediante el movimiento euclidiano dentro del hiperplano α, de modo que e_2, e_3 queden ubicados sobre el plano β. Análogamente, conservando e'_1, demos una nueva posición a la terna de vectores e'_2, e'_3, e'_4 por medio del movimiento euclidiano dentro de α', para que e'_2 y e'_3 también vayan a parar sobre el plano β y, además, que coincidan con los vectores e_2, e_3. En las nuevas posiciones, dejemos vigentes las notaciones viejas de los vectores. A cada una de las variaciones operadas de las bases e_i, e'_i le corresponde una variación trivial de los sistemas S, S' del espacio físico.

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + p_{13}e_3 + p_{14}e_4, \\ e'_2 &= p_{21}e_1 + p_{22}e_2 + p_{23}e_3 + p_{24}e_4, \\ e'_3 &= \theta \quad + \theta \quad + e_3 \quad + \theta, \\ e'_4 &= \theta \quad + \theta \quad + \theta \quad + e_4. \end{aligned}$$

Multipliquemos escalarmente ambos miembros de la primera igualdad por ambos miembros de la tercera; como $e'_1e'_3 = 0$, $e_1e_3 = 0$, $e_2e_3 = 0$, $e_4e_3 = 0$, y $e_3^2 = 1$, por ende $p_{13} = 0$. Se puede mostrar exactamente del mismo modo que $p_{14} = 0$, $p_{23} = 0$, $p_{24} = 0$. Por consiguiente, la matriz P adquiere el aspecto que sigue

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos:

$$Q = (P^*)^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Así pues, mediante una variación trivial de los sistemas inerciales S, S', las fórmulas de transformación de coordenadas normalizadas de sucesos siempre pueden reducirse a la forma que sigue:

$$\left.\begin{aligned} X'_1 &= q_{11}X_1 + q_{12}X_2, \\ X'_2 &= q_{21}X_1 + q_{22}X_2, \\ X'_3 &= X_3, \\ X'_4 &= X_4, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 213. Para determinar los demás coeficientes, se puede usar las condiciones (2) del § 211. No obstante, respecto a los sistemas especializados S, S', la transformación buscada se apunta tan sencillamente que preferiremos obtener de inmediato el resultado final a partir de la identidad (5) del § 209, que expresa la invariación de la métrica del espacio de sucesos.

Volvamos a la designación física de las coordenadas de sucesos, apuntando correspondientemente a las ecuaciones citadas más arriba:

$$t' = At + Bx, \quad x' = Dt + Ex, \quad y' = y, \quad z' = z. \qquad (1)$$

La identidad (5) del § 209 en este caso toma la forma de

$$-c^2t'^2 + x'^2 = -c^2t^2 + x^2.$$

Al colocar las expresiones (1) en el primer miembro de esta igualdad y al comparar los coeficientes de la forma cuadrática resultante del primer miembro, con los coeficientes correspondientes del segundo, hallaremos:

$$-c^2A^2 + D^2 = -c^2, \qquad (2)$$

$$-c^2AB + DE = 0, \qquad (3)$$

$$-c^2B^2 + E^2 = 1. \qquad (4)$$

Ahora, hagamos notar que por razones físicas expuestas en el § 210 (véase también el § 211), debe ser $A > 0$. Asimismo por razones físicas resulta que $E \neq 0$ y se

puede considerar $E > 0$ (con la elección del sentido adecuado del eje x). A consecuencia de la igualdad (3) tenemos:

$$\frac{D}{cA} = \frac{cB}{E} .$$

Denotemos con $-\beta$ cada una de estas relaciones; entonces $D = -\beta cA$, $cB = -\beta E$. De aquí y de las igualdades (2), (4) obtenemos:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

después de lo cual hallaremos B y D. De tal manera,

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad (5)$$
$$y' = y, \quad z' = z.$$

Hemos aprovechado todas las condiciones algebraicas. Por consiguiente, el parámetro β es arbitrario, dicho en términos más exactos, desde el punto de vista matemático el mismo debe satisfacer tan sólo la desigualdad

$$1 - \beta^2 > 0. \qquad (6)$$

El parámetro tiene un sentido físico sencillo. Para revelarlo, consideremos un punto arbitrario M del espacio físico, que permanece fijo en el sistema S'; las coordenadas x', y', z' del referido punto son constantes. El punto M se mueve respecto al sistema S; al diferenciar las tres últimas ecuaciónes (5), hallaremos la velocidad del punto M en el sistema S:

$$\frac{dx}{dt} = \beta c, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

De tal modo, todos los puntos fijos en el sistema S', se mueven respecto al sistema S con una misma velocidad $(\beta c, 0, 0)$ orientada según el eje x. Esta velocidad común para todos los puntos de S' se llama velocidad de movimiento del sistema S' respecto a S; al designar con v su cumponente extendida a lo largo del eje x, obtendremos: $\beta = v/c$. De la desigualdad (6) tenemos:

$$v^2 < c^2. \qquad (7)$$

Si las propiedades del espacio físico no imponen otras limitaciones sobre la velocidad v, con la cual puede moverse un sistema inercial respecto a otro, entonces, también desde el punto de vista físico el parámetro β queda limitado sólo por la desigualdad (6). Por tanto, en este caso para los coeficientes q_{ik} de la transformación (1) del § 210 no existen más condiciones sino las enunciadas por las relaciones (2) del § 211, quedando resuelto por entero el problema de que nos ocupábamos.

Dicho en otros términos, *toda transformación de coordenadas inerciales normalizadas es transformación cuadridimensional de Lorentz; toda transformación cuadridimensional de Lorentz puede considerarse como una transformación de coordenadas inerciales normalizadas.*

Al mismo tiempo se puede decir que las transformaciones de coordenadas inerciales normalizadas constituyen un grupo isomorfo respecto al grupo cuadridimensional de Lorentz. Las transformaciones homogéneas de coordenadas inerciales normalizadas integran un grupo isomorfo respecto al grupo cuadridimensional homogéneo de Lorentz e isomorfo también al grupo de movimientos no euclidianos de la geometría tridimensional de Lobachevski (véase el § 202).

§ 214. Señalemos algunas conclusiones inferidas por nuestros razonamientos y cálculos.

1. De la desigualdad (7) del § 213 se deduce que la velocidad de movimiento de un sistema inercial respecto a otro puede ser sólo menor que la de la luz.

2. Al poner $\beta = \frac{v}{c}$ en las fórmulas (5), hallaremos:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

$$y' = y, z' = z.$$

Si v es pequeña respecto a la velocidad de la luz c, entonces

$$t' \approx t, \quad x' \approx x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

y en este caso obtendremos fórmulas aproximadas de la física clásica (véase el § 204).

3. Si dos sucesos (t_1, x_1), (t_2, x_2) se dan en puntos distintos del eje x del sistema S, siendo simultáneos con respecto al referido sistema ($t_2 = t_1$), entonces de la primera formula de (1) se desprende que $t_1' \neq t_2'$, por cuanto $x_2 \neq x_1$. De tal manera, los sucesos simultáneos en el sistema S no son simultáneos en el sistema S'. Por ende, es imposible la sincronización universal de los relojes, admitida por la física clásica (en esta relación, véase el § 204).

4. Supongamos que una varilla de una longitud $\Delta x' = x_2' - x_1'$ descansa sobre el eje x' del sistema S'; que en el sistema S, respecto al cual se mueve dicha varilla, la misma se mida en un determinado instante t. De la segunda ecuación de (1) obtenemos:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

De tal forma, la longitud de la varilla respecto a S es menor que respecto a S'. Pero si en el sistema S' hacemos girar dicha varilla, disponiéndola en el eje y, entonces por medio de la tercera ecuación de (1) obtendremos $\Delta y = \Delta y'$. Por consiguiente, podemos comparar varillas de escala rígidas en los sistemas S y S', disponiéndolas transversalmente respecto al movimiento; mas, es imposible elegir escalas iguales en todos los ejes de ambos sistemas S y S'. Entonces, la hipótesis de la posibilidad de unificar las escalas en todos los ejes es contradictoria.

5. Muévase un punto material en el sistema S' según el eje x', con una velocidad de

$$\frac{dx'}{dt'} = u'.$$

El sistema S' se mueve con una velocidad v respecto a S. Calculemos la velocidad $u = \frac{dx}{dt}$ que tiene un punto en movimiento respecto a S. Para ello, escribamos las ecuaciones inversas a las ecuaciones (1):

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

De aquí

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}$$

es decir,

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v}{c^2}u'}. \tag{2}$$

Esta fórmula sustituye la ley clásica de la composición de velocidades, conforme a la cual debe ser $u = v + u'$ (en relación con esto, véase el § 204). Hagamos constar que

$$\frac{v + c}{1 + \frac{v}{c^2}c} = c.$$

Esto quiere decir que según la ley de la composición de velocidades (2), la velocidad de la luz sumada a la velocidad v vuelve a dar la velocidad de la luz. Por esto mismo, precisamente la fórmula (2), y no la ley clásica de la composición de velocidades, concuerda con el postulado sobre la independencia de la velocidad de la luz respecto a la elección de sistemas inerciales de referencia*).

*) Más detalles sobre los fundamentos matemáticos de la teoría de la relatividad véanse en el libro: *П. К. Рашевский*, Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», (P. K. Rashevski, Geometría de Riemann y análisis tensorial).

Parte III

GEOMETRÍA DE CURVATURA CONSTANTE

Capítulo VIII

PROPIEDADES DIFERENCIALES DE LA MÉTRICA NO EUCLIDIANA

1. Forma métrica del plano euclidiano

§ 215. La fuente de todas nuestras deducciones siguientes es el análisis detenido de la estructura de las fórmulas mediante las cuales puede ser expresado el resultado de la medición de magnitudes geométricas.

Ante todo, consideraremos el caso más sencillo, cuando las mediciones se efectúan sobre el plano euclidiano.

Sea dado sobre un plano un sistema de coordenadas ortogonales cartesianas con los ejes Ox y Oy. Entonces, como sabemos de la geometría analítica, el cuadrado de la distancia Δs entre dos puntos $M(x, y)$ y $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ se determina con la igualdad

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \tag{1}$$

Luego, si $M_2(x + \delta x, y + \delta y)$ es un punto cualquiera más, entonces el coseno del ángulo φ entre los segmentos MM_1 y MM_2 se determina con la igualdad

$$\cos\varphi = \frac{\Delta x\delta x + \Delta y\delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \tag{2}$$

Al fin, el rectángulo con los vértices $P_1(x, y)$, $P_2(x + \Delta x, y)$, $P_3(x, y + \Delta y)$, $P_4(x + \Delta x, y + \Delta y)$ tiene el área σ determinada por la igualdad

$$\sigma = \Delta x\Delta y. \tag{3}$$

A partir de estas fórmulas, mediante pasos límite conocidos pueden obtenerse fórmulas más generales de la geometría diferencial válidas para las imágenes curvilíneas. A saber, si $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ son ecuaciones paramétricas de una curva suave, entonces la longitud de su arco s, correspondiente a la variación del parámetro t de a hasta b, se expresa mediante la integral

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

y el cuadrado de la diferencial del arco tiene el aspecto de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Si $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{\delta y}{\delta x}$ son coeficientes angulares de las direcciones de dos curvas en el punto de su intersección, el ángulo φ entre las curvas puede hallarse a base de la igualdad

$$\cos\varphi = \frac{dx\delta x + dy\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \tag{11}$$

Al fin, si Σ es cierto dominio cuadrable, su área σ se determina con la igualdad

$$\sigma = \iint_{(\Sigma)} dx\, dy. \tag{III}$$

Las fórmulas (I), (II), (III) caracterizan analíticamente la ley de la medición de longitudes, ángulos y áreas, expresada por los axiomas de la planimetría de Euclides. Por ende, se dice que por las referidas fórmulas se determina la métrica del plano euclidiano.

Para apuntar los segundos miembros de las fórmulas (I), (II), (III) nos valimos de un sistema de coordenadas ortogonales cartesianas. Si nos hubiéramos valido de algún otro sistema de coordenadas, entonces las expresiones para ds^2, $\cos\varphi$ y σ tendrían un aspecto distinto.

Sean, por ejemplo, r y θ las coordenadas polares de un punto arbitrario, $r = \varphi(t)$, $\theta = \psi(t)$, las ecuaciones de cierta recta. Entonces, la diferencial del arco de dicha recta, correspondiente a dt dado, puede expresarse a través de las diferenciales $dr = \varphi'(t)\,dt$, $d\theta = \psi'(t)dt$ mediante la relación

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \tag{I'}$$

Si dr, $d\theta$ son las variaciones de las coordenadas polares provocadas por un desplazamiento infinitamente pequeño del punto (r, θ) según la dirección de cierta curva, y δr, $\delta\theta$ son variaciones de las coordenadas debidas al desplazamiento de este punto según la dirección de una otra curva, entonces el coseno del ángulo φ entre las curvas viene determinado por la igualdad

$$\cos\varphi = \frac{dr\,\delta r + r^2 d\theta\,\delta\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}\sqrt{\delta r^2 + r^2 \delta\theta^2}}. \tag{II'}$$

Al fin, si Σ es un dominio cuadrable, y σ es su área, entonces,

$$\sigma = \iint_{(\Sigma)} r\, dr\, d\theta. \tag{III'}$$

Las fórmulas (I'), (II'), (III') determinan analíticamente la métrica del plano euclidiano mediante las coordenadas polares.

Para hacer abstracción de las particularidades provocadas por el uso de uno u otro sistema de coordenadas en las fórmulas para ds^2, $\cos\varphi$ y σ, y revelar el principio general de la construcción de dichas fórmulas, las escribiremos en coordenadas arbitrarias. Obtendremos las expresiones buscadas a partir de las fórmulas (I), (II), (III).

Sea dado algún sistema de coordenadas (u, x) determinado por las ecuaciones $x = x(u, v)$, $y = (u, v)$, mediante las cuales, a partir de las coordenadas u, v de un punto arbitrario del plano pueden hallarse las coordenadas cartesianas x, y de dicho punto [acotaremos la clase de los sistemas de coordenadas admisibles exigiendo que las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ sean continuamente diferenciables y que se cumpla la condición de ser desigual a cero su jacobiano: $D\left(\dfrac{x, y}{u, v}\right) \neq 0$, la última condición garantiza que las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ sean invertibles en el entorno de un punto arbitrario y sean continuamente diferenciables las funciones $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$].

Consideremos cierta línea $u = u(t)$, $v = v(t)$; si dt es una variación del parámetro t y ds es la diferencial del arco de esta línea correspondiente a dt, entonces se puede obtener la expresión de ds a través de $du = u'(t)dt$ y $dv = v'(t)dt$ sustituyendo en el segundo miembro de la igualdad

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{I}$$

los valores

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Efectuando esta sustitución, agrupando los términos que contienen du^2, $dudv$, dv^2, e introduciendo las notaciones

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 &= E, \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} &= F, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 &= G, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

hallaremos:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \qquad (\text{I}^*)$$

Aquí E, F, G son magnitudes, las cuales, para la elección dada del sistema de coordenadas (u, v), se determinan por las ecuaciones (α) en cada punto del plano, sin depender en absoluto de la elección de la curva que pase por dicho punto. Al contrario, las diferenciales du, dv dependen exclusivamente de cómo se desplaza el punto con las coordenadas u, v. De tal modo, la expresión del segundo miembro de (I*) es una forma cuadrática con los argumentos du, dv y con los coeficientes E, F, G.

Más, si du, dx y δu, δx son las diferenciales de las coordenadas u, v correspondientes al desplazamiento del punto en dos direcciones diferentes que forman un ángulo φ una respecto a la otra, entonces, sustituyendo en la fórmula (II)

$$\cos\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

las magnitudes

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$
$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v, \qquad \delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \delta v$$

y tomando en consideración las igualdades (α), hallaremos:

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \qquad (\text{II}^*)$$

Al fin, realizando la sustitución de las variables en la integral (III), hallaremos la expresión siguiente para el área σ del dominio Σ:

$$\sigma = \int_\Sigma dx\,dy = \iint_\Sigma \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv \iint_\Sigma \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\, du\,dv =$$
$$= \iint_\Sigma \sqrt{EG - F^2}\, du\,dv. \qquad (\text{III}^*)$$

De tal modo, obtuvimos tres fórmulas:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{I*}$$

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}, \tag{II*}$$

$$\sigma = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \tag{III*}$$

que expresan en un sistema de cualesquiera coordenadas longitudes, ángulos y áreas sobre el plano euclidiano. Contienen las fórmulas (I) — (III) y (I′) — (III′) como casos particulares.

Ahora es fácil notar que las expresiones para $\cos\varphi$ y σ se construyen de un modo bien determinado a partir de la forma cuadrática ds^2.

A saber, el numerador del segundo miembro de la fórmula (II*) es una forma bilineal que se obtiene mediante la polarización de la forma (I*), y bajo el signo del radical en la integral de la fórmula (III*) está nada menos que el discriminante de la forma (I*).

Por consiguiente, la métrica del plano euclidiano en cada sistema de coordenadas se determina por la forma cuadrática (I*), la cual, por esta razón, se llama *métrica*.

Las investigaciones de los matemáticos y los mecánicos del siglo XIX revelaron que los sistemas geométricos, en los cuales la medición de las magnitudes, lo mismo que sobre el plano euclidiano, se determina analíticamente por la forma diferencial CUADRÁTICA, resultan ser un fenómeno bien general en la geometría. Precisamente, estos sistemas son los que constituyen el objeto de la Geometría diferencial. Por ejemplo, el cálculo de longitudes, ángulos y áreas sobre cada superficie del espacio euclidiano, como lo sabemos de la teoría de las superficies (a su debido tiempo, lo haremos recordar detalladamente al lector), se efectúa mediante las fórmulas de la misma estructura que las (I*) — (III*).

Nuestro objetivo inmediato es demostrar que en la referida clase de sistemas geométricos se incluye *la geometría no euclidiana de Lobachevski*, es decir, que *en esta geometría también la métrica se determina por cierta forma diferencial cuadrática*.

2. Cálculo de la distancia entre dos puntos en el plano de Lobachevski

§ 216. Con la intención de investigar el carácter geométrico diferencial de la métrica del plano de Lobachevski, ante todo, tenemos que deducir una fórmula que exprese la distancia entre dos puntos a través de sus coordenadas (en algún sistema de coordenadas suficientemente cómodo).

La fórmula (I) del § 215 expresa la distancia euclidiana entre dos puntos mediante sus coordenadas cartesianas; en la base de esta fórmula subyace el teorema de Pitágoras.

La geometría no euclidiana de Lobachevski desconoce el teorema de Pitágoras, y la obtención de un teorema parecido a él, es bastante complicada; además, los sistemas de coordenadas que puedan introducirse sobre el plano de Lobachevski por analogía con el cartesiano, aquí resultan no muy cómodos en muchos conceptos para el manejo.

Por eso no emprenderemos el desarrollo de la teoría sintética de Lobachevski, sino que optaremos por otra vía que conduce directamente a la solución del problema planteado. Hagamos una reserva previa de que, en este caso, el plano de Lobachevski será considerado no separadamente, sino como un objeto del espacio de Lobachevski.

Denotemos el plano sujeto al examen (en el espacio de Lobachevski) con la letra α, señalando algún punto O sobre este plano.

Existen dos orisferas que tocan el plano α en el punto O (se encuentran en lados diferentes con respecto al plano α); elijamos alguna de ellas, denotándola con la letra Σ. Todo lo que si-

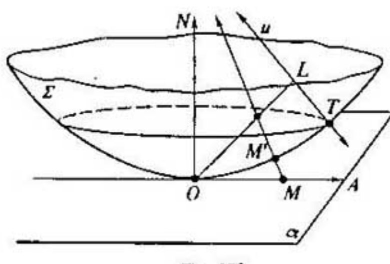


Fig. 159

gue a continuación está basado en que la geometría elemental de la orisfera Σ es la geometría de Euclides (§ 47).

Ahora vamos a establecer cierta aplicación especial del plano α en la orisfera Σ. Precisamente, hagamos que a un punto arbitrario M del plano α le corresponda un punto M' de la oriesfera Σ, en el cual ésta se interseca con la recta que pasa por M paralelamente a la perpendicular trazada a α en el punto O (fig. 159; la dirección de paralelismo se supone establecida hacia el mismo sentido desde el plano α en que está situada la orisfera Σ). Fácilmente se comprende que las imágenes de todos los puntos del plano α no llenan la orisfera Σ por completo; trataremos de determinar el dominio que llenan.

En el plano α consideremos alguna recta OA que pase por el punto O; sea ON la perpendicular al plano α en el punto O (el punto N se encuentra en el mismo lado respecto a α que la orisfera Σ). En la bisectriz del ángulo AON, tracemos un segmento l de modo que le corresponde un ángulo de paralelismo $\Pi(l) = \frac{\pi}{4}$; denotemos con la letra L el extremo de dicho segmento.

Debido a la elección de la magnitud de l, la recta u perpendicular al segmento OL en su extremo L y perteneciente al plano del ángulo AON, será paralela con respecto al rayo OA hacia un lado, y lo será con respecto al ON hacia el otro (fig. 159). Como la recta u es paralela a ON, es el eje de la orisfera Σ y, por consiguiente, interseca Σ en cierto punto T. Ahora, en el rayo OA, tomemos un punto arbitrario M (distinto al O), trazando a través de él un rayo paralelo con respecto a ON. Este rayo pasa por el plano AON entre las rectas paralelas TL y ON. Por consiguiente, el punto M', en el cual el mismo atraviesa el oriciclo OT, se halla entre los puntos O y T. Por otro lado, si tomamos un punto cualquiera P' en el oriciclo OT entre O y T, trazando a través del mismo una recta paralela a la ON, desde O hacia N, aquélla será paralela a la recta u en la misma dirección; en la otra dirección, esta recta se desviará de la recta u hacia el rayo OA, intersecándolo en un punto P. Esto significa que cada punto del oriciclo OT que se encuentre entre O y T es la imagen de un cierto punto perteneciente al rayo OA. Por fin, queda claro que el punto O corresponde a sí mismo. Así pues, las imágenes de todos los puntos del rayo OA llenan el arco del oriciclo OT con un extremo excluido T.

De aquí concluimos directamente que las imágenes de todos los puntos del plano α llenan sobre la orisfera Σ un dominio «cubierto» por el arco OT (con el extremo T excluido) al girar éste alrededor de la recta ON.

Desde el punto de vista de la geometría, sobre la orisfera este dominio constituye nada más que el recinto interior del círculo k, cuyo centro es el punto O, y cuyo radio es el arco del oriciclo OT. *El arco OT se llama radio de curvatura del espacio de Lobachevski.* Si elegimos algún arco del oriciclo por concepto de la unidad de medida de las longitudes sobre la orisfera Σ, entonces la longitud del arco OT se expresará por un cierto número R. *El número R* (con la escala elegida) *lo llamaremos también radio de curvatura.*

Comparemos cierta parte determinada del espacio con la escala elegida; o sea, por ejemplo, el dominio interior de la esfera E, cuyo radio es igual a la distancia entre los extremos del arco de escala del oriciclo. El número $\frac{1}{R}$ puede estimarse como «medida de lo no euclidiano» del espacio dentro de E. Precisamente, cuanto más es R, tanto menos se diferencia el espacio de Lobachevskí dentro de E del euclidiano. El sentido exacto de esta última aserción consiste en lo siguiente: si x es cualquier segmento que se halla dentro de E, el ángulo del paralelismo $\Pi(x)$ tiende uniformemente a $\frac{\pi}{2}$ para $R \to \infty$ (véase el § 230).

En el caso límite de $R = \infty$ el círculo k se extiende sobre toda la orisfera Σ, pero entonces la orisfera Σ coincide con el plano α, resultando euclidiano el espacio.

Introduzcamos en la orisfera Σ un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas $(x'; y')$ con el origen en el punto O y la escala ya elegida antes. En estas coordenadas la frontera del círculo k se representará con la ecuación

$$x'^2 + y'^2 = R.$$

Ahora estableceremos cierto sistema de coordenadas también sobre el plano de Lobachevski α. Esto es, con cada punto M del plano α, compararemos, por concepto de coordenadas, dos números

$$x = \frac{x'}{R}, \quad y = \frac{y'}{R},$$

donde x', y' son las coordenadas cartesianas de la imagen M' del referido punto sobre la orisfera Σ.

De lo antecedente se deduce que las coordenadas de cualquier punto del plano α satisfacen la desigualdad

$$x^2 + y^2 < 1;$$

recíprocamente, si dos números x, y dados con anterioridad satisfacen tal desigualdad, entonces sobre el plano α existe un punto (exactamente uno), cuyas coordenadas son los mismos números x, y dados. *Los números x, y se llaman coordenadas beltramianas del punto M.*

§ 217. Ahora precisemos nuestro problema y lo formulemos del modo siguiente: *dedúzcase una fórmula que exprese la distancia entre dos puntos $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2; y_2)$ del plano α a partir de sus coordenadas beltramianas x_1, y_1 y x_2, y_2 dadas.*

Para la comodidad del lector, la deducción de la fórmula requerida está dividida en etapas.

1. En el párrafo antecedente establecimos cierta aplicación especial del plano α sobre el interior del círculo k de la orisfera Σ. Esta aplicación posee la siguiente propiedad, sobre la cual se asientan todas las conclusiones que siguen: las imágenes de los puntos de una recta arbitraria perteneciente al plano α constituyen el arco de cierto oriciclo dentro del círculo k. En efecto, al construir la imagen del punto M perteneciente al plano α, trazamos a través de M un rayo paralelo al ON, hasta intersecar la oriesfera Σ (véase la fig. 159); el punto de intersección M' no es sino la imagen del punto M. Sea dada una recta arbitraria a en el plano α. Tracemos un rayo paralelo al ON a través de cada uno de sus puntos; todos los rayos trazados pertenecen a un plano λ paralelo al rayo ON, llenando cierta franja en este plano. Además, todos los rayos trazados son normales de la orisfera Σ; luego, el plano λ interseca normalmente la orisfera Σ. Mas, la sección normal de la orisfera Σ por el plano λ es un oriciclo, cuya porción que está dentro de k, constituye el conjunto de imágenes de todos los puntos de la recta a. Así pues, las imágenes de todos los puntos de una recta arbitraria a perteneciente al plano α constituyen el arco de un oriciclo, lo cual se afirmaba.

2. Consideremos algún movimiento del plano α sobre sí mismo, es decir, una aplicación del plano α sobre sí mismo tal que la distancia entre sus dos puntos cualesquiera sea igual a la

que separa sus imágenes. Anotemos simbólicamente esta aplicación en forma de $M^* = \varphi(M)$, donde M es un punto arbitrario del plano α, M^* es su imagen; anotemos simbólicamente también en forma de $M' = \psi(M)$ la aplicación antes considerada del plano α sobre el interior del círculo k de la orisfera Σ. Dos aplicaciones $M^* = \varphi(M)$ y $M' = \psi(M)$ inducen la aplicación $M'^* = \chi(M')$ del interior del círculo k sobre sí mismo; aquí, M' es un punto arbitrario que se halla dentro del círculo k, M'^* es su imagen, además, $M'^* = \chi(M') = \psi(M^*)$, $M^* = \varphi(M)$, $M = \psi^{-1}(M')$, donde ψ^{-1} es un símbolo que denota una aplicación inversa a la aplicación ψ. En otros términos, al moverse los puntos del plano α, se desplazan sus imágenes sobre la orisfera Σ; este desplazamiento viene representado por la anotación simbólica $M'^* = \chi(M')$.

Ahora, hagamos constar que al moverse $M^* = \varphi(M)$, los puntos situados en alguna recta perteneciente al plano α pasan a puntos situados también en una recta; en resumen: al moverse el plano α sobre sí mismo, todos sus puntos pasan también a rectas. A continuación, como hemos establecido en el punto anterior, al aplicarse $M' = \psi(M)$, los puntos situados en cualquier recta perteneciente al plano α, pasan a puntos que forman el arco del oriciclo dentro de k; en resumen: al aplicarse $M' = \psi(M)$ del plano α sobre el círculo k, las rectas del referido plano pasan a arcos de oriciclos. Comparando estas dos circunstancias, concluimos que al aplicarse sobre sí mismo $M'^* = \chi(M')$ del círculo k, todos los arcos de los oriciclos ubicados dentro de k, pasan también a arcos de oriciclos.

Desde el punto de vista de la geometría elemental de la orisfera Σ, la cual es la geometría de Euclides, los oriciclos son rectas. Teniéndolo en cuenta, podemos enunciar del modo siguiente la conclusión antecedente: mediante la aplicación de $M'^* = \chi(M')$, el interior del círculo k se aplica sobre sí mismo de suerte que todas las cuerdas del círculo k vuelven a pasar a cuerdas.

3. Determinemos la relación compleja de cuatro puntos de un oriciclo del mismo modo que se determina la relación compleja de cuatro puntos de la recta de Euclides (véase el § 137, la fórmula (*)).

Sean $M_1'M_2'$ dos puntos arbitrarios situados sobre la orisfera Σ dentro del círculo k, $M_1'^*M_2'^*$, sus imágenes respecto a la aplicación χ; sean P', Q' y P'^*, Q'^* puntos, en los cuales los oriciclos $M_1'M_2'$ y $M_1'^*M_2'^*$ cortan la circunferencia k, denotados de modo que el orden de sucesión de los puntos P', Q', M_1', M_2' en el oriciclo $M_1'M_2'$ es similar al de los puntos P'^*, Q'^*, $M_1'^*$, $M_2'^*$ en el oriciclo $M_1'^*M_2'^*$. Entonces

$$(P'^*Q'^*M_1'^*M_2'^*) = (P'Q'M_1'M_2'),$$

es decir, la relación compleja de los puntos P'^*, Q'^*, $M_1'^*$, $M_2'^*$ es igual a la de los P', Q', M_1', M_2' (véase el § 138).

4. Este último resultado es la llave para solucionar nuestro problema.

Estamos buscando una fórmula que permita calcular la distancia entre los puntos arbitrarios M_1 y M_2 pertenecientes al plano α, si se conocen sus coordenadas beltramianas.

Consideremos las imágenes M_1' y M_2' de los puntos M_1 y M_2 para la aplicación $M' = \psi(M)$ del plano α sobre el interior del círculo k de la orisfera Σ (véase el punto 2). Tracemos sobre Σ un oriciclo a través de M_1' y M_2', designando con P' y Q' los puntos de intersección del mismo con la frontera del círculo k. Sea $(P'Q'M_1'M_2')$ la relación compleja de los puntos P', Q', M_1', M_2' que se determina en el sentido euclidiano ordinario sobre la orisfera Σ.

Afirmamos *que la distancia entre dos puntos tomados arbitrariamente M_1, M_2 sobre el plano de Lobachevski α, se expresa con la fórmula*

$$\rho(M_1, M_2) = c\,|\ln (P'Q'M_1'M_2')|, \qquad (*)$$

donde c es una constante positiva, cuya elección corresponde a la de la escala.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, hagamos notar que $\rho(M_1, M_2) > 0$, si los puntos M_1 y M_2 son diferentes. En rigor, si M_1 y M_2 son puntos diferentes, entonces $\dfrac{P'M_1'}{M_1'Q'} \neq \dfrac{P'M_2'}{M_2'Q_1}$, por con-

siguiente, $(P'Q'M_1'M_2') \neq 1$ y $\ln(P'Q'M_1'M_2') \neq 0$. A continuación establecemos los siguientes hechos.

1) Pasen a M_1^*, M_2^* los puntos M_1, M_2 para algún movimiento $M^* = \varphi(M)$ del plano α sobre sí mismo. A los puntos M_1, M_2, M_1^*, M_2^* del plano α les corresponden sobre la orisfera Σ los puntos M_1', M_2', $M_1'^*$, $M_2'^*$, y al movimiento $M^* = \varphi(M)$ le corresponde la aplicación $M'^* = \chi(M')$ del círculo k sobre sí mismo, la cual hace pasar M_1', M_2' a $M_1'^*$, $M_2'^*$. Denotemos, como se hizo más arriba, con P', Q' los puntos de intersección del oriciclo $M_1'M_2'$ con la frontera del círculo k; análogamente, mediante los puntos $M_1'^*M_2'^*$ determinaremos los puntos P'^*, Q'^*. Si las notaciones P', Q' y P'^*, Q'^* están concordadas idóneamente, entonces, a base del punto 3 tenemos la igualdad de relaciones complejas

$$(P'^*Q'^*M_1'^*M_2'^*) = (P'Q'M_1'M_2').$$

De aquí se desprende de inmediato la igualdad $\rho(M_1^*, M_2^*) = \rho(M_1, M_2)$.

2) En la recta M_1M_2 tomemos un tercer punto M_3 de forma que el punto M_2 esté entre M_1 y M_3. Sobre la orisfera Σ, a los puntos M_1, M_2, M_3 les corresponden los puntos M_1', M_2', M_3' situados en un mismo oriciclo, hallándose M_2' entre M_1' y M_3'. Tengan el viejo sentido los símbolos P' y Q'; supondremos solamente que en el oriciclo $M_1'M_2'M_3'$ la dirección $P'Q'$ es contraria a la de $M_1'M_2'M_3'$. Para esta última condición resultará $\dfrac{P'M_1'}{M_1'Q'} > \dfrac{P'M_2'}{M_2'Q'}$, por consiguiente, $(P'Q'M_1'M_2') > 1$ y del mismo modo

$$(P'Q'M_2'M_3') < 1, \qquad (P'Q'M_1'M_3') < 1.$$

Escribamos las igualdades

$$(P'Q'M_1'M_3') = \frac{P'M_1'}{M_1'Q'} : \frac{P'M_3'}{M_3'Q'} = \left(\frac{P'M_1'}{M_1'Q'} : \frac{P'M_2'}{M_2'Q'}\right) \cdot \left(\frac{P'M_2'}{M_2'Q'} : \frac{P'M_3'}{M_3'Q'}\right) =$$

$$= (P'Q'M_1'M_2')(P'Q'M_2'M_3').$$

De aquí $\quad \ln(P'Q'M_1'M_3') = \ln(P'Q'M_1'M_2') + \ln(P'Q'M_2'M_3')$.

Como todas las relaciones complejas sujetas a consideración son superiores a uno, serán positivos sus logaritmos y, consiguientemente, coincidirán con sus magnitudes absolutas. De suerte, podemos apuntar

$$|\ln(P'Q'M_1'M_3')| = |\ln(P'Q'M_1'M_2')| + |\ln(P'Q'M_2'M_3')|$$

lo que conduce a la igualdad

$$\rho(M_1M_3) = \rho(M_1M_2) + \rho(M_2M_3).$$

3) Sea asignado cierto segmento E_1E_2 como unidad de longitud. Dado que E_1, E_2 son puntos diferentes, entonces $c_1 = |\ln(P_e'Q_e'E_1'E_2')| > 0$ (aquí P_e', Q_e' son puntos de intersección del oriciclo $E_1'E_2'$ con la frontera del círculo k). Si en la fórmula (*) suponemos $c = \dfrac{1}{c_1}$, obtendremos:

$$\rho(E_1E_2) = 1.$$

Así pues, la fórmula (*) atribuye un determinado número positivo a cada segmento, y

1) a segmentos iguales les corresponden números iguales;

2) si M_2 es un punto del segmento M_1M_3 y a los segmentos M_1M_2 y M_2M_3 les corresponden los números $\rho(M_1M_2) = a$, $\rho(M_2M_3) = b$, entonces al segmento M_1M_3 le corresponde el número $\rho(M_1M_3) = a + b$;

3) a cierto segmento E_1E_2 le corresponde un número igual a 1.

Mas, estas condiciones determinan unívocamente la longitud del segmento (véase el § 20). Con esto mismo queda demostrado que la fórmula (*) expresa la longitud del segmento M_1M_2.

Con esto termina la parte de principio de la deducción de la fórmula que estamos buscando; todo lo que sigue se reduce a cálculos elementales.

5. Al igual que en el § 216, designaremos con x, y las coordenadas beltramianas del punto M perteneciente al plano α, con x', y', las coordenadas cartesianas de su imagen M' sobre la orisfera Σ; al mismo tiempo, $x' = Rx$, $y' = Ry$.

Sobre el plano α, junto con los puntos dados $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, la distancia entre los cuales tenemos que expresarla, consideremos sus imágenes $M_1'(x_1'; y_1')$, $M_2'(x_2'; y_2')$ sobre Σ. Sea $M'(x'; y')$ un punto arbitrario del oriciclo $M_1'M_2'$; suponiendo $\dfrac{M_1'M'}{M'M_2} = \lambda$, obtendremos las relaciones conocidas

$$x' = \frac{x_1' + \lambda x_2'}{1 + \lambda}, \qquad y' = \frac{y_1' + \lambda y_2'}{1 + \lambda}. \tag{1}$$

Sean $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$ los valores del parámetro λ, para los cuales el punto M' acierta P' y Q' en la frontera del círculo k; tenemos

$$(P'Q'M_1'M_2') = \frac{P'M_1'}{M_1'Q'} : \frac{P'M_2'}{M_2'Q'} = \frac{M_1'P'}{P'M_2'} : \frac{M_1'Q'}{Q'M_2'} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Para hallar λ_1, λ_2, hay que sustituir los segundos miembros de las igualdades (1) en la ecuación de la frontera del círculo k

$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

y resolver la ecuación cuadrática obtenida respecto a λ. Al efectuar esta sustitución y al pasar a las coordenadas beltramianas de los puntos dados, obtenemos:

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 - (1 + \lambda)^2 = 0;$$

suponiendo aquí, para la brevedad,

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - 1 &= \Omega_{11}, \\ x_1x_2 + y_1y_2 - 1 &= \Omega_{12}, \\ x_2^2 + y_2^2 - 1 &= \Omega_{22}, \end{aligned}$$

escribiremos la última ecuación en forma de

$$\Omega_{22}\lambda^2 + 2\Omega_{12}\lambda + \Omega_{11} = 0,$$

de donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{22}}.$$

Para la numeración adecuada de los radicales λ_1, λ_2 obtenemos:

$$(P'Q'M_1'M_2') = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{12}\Omega_{22}}} < 1^{*)}.$$

Por consiguiente,

$$\rho(M_1, M_2) = c \ln \frac{\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}. \tag{2}$$

Esta es la fórmula buscada. Haremos sólo un paso más, a saber, impondremos una determinada condición sobre la elección de la constante c. Es que a su tiempo supusimos establecida cierta escala sobre la orisfera Σ; además, introdujimos una escala sobre el plano α. Mientras

---

*) Aquí hay que tener en cuenta que todas las magnitudes Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{22} son negativas.

que no esté recíprocamente condicionada del todo la elección de estas dos escalas, sigue indeterminada la constante c.

La elección de las escalas quedará sujeta a la siguiente condición. Sea M un punto arbitrario sobre el plano α, M', su imagen sobre la orisfera Σ; supongamos que el punto M se aproxima hacia el punto O según una recta, entonces el punto M' irá aproximándose hacia el punto O según un oriciclo. Exigiremos la igualdad

$$\lim_{M \to O} \frac{OM}{OM'} = 1,$$

donde OM es la longitud del segmento rectilíneo, OM', la del arco del oriciclo. A esta condición determinaremos la constante c. Para comodidad de los cálculos, consideremos que el punto M' pertenece al eje Ox' del sistema cartesiano de la orisfera Σ. Entonces

$$OM' = x' = Rx, \quad OM = \rho(O, M) = c \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

[nos valemos de la fórmula (2) suponiendo $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = x$, $y_2 = 0$] y, por consiguiente,

$$\lim_{M \to O} \frac{OM}{OM'} = \lim_{x \to O} \frac{c}{Rx} \ln \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{2c}{R} = 1;$$

de aquí $c = \frac{R}{2}$.

La fórmula que expresa la distancia no euclidiana entre dos puntos mediante sus coordenadas beltramianas, obtiene la forma de

$$\rho(M_1, M_2) = \frac{R}{2} \ln \frac{\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}} \tag{3}$$

§ 218. Ahora queremos dar una descripción del sistema de coordenadas beltramianas que no tenga que ver con el espacio circundante.

Por ahora, partamos de la consideración del sistema cartesiano sobre la orisfera Σ, como se hizo en el § 216, donde las coordenadas beltramianas fueron introducidas por primera vez.

Sean Ox' y Oy' dos oriciclos que sirven de ejes a un sistema cartesiano de la orisfera Σ (fig. 160). Al aplicarse el plano α sobre la orisfera Σ, los oriciclos Ox' y Oy' tienen como sus preimágenes dos rectas recíprocamente perpendiculares pertenecientes al plano α, que pasan por el punto O; las designaremos con los símbolos Ox y Oy. Sobre el plano α, dentro del ángulo formado por las direcciones positivas de las rectas Ox y Oy, tomemos un punto arbitrario M con las coordenadas beltramianas x, y; sobre la orisfera Σ su imagen M' tiene coordenadas cartesianas (positivas) $x' = Rx$, $y' = Ry$. Bajemos una perpendicular del punto M a la recta Ox y designemos su base con M_x. Tracemos un rayo del punto M_x, paralelo al ON (ON posee el mismo sentido que en el § 216); designemos con el símbolo M_x' el punto de su intersección con la orisfera Σ. Ahora hagamos constar que 1) el punto M_x' pertenece al oriciclo Ox', precisamente, a su parte positiva; 2) los puntos M, M', M_x, M_x' yacen en un mismo plano; 3) la recta MM_x es perpendicular al plano NOM_x, por consiguiente, el plano $MM'M_xM_x'$ que pasa por ella, también es perpendicular al plano NOM_x; 4) esta última circunstancia permite concluir que el arco del oriciclo $M'M_x'$ es perpendicular al oriciclo Ox'. Así pues, el punto M_x' correspondiente, según la construcción, al punto M_x sobre la orisfera Σ, desde el punto de vista de la geometría de la orisfera, es la base de la perpendicular bajada del punto M' al eje Ox'. De manera análoga se construyen los puntos My y My' sobre Oy y Oy' (el cuadro general de nuestras construcciones aparece en la fig. 160). A base de lo expuesto tenemos:

$$OM_x' = x' = Rx, \qquad OM_y' = y' = Ry.$$

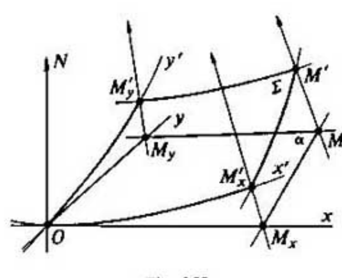


Fig. 160

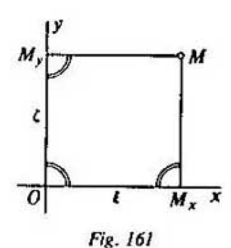


Fig. 161

Pongamos

$$OM_x = \xi, \qquad OM_y = \zeta$$

y expresemos estas magnitudes a través de x e y. Hallemos ξ; la otra magnitud ζ se hallará análogamente. Como conocemos las coordenadas cartesianas del punto M'_x, que son x' y 0, conocemos también las beltramianas del punto M_x: x y 0. De este modo, para determinar ξ es suficiente aplicar la fórmula (3) del § 217, suponiendo en ella $x_1 = 0, y_1 = 0$ y $x_2 = 0, y_2 = 0$. Obtenemos:

$$\xi = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x};$$

del mismo modo hallaremos:

$$\zeta = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}.$$

La inversión de estas igualdades nos da las expresiones de las coordenadas beltramianas que necesitamos:

$$x = \operatorname{th} \frac{\xi}{R}, \quad y = \operatorname{th} \frac{\zeta}{R}; \tag{1}$$

aquí th es un símbolo que denota la tangente hiperbólica. Al deducir estas fórmulas, suponíamos positivos los números x, y, ξ y ζ, pero si por ξ y ζ se sobreentienden los segmentos OM_x y OM_y con la consideración del signo según la regla corriente, entonces las fórmulas (1) expresarán las coordenadas beltramianas para cualquier posición del punto M. Esto se desprende de que la tangente hiperbólica es una función impar, es decir, $\operatorname{th}(-\alpha) = -\operatorname{th}\alpha$.

Ahora tenemos la posibilidad de descubrir las coordenadas beltramianas, haciendo abstracción absoluta del espacio que circunda el plano: *sobre un plano se eligen dos ejes recíprocamente perpendiculares Ox y Oy y una escala; de un punto arbitrario M se baja la perpendicular MM_x al eje Ox, bajándose la MM_y al eje Oy* (fig. 161). *Así pues, quedan determinados dos números $OM_x = \xi$ y $OM_y = \zeta$. Las coordenadas beltramianas del punto M son los números*

$$x = \operatorname{th}\frac{\xi}{R}, \quad y = \operatorname{th}\frac{\zeta}{R}.$$

Si deseamos construir un punto a base de coordenadas beltramianas prefijadas x, y, primero tenemos que hallar los segmentos ξ y ζ, trazándolos luego en los ejes correspondientes, a partir del origen de las coordenadas y, al fin, levantar perpendiculares a los ejes, desde los

extremos de los segmentos trazados; la intersección de dichas perpendiculares determinará el punto de las coordenadas dadas x, y.

Las referidas perpendiculares tendrán un punto de intersección si, y sólo si, los números dados x, y satisfacen la desigualdad

$$x^2 + y^2 < 1;$$

la observancia de esta desigualdad, según sabemos, es necesaria y suficiente para que los números x, y sean coordenadas beltramianas de algún punto perteneciente al plano de Lobachevski (véase el § 216).

Es notable que en las coordenadas beltramianas la recta es determinada por una ecuación de primer grado. En rigor, sea u cierta recta perteneciente al plano α, M, un punto variable de dicha recta, con coordenadas beltramianas instantáneas x, y. Sobre la orisfera Σ, la imagen de u es el oriciclo u', la imagen del punto M es el punto M' con coordenadas cartesianas x', y'. Ya que en la geometría de la orisfera el oriciclo u' juega el papel de una recta, en las coordenadas cartesianas le corresponde una ecuación de primer grado

$$A'x' + B'y' + C' = 0.$$

En esta ecuación, suponiendo $x' = Rx$, $y' = Ry$ e introduciendo las magnitudes $A'R = A$, $B'R = B$, $C' = C$, obtenemos la ecuación de la curva dada:

$$Ax + By + C = 0.$$

Vemos que ésta es una ecuación de primer grado (con una condición complementaria: $x^2 + y^2 < 1$).

§ 219. Algo más tarde nos veremos obligados a ocuparnos de la transformaión de coordenadas beltramianas.

Sean dados sobre el plano de Lobachevski dos sistemas de coordenadas beltramianas (para la simplicidad, supongamos que tienen una misma escala). El punto arbitrario M perteneciente al plano, en uno de los sistemas tiene coordenadas $(x; y)$, en el otro, $(\bar{x}; \bar{y})$; las magnitudes $(\bar{x}; \bar{y})$ son funciones de x, y. Nos importará saber que estas funciones 1) son diferenciables continuamente, 2) tienen un jacobiano diferente de cero.

Demostrémoslo. Realicemos un movimiento del plano sobre sí mismo, que haga coincidir las nuevas coordenadas del eje con los viejos ejes. En este caso, el punto M pasará al punto $M^* = \varphi(M)$. No es difícil comprender que las viejas coordenadas (x^*, y^*) del punto M^* son iguales a las nuevas del punto M. De tal modo,

$$x^* = \bar{x}, \qquad y^* = \bar{y}.$$

Veamos de nuevo la aplicación conocida del plano sobre la orisfera Σ que toca el plano en el origen de las viejas coordenadas. El movimiento de $M^* = \varphi(M)$ induce la aplicación sobre sí mismo del interior del círculo k de la orisfera Σ; al igual que antes, lo anotaremos simbólicamente en forma de $M'^* = \chi(M')$.

La aplicación $M'^* = \chi(M')$ hace que las cuerdas del círculo k vuelvan a ser cuerdas. De aquí y a base del § 138 concluimos que en el sistema de coordenadas cartesianas (x', y'), el cual, sobre Σ, corresponde al sistema beltramiano (x, y) del plano dado, esta aplicación viene representada por las fórmulas de tipo de

$$\left.\begin{aligned} x'^* &= \frac{a_1'x' + b_1'y' + c_1'}{\alpha'x' + \beta'y' + \gamma'}, \\ y'^* &= \frac{a_2'x' + b_2'y' + c_2'}{\alpha'x' + \beta'y' + \gamma'}, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

a condición de que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Valiéndonos de las relaciones $x' = Rx$, $y' = Ry$, $x'^* = Rx^* = R\bar{x}$, $y'^* = Ry^* = R\bar{y}$, de las fórmulas (*) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a'_1Rx + b'_1Ry + c'_1}{\alpha' R^2x + \beta' R^2y + \gamma' R}, \\ y &= \frac{a'_2Rx + b'_2Ry + c'_2}{\alpha' R^2x + \beta' R^2y + \gamma' R}. \end{aligned}\right\} \qquad (^{**})$$

Introduzcamos nuevas designaciones de coeficientes, suponiendo que

$$\begin{aligned} a'R &= a_1, & b'_1R &= b_1, & c'_1 &= c_1, \\ a'_2R &= a_2, & b'_2R &= b_2, & c'_2 &= c_2, \\ \alpha' R^2 &= \alpha, & \beta' R^2 &= \beta, & \gamma' R &= \gamma. \end{aligned}$$

Entonces las fórmulas (**) tendrán la forma de

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \\ \bar{y} &= \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \end{aligned}\right\} \qquad (^{***})$$

siendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

(pues $\Delta = R^3\Delta'$ y $\Delta' \neq 0$). Las fórmulas (***) surten las expresiones de las nuevas coordenadas beltramianas de un punto arbitrario M mediante sus viejas coordenadas beltramianas (en estas fórmulas, los coeficientes $a_1, b_1, \ldots, \gamma$ dependen de cómo están situados los nuevos ejes respecto a los viejos). Ahora, cerciorémonos de que las fórmulas (***) tienen sentido para todos los valores admisibles de las coordenadas beltramianas, es decir, para todos los valores de x, y que satisfagan la condición de $x^2 + y^2 < 1$. Efectivamente, si para $x_0^2 + y_0^2 < 1$ resultara $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$, entonces para los valores de x, y bastante próximos a x_0y_0 que satisfagan las condiciones $x^2 + y^2 < 1$, $\alpha x + \beta y + \gamma \neq 0$, los valores correspondientes de x, y podrían ser tan grandes como se quiera; mas, esto es imposible a causa de la desigualdad $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 < 1$.

Así pues, $\bar{x}, \bar{y}$ se expresan a través de x, y mediante fracciones racionales, cuyos denominadores difieren de cero para cualesquiera valores admisibles de x, y.

De aquí se deduce que $\bar{x}, \bar{y}$ son diferenciables continuamente respecto a x, y en todos los puntos del plano de Lobachevski.

Luego, un cálculo no complicado conduce a la fórmula

$$D\left(\frac{\bar{x}, \bar{y}}{x, y}\right) = \frac{\Delta}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^3}.$$

De aquí concluimos que las funciones $\bar{x}, \bar{y}$ tienen un jacobiano diferente de cero en todos los puntos del plano de Lobachevski.

3. Forma métrica del plano de Lobachevski

§ 220. Ahora tenemos la posibilidad de establecer el resultado de principio prometido aún en el § 217: demostrar que la métrica del plano de Lobachevski se determina por una cierta forma cuadrática diferencial. Con este fin iremos buscando la expresión de la longitud del arco de una línea suave arbitraria. Los cálculos siguientes se basan en la fórmula (3) del § 217, que expresa la distancia entre dos puntos del plano de Lobachevski a través de las coordenadas beltramianas. A continuación representemos esta fórmula en cierta forma especial.

Sean M_1 y M_2 dos puntos del plano de Lobachevski. Denotemos con $(x; y)$ las coordenadas beltramianas del primer punto, con $(x + \Delta x; y + \Delta y)$, las del segundo; denotemos con $\Delta\rho$ la longitud del segmento M_1M_2. Supondremos infinitamente pequeñas las magnitudes Δx y Δy. Expresemos las magnitudes Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{22} que integran el segundo miembro de la fórmula (3) del § 217; tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{11} &= x^2 + y^2 - 1, \\ \Omega_{12} &= x^2 + y^2 - 1 + x\Delta x + y\Delta y, \\ \Omega_{22} &= x^2 + y^2 - 1 + 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

A consecuencia de la relación básica $x^2 + y^2 < 1$ que enlaza las coordenadas beltramianas de un punto arbitrario, todas estas magnitudes son negativas. De las relaciones (1) hallamos:

$$\begin{aligned} \Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22} &= (\Omega_{12} - \Omega_{11})^2 - \Omega_{11}(\Omega_{22} - 2\Omega_{12} + \Omega_{11}) = (x\Delta x + y\Delta y)^2 + \\ &+ (1 - x^2 - y^2)\cdot(\Delta x^2 + \Delta y^2) = (1 - y^2)\Delta x^2 + 2xy\Delta x\Delta y + (1 - x^2)\Delta y^2, \end{aligned} \tag{2}$$

de donde se ve que $\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}$ constituyen una magnitud positiva, infinitamente pequeña junto con Δx, Δy.

A base de la fórmula (3) del § 217 obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \frac{R}{2}\ln\frac{\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}} = \frac{R}{2}\ln\left(1 - \frac{2\sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}\right) = \\ &= R\,\frac{\sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{1 - x^2 - y^2} + \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y), \end{aligned} \tag{3}$$

donde α es una variable infinitésima de orden superior respecto a $\sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}$. Las igualdades (3) y (2) nos suministran el aspecto especial de la fórmula (3) del § 217, que necesitamos:

$$\Delta\rho = R\,\frac{\sqrt{(1 - y^2)\Delta x^2 + 2xy\Delta x\Delta y + (1 - x^2)\Delta y^2}}{1 - x^2 - y^2} + \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y), \tag{4}$$

del cual ya se deduce fácilmente la expresión de la longitud del arco.

Sea determinada alguna línea por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Al variar t en el segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$, un punto arbitrario describe cierto arco A_0A de la línea, de forma que para $t = t_0$ el punto variable coincide con el origen del arco A_0 y si $t = T$ con el extremo del arco A. Si las funciones $x(t)$ e $y(t)$, junto con sus derivadas de primer orden, son continuas en el segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$, y sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto del referido segmento, entonces llamaremos suave el arco A_0A *).

---

*) La condición de $\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^2}{dt}\right)^2 \neq 0$ aquí tiene el mismo sentido que en la Geometría diferencial euclidiana (véase *P. K. Rashevski*, Geometría diferencial (*П. К. Рашевский*, Дифференциальная геометрия)).

Es importante establecer que la suavidad de una línea no depende del sistema de coordenadas beltramianas a que pertenece. Con esta finalidad, consideremos una transformación arbitraria de las coordenadas beltramianas dadas en nuevas coordenadas beltramianas. Sean (x, y) y $(\bar{x}, \bar{y})$ viejas y nuevas coordenadas, respectivamente, de un punto arbitrario de un plano; $\bar{x}$, $\bar{y}$ son funciones de x, y:

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y), \qquad \bar{y} = \bar{y}(x, y).$$

En el § 219 mostramos que estas funciones son diferenciables continuamente y poseen un jacobiano diferente de cero. De aquí se desprenden la existencia y la continuidad de las derivadas $\frac{d\bar{x}}{dt}$, $\frac{d\bar{y}}{dt}$:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\partial\bar{y}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\bar{y}}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Luego, si $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son desiguales a cero a un mismo tiempo, entonces $\frac{d\bar{x}}{dt}$ y $\frac{d\bar{y}}{dt}$ tampoco pueden anularse a un mismo tiempo, pues

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\bar{x}}{\partial x} & \frac{\partial\bar{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial\bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial\bar{y}}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

De tal modo, la propiedad de suavidad sugerida para el sistema (x, y) se cumplirá también en el caso de cualquier otro sistema $(\bar{x}, \bar{y})$.

Al introducir el concepto de longitud del arco A_0A, procederemos del mismo modo que al determinar la longitud del arco de una línea en la geometría euclidiana. Partamos de manera arbitraria el segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$ con puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dispuestos en orden ascendente:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

En el arco A_0A, a cada punto t_i le corresponderá cierto punto A_i. Construyamos una quebrada $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A$, designando con σ su longitud. De tal modo, a cada división del segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$ le corresponde un cierto número positivo σ, o sea, la longitud de la quebrada correspondiente.

Ahora, imaginémonos que se opta por una sucesión de divisiones del segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$ tal que la longitud máxima de un segmento parcial de una división tiende a cero. Si la sucesión correspondiente de los números σ tiende a cierto límite s que no depende de la elección de la sucesión de divisiones del segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$, entonces el valor de este límite, es decir, el número s, lo llamaremos longitud del arco A_0A.

Pongamos

$$A_iA_{i+1} = \Delta\rho_i$$
$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \Delta x_i,$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \Delta y_i.$$

Entonces, conforme a la fórmula (4), la longitud de la quebrada se determinará por la igualdad

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\rho_i = R \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{(1 - y_i^2)(\Delta x_i)^2 + 2x_i y_i \Delta x_i \Delta y_i + (1 - x_i^2)(\Delta y_i)^2}{(1 - x_i^2 - y_i^2)^2}} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i).$$

Pasando al límite, de aquí hallamos:

$$s = R \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{(1 - y^2)x'^2 + 2xy\,x'y' + (1 - x^2)y'^2}}{1 - x^2 - y^2}\,dt, \tag{5}$$

donde las virgulillas denotan la diferenciación respecto a t *).

La existencia de la integral presente en el segundo miembro de la fórmula obtenida viene asegurada por la continuidad de las funciones $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$ e $y'(t)$. Supongamos ser variable el límite superior de la integral en la fórmula (5); entonces, el arco de la curva se expresará mediante esta fórmula como función de T:

$$s = s(T).$$

Al determinar la diferencial del arco, hallamos:

$$ds = R\frac{\sqrt{(1 - y^2)dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1 - x^2)dy^2}}{1 - x^2 - y^2}$$

ó

$$ds^2 = R^2\frac{(1 - y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1 - x^2)\,dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \tag{6}$$

De tal modo, *el cuadrado de la diferencial de un arco es la forma cuadrática de las diferenciales dx y dy.*

Introduzcamos las notaciones:

$$\frac{R^2(1 - y^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = E(x, y), \qquad \frac{R^2xy}{(1 - x^2 - y^2)^2} = F(x, y), \qquad \frac{R^2(1 - x^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = G(x, y). \tag{7}$$

Entonces (6) se apuntará en forma de

$$ds^2 = Edx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2. \tag{8}$$

---

*) Para demostrar que $\Sigma\alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i) \to 0$, basta notar que $\alpha_i = \alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i)$ tiene el segundo orden de infinitud respecto a $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Más exactamente, si toda la línea pertenece al dominio $1 - x^2 - y^2 > \varepsilon > 0$, entonces la relación $\left|\frac{\alpha_i}{\Delta t_i^2}\right|$ por arriba está acotada por un número que depende de ε y de las cotas superiores de las magnitudes $|x'(t)|$, $|y'(t)|$. Esto deriva de la determinación de α_i conforme a la igualdad (3) y de la expresión Δx_i, Δy_i a través de Δt_i según la fórmula de Lagrange.

La forma cuadrática $E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$ determina la medición de las magnitudes de líneas sobre el plano de Lobachevski. Por ende, la llamamos *forma métrica del plano de Lobachevski*.

§ 221. Ahora establecemos la fórmula que exprese el ángulo entre dos líneas.

Como fue mostrado más arriba (véase el § 218), en las coordenadas beltramianas, una recta se determina por la ecuación de primer grado:

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Si algún punto $M_1(x_1, y_1)$ se halla sobre esta recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1), es decir, debe tener lugar

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \tag{2}$$

Sustrayendo término a término la igualdad (2) de la ecuación (1), obtenemos:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

donde $k = -\frac{A}{B}$.

En esta última ecuación, llamaremos a la magnitud *k parámetro director de una recta.*

El ángulo entre dos líneas arbitrarias, naturalmente, se define como ángulo entre sus tangentes. Como en las coordenadas beltramianas una recta se representa por una ecuación de primer grado, entonces la ecuación de una tangente en estas coordenadas tiene justamente la misma forma que la ecuación de una tangente en las coordenadas cartesianas del plano euclidiano, y su parámetro director se expresa justamente del mismo modo que el coeficiente angular de una tangente en la geometría de Euclides.

Efectivamente, sea dada una curva determinada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Tomemos en esta curva dos puntos M y M' correspondientes a dos valores del parámetro t y t'. La ecuación de la secante MM' en las coordenadas beltramianas, por lo visto, tiene forma de

$$\frac{X - \varphi(t)}{\varphi(t') - \varphi(t)} = \frac{Y - \psi(t)}{\psi(t') - \psi(t)}.$$

De aquí, dividiendo en $t' - t$ los denominadores de ambos miembros y pasando al límite para $t' \to t$, obtenemos la ecuación de una tangente en forma de

$$\frac{X - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{Y - \psi(t)}{\psi'(t)}$$

y el parámetro director

$$k = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{dy}{dx}.$$

Consideremos dos líneas cualesquiera, cuyas direcciones en un punto común $M(x, y)$ estén determinadas por los parámetros $k_1 = \frac{dy}{dx}$, $k_2 = \frac{\delta y}{\delta x}$. Demostraremos que el ángulo φ entre estas dos líneas se expresa mediante una fórmula exactamente de la misma estructura que la (II*) del § 215, que expresa el ángulo euclidiano en coordenadas arbitrarias; a saber,

$$\cos\varphi = \frac{E\,dx\,\delta x + F\,(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + G\,dy\,\delta y}{\sqrt{E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2}\sqrt{E\,\delta x^2 + 2F\delta x\,\delta y + G\,\delta y^2}}. \tag{3}$$

Ante todo, estableceremos que el segundo miembro de esta fórmula es un invariante en cuanto a la transformación de las coordenadas beltramianas.

Junto con el sistema de coordenadas (x, y), consideremos un nuevo sistema beltramiano $(\bar{x}, \bar{y})$, el origen y las direcciones de cuyos ejes son arbitrarios. Representemos la fórmula métrica del plano de Lobachevski en las nuevas coordenadas:

$$ds^2 = \bar{E}\,d\bar{x}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{x}\,d\bar{y} + \bar{G}\,d\bar{y}^2.$$

Como ds^2 no depende del sistema de coordenadas, debe tener lugar la identidad siguiente:

$$\bar{E}\,d\bar{x}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{x}\,d\bar{y} + \bar{G}\,d\bar{y}^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2. \tag{4}$$

Suponiendo que la relación entre las coordenadas viejas y nuevas se establece con las fórmulas

$$x = x(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = y(\bar{x}, \bar{y}),$$

sustituyamos estas expresiones de x e y a través de $\bar{x}, \bar{y}$ en el segundo miembro de la identidad; obtendremos:

$$\bar{E}\,d\bar{x}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{x}\,d\bar{y} + \bar{G}\,d\bar{y}^2 = \left[E\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right)^2 + 2F\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + G\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^2\right] d\bar{x}^2 +$$
$$+ 2\left[E\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + F\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right) + G\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\right] d\bar{x}\,d\bar{y} +$$
$$+ \left[E\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2F\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + G\left(\frac{y}{\bar{y}}\right)^2\right] dy^{-2}.$$

Más, $d\bar{x}$ y $d\bar{y}$ como diferenciales de variables independientes son magnitudes que varían arbitrariamente: por esto, los coeficientes de la forma diferencial cuadrática presente en el primer miembro de la última identidad, son iguales a los coeficientes correspondientes de la forma de su segundo miembro, es decir,

$$\left.\begin{aligned}
\bar{E} &= E\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right)^2 + 2F\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + G\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^2,\\
\bar{F} &= E\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + F\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right) + G\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}},\\
\bar{G} &= E\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2F\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + G\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\right)^2.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

El numerador del segundo miembro de la fórmula (3) constituye una forma bilineal

$$E\,dx\,\delta x + F\,(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + G\,dy\,\delta y,$$

es decir, una expresión homogénea, lineal respecto a cada uno de los sistemas de variables dx, dy y δx, δy. Fácilmente se ve que esta forma es invariante respecto a la transformación de las coordenadas de Beltrami, es decir,

$$\bar{E}\,d\bar{x}\,\delta\bar{x} + \bar{F}(d\bar{x}\,\delta\bar{y} + d\bar{y}\,\delta\bar{x}) + \bar{G}\,d\bar{y}\,\delta\bar{y} = E\,dx\,\delta x + F\,(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + G\,dy\,\delta y\,. \tag{5a}$$

En efecto, sustituyendo las magnitudes $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ por las expresiones (5) en el primer miembro y valiéndonos de las igualdades

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}d\bar{y}, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}d\bar{y}, \tag{5b}$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\delta\bar{x} + \frac{\partial x}{'\partial \bar{y}}\delta y, \qquad \delta y = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\delta\bar{x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\delta\bar{y}, \tag{5c}$$

después de transformaciones simples, obtendremos el segundo miembro de la igualdad (5a), con esto mismo dejaremos demostrada la validez de dicha igualdad, No obstante, la igualdad (5a) puede obtenerse fácilmente, sin enterarnos de cómo se expresen $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ mediante E, F, G para la condición (4), es decir, sin acudir a las fórmulas (5). Es que la igualdad (4) se observa idénticamente, cualesquiera que sean $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, como consecuencia de las fórmulas (5b). Por ende, (o, si se quiere, a consecuencia de las fórmulas (5c)) tenemos

$$\bar{E}\,\delta\bar{x}^2 + 2\bar{F}\,\delta\bar{x}\,\delta\bar{y} + \bar{G}\,\delta\bar{y}^2 = E\,\delta x^2 + 2F\,\delta x\,\delta y + G\,\delta y^2, \tag{4a}$$

así también

$$\bar{E}\,(d\bar{x} + \delta\bar{x})^2 + 2\bar{F}\,(d\bar{x} + \delta\bar{x})(d\bar{y} + \delta\bar{y}) + \bar{G}\,(d\bar{y} + \delta\bar{y})^2 =$$
$$= E\,(dx + \delta x)^2 + 2F\,(dx + \delta x)(dy + \delta y) + G\,(dy + \delta y)^2. \tag{4b}$$

Sustrayendo (4) y (4a) de (4b), obtenemos (5a).

Hemos demostrado la invariación del numerador del segundo miembro de la fórmula (3). La invariación del denominador se expresa por las igualdades (4) y (4a).

Así pues, el segundo miembro de la fórmula (3) constituye un invariante en cuanto a la variación de las coordenadas beltramianas.

Sea dado un punto M con las coordenadas beltramianas x, y dos líneas que pasen por el mismo, con los parámetros directores

$$k_1 = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Para establecer que la fórmula (3) determina el ángulo entre las líneas dadas, introduzcamos un nuevo sistema de coordenadas beltramianas, ubicando su origen en el punto M. Al nuevo sistema de coordenadas le corresponderán nuevos valores de E, F, G y nuevos valores de los parámetros directores de las líneas dadas (de relaciones de las diferenciales de las nuevas coordenadas); el valor del segundo miembro de la fórmula (3) seguirá invariable. Para no complicar la cosa con símbolos excesivos, conservemos las viejas notaciones de las magnitudes.

Ahora, en el punto M tenemos: $x = 0$, $y = 0$; valiéndonos de las fórmulas (7) del § 220, en el punto M hallamos los valores siguientes de los coeficientes E, F, G:

$$E = R^2, \qquad F = 0, \qquad G = R^2,$$

y la fórmula (3) adquiere el siguiente aspecto .

$$\cos\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \tag{*}$$

Consideremos la orisfera Σ que toca nuestro plano en el punto M, es decir, en el origen del nuevo sistema de coordenadas; apliquemos el plano sobre la orisfera así, como lo hicimos en el § 226. A cada punto del plano con coordenadas beltramianas (x, y) le corresponde un punto con coordenadas cartesianas (x', y') sobre Σ, siendo

$$x = \frac{x'}{R}, \qquad y = \frac{y'}{R}.$$

En el segundo miembro de la fórmula (*), sustituyamos los argumentos con arreglo a estas fórmulas; obtendremos

$$\cos\varphi = \frac{dx'\delta x' + dy'\delta y'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2}\sqrt{\delta x'^2 + \delta y'^2}}. \tag{**}$$

Esta fórmula coincide con la de Euclides (II) del § 215; de aquí es evidente que ella determina el ángulo entre las imágenes de las dos líneas dadas sobre la orisfera Σ. Pero, en el punto de

contacto de la orisfera Σ con nuestro plano, el ángulo entre dos líneas cualesquiera sobre el plano es igual al angulo entre sus imágenes sobre la orisfera. Por consiguiente, la fórmula (**) y, por ende, la (*) determinan el ángulo entre las dos líneas dadas sobre el plano de Lobachevski en consideración. Con esto mismo queda demostrado que en un punto arbitrario y en cualesquiera coordenadas beltramianas el ángulo se determina mediante la fórmula (3).

§ 222. Procedamos, por fin, al problema de la medición de áreas.

Sobre el plano de Lobachevski consideraremos un conjunto de toda clase de dominios finitos acotados por curvas suaves y suaves a trozos. Supongamos que a cada área de tal género le está puesto en correspondencia un número positivo, observándose las condiciones siguientes:

1) a los dominios congruentes les corresponden números iguales;

2) si un dominio Ω está dividido en dos dominios Ω_1 y Ω_2 por una línea suave a trozos, entonces el número correspondiente al dominio Ω es igual a la suma de los números correspondientes a los dominios Ω_1 y Ω_2.

De otro modo se puede decir que está representada la función positiva del dominio

$$\sigma = f(\Omega)$$

que 1) adquiere valores iguales en los dominios congruentes y 2) posee la propiedad de aditividad, es decir,

$$f(\Omega_1 + \Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2)$$

(aquí $\Omega_1 + \Omega_2$ ha de entenderse como un dominio constituido por los puntos de los dominios Ω_1 y Ω_2 y por los de la línea divisoria).

Definamos también el concepto de continuidad de la función de un dominio; preliminarmente, habrá que definir la convergencia de la sucesión de dominios.

Ubiquemos el centro de un círculo de radio ε en cada punto de un dominio acotado Ω. El conjunto de los puntos internos de todos los círculos de tal índole convengamos en llamarlo ε-entorno del dominio Ω. De manera análoga se define el ε-entorno de la frontera de un dominio. Designemos con Ω'_ε el conjunto de todos los puntos del dominio Ω, salvo los que concurren en el ε-entorno de su frontera. Sea dada una sucesión infinita de dominios acotados Ω_1, $\Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots$; diremos que la sucesión $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_n \dots$ converge hacia el dominio Ω, si para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un número N tal que para cualquier $n \geqslant N$ el dominio Ω_n quede comprendido en el ε-entorno del dominio Ω y contenga el conjunto Ω'_ε.

Será natural llamar continua la función del dominio $f(\Omega)$ siempre que para cualquier dominio Ω y para cualquier sucesión de dominios Ω_n que converja hacia ella, tenga lugar la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} f(\Omega_n) = f(\Omega).$$

Para la función positiva de un dominio, de las condiciones 1) y 2) deriva la propiedad de continuidad. Sin embargo, no nos detendremos en la demostración de esta afirmación. Para facilitar la especulación, se puede suponer sencillamente que son continuas las funciones positivas del dominio que se consideran más abajo.

Llamaremos *área del dominio* Ω del plano de Lobachevski al valor adquirido en este dominio por la función positiva $f(\Omega)$ que satisfaga las condiciones 1) y 2).

Conviene hacer la pregunta: ¿en qué medida las exigencias 1) y 2) determinan la función positiva $f(\Omega)$? Esta cuestión se resuelve con el siguiente teorema.

TEOREMA. *Si $\varphi(\Omega)$ es alguna función positiva de un dominio, que satisface las condiciones* 1) *y* 2), *entonces toda otra función positiva del dominio, que satisfaga las mismas condiciones, se representa en forma de $k\varphi(\Omega)$, donde k es una variable positiva.*

De tal modo, según nuestra definición, las áreas de todos los dominios se determinan con la exactitud hasta el factor constante. Este factor será fijo si se atribuye un área igual a uno a

cierto dominio Ω_0; entonces el área de un dominio arbitrario se representará en forma de

$$f(\Omega) = \frac{\varphi(\Omega)}{\varphi(\Omega_0)},$$

donde $\varphi(\Omega)$ es una función positiva arbitraria de un dominio, que satisface las condiciones 1) y 2).

Pasemos a la demostración del teorema planteado más arriba. Hagamos notar que de las proposiciones del § 48 se deduce la validez de la afirmación del teorema para los triángulos; a saber, si $f(\Omega)$ es función positiva de un dominio, que satisface las condiciones 1) y 2), Δ es cierto triángulo y $D(\Delta)$ es el defecto de este triángulo, entonces

$$f(\Delta) = k'D(\Delta), \tag{1}$$

donde k' es una constante que no depende de la elección de Δ. Sea $\varphi(\Omega)$ una otra función positiva del dominio, que satisface también las condiciones 1) y 2); de manera análoga

$$\varphi(\Delta) = k''D(\Delta). \tag{2}$$

Suponiendo

$$\frac{k'}{k''} = k,$$

tendremos (1) y (2)

$$f(\Delta) = k\varphi(\Delta). \tag{3}$$

Evidentemente, la misma relación se da entre los valores adquiridos por las funciones $f(\Omega)$ y $\varphi(\Omega)$ en polígonos arbitrarios. En rigor, sea S un polígono arbitrario. Partámoslo de algún modo en triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$:

$$S = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

Aplicando la igualdad (3) a los triángulos:

$$f(\Delta_1) = k\varphi(\Delta_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(\Delta_n) = k\varphi(\Delta_n)$$

y sumando término a término las relaciones obtenidas, hallaremos:

$$f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + \dots + f(\Delta_n) = k[\varphi(\Delta_1) + \dots + (\Delta_n)].$$

Pero, en virtud de la propiedad de aditividad de las funciones f y φ, podemos representar esta última igualdad en forma de

$$f(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) = k\varphi(\Delta_1 + \dots + \Delta_n)$$

ó

$$f(S) = k\varphi(S).$$

Ahora, sea Ω un dominio arbitrario. Elijamos alguna sucesión de polígonos $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots$, convergente hacia el dominio Ω en el sentido determinado más arriba (no nos detendremos en la demostración de la posibilidad de tal elección). Según acabamos de demostrar, para cualquiera de dichos polígonos tiene lugar la igualdad $f(\Omega_n) = k\varphi(\Omega_n)$. De aquí, pasando al límite respecto a $n \to \infty$ y tomando en consideración la continuidad de las funciones f y φ, hallaremos:

$$f(\Omega) = k\varphi(\Omega),$$

es decir, efectivamente, conforme a las condiciones 1) y 2), la función positiva de un dominio se determina con la exactitud hasta el factor constante. Queda demostrar la existencia de una función que posee estas propiedades.

Ahora demostraremos que la integral doble

$$f(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy \tag{4}$$

es una función continua y positiva de un dominio, que satisface las condiciones 1) y 2).

Ante todo, notemos que la función subintegral

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{R^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

es positiva y continua en todos los puntos del plano de Lobachevski, en virtud de la desigualdad $x^2 + y^2 < 1$, básica para las coordenadas beltramianas. De aquí se deduce que la integral presente en el segundo miembro de la igualdad (4) existe, cualquiera que sea la elección del dominio acotado Ω, y tiene un valor positivo.

Luego, si las funciones E, F y G son fijas, es decir, si se ha elegido un determinado sistema de coordenadas beltramianas, entonces el valor de la integral (4) viene determinado sólo por la elección del dominio de integración. Es sustancial que este valor, en realidad, no dependa de la elección del sistema de coordenadas beltramianas. Para demostrarlo, consideremos un nuevo sistema de coordenadas beltramianas $(\bar{x}, \bar{y})$, junto con el de coordenadas (x, y); sean E, F, G y $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ coeficientes de la forma métrica del plano de Lobachevski, en las coordenadas viejas y nuevas, respectivamente. Valiéndonos de las fórmulas (5) del § 221, después de cálculos no complicados, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix}^2 \tag{5}$$

Habiendo compuesto en las nuevas coordenadas una expresión análoga a la (4), a base de la igualdad (5) y la fórmula conocida del cambio de variables en una integral múltiple, hallamos

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}\, d\bar{x}\, d\bar{y} = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{matrix} \right\| d\bar{x}\, d\bar{y} = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy.$$

Con esto mismo queda demostrada la invariación de la integral (4) respecto a la transformación de las coordenadas.

Ahora, demostremos que la función del dominio $f(\Omega)$ representada por la igualdad (4) satisface las condiciones 1) y 2).

Sean Ω y Ω' dos dominios congruentes. Hay que mostrar que $f(\Omega) = f(\Omega')$. Dada la congruencia de los dominios Ω y Ω', existe un movimiento del plano tal, con el cual el dominio Ω se superpone sobre el Ω'. Admitamos que con este movimiento los ejes de coordenadas Ox, Oy toman posiciones de $O'x'$, $O'y'$. Junto con el viejo sistema de coordenadas beltramianas x, y, consideremos el nuevo sistema x', y', con los ejes $O'x'$ y $O'y'$: sean

$$ds^2 = E\, dx^2 + 2F\, dx\, dy + G\, dy^2$$

y

$$ds^2 = E'\, dx'^2 + sF'\, dx'\, dy' + G'\, dy'^2$$

dos representaciones de la forma métrica del plano de Lobachevski, en el sistema viejo y el nuevo, respectivamente. Designemos con M un punto arbitrario del plano Ω y con M', el punto al cual pasa M al superponerse el dominio Ω sobre el Ω'. Se ve fácilmente que las viejas coordenadas del punto M son iguales a las nuevas del M', y los valores de las funciones E, F, G en el punto M son iguales a los de las funciones E', F', G' en el punto M', respectivamente. Debido a ello, tiene lugar la igualdad siguiente:

$$\iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = \iint_{\Omega} \sqrt{E'G' - F'^2}\, dx'\, dy'.$$

Más, como hemos visto, el valor de la integral (4) extendida sobre algún dominio, no depende de qué sistema de coordenadas se usa en la consideración; de tal modo,

$$\iint_{\Omega} \sqrt{E'G' - F'^2}\, dx'\, dy' = \iint_{\Omega'} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy$$

de donde

$$\iint_{\Omega'} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy.$$

De este modo queda establecido que la función

$$f(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy$$

satisface la condición 1). El hecho de que satisfaga también la condición 2), dimana directamente de la propiedad de aditividad de la integral: si el dominio Ω está dividido en dos dominios Ω_1 y Ω_2, entonces

$$\iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = \iint_{\Omega_1} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy + \iint_{\Omega_2} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy,$$

ó

$$f(\Omega_1 + \Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2).$$

Más arriba nos convenimos en llamar área del dominio Ω al valor de la función positiva $f(\Omega)$ que satisface las condiciones 1) y 2). De acuerdo con esta definición y a consecuencia del teorema demostrado más arriba, el área de un dominio puede expresarse mediante la fórmula

$$f(\Omega) = k \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy, \tag{6}$$

donde k es la constante que se fija mediante la elección de la unidad de medición de áreas.

Ahora, pondremos la unidad de medición de áreas en una determinada dependencia de la de medición de longitudes.

En la geometria euclidiana, la dependencia entre la unidad de áreas y la de longitudes se establece con que por unidad de área se toma un cuadrado, cuyo lado es igual a una unidad lineal. Algo análogo lo haremos también en la geometría de Lobachevski.

Volvamos a considerar la orisfera Σ que toca un plano en el origen del sistema de coordenadas beltramianas elegido; a las coordenadas beltramianas (x, y) en el plano le corresponden las cartesianas (x', y') sobre la orisfera Σ.

Sea Q' la designación de un cuadrado sobre la orisfera Σ (cuadrado, en el sentido de la geometría euclidiana de la orisfera Σ) que tiene un vértice en el origen de las coordenadas, un lado, en el semieje positivo Ox', otro lado, en el semieje positivo $O'y$. Designemos con u la

longitud del lado del referido cuadrado. Sobre el plano, al cuadrado Q' le corresponde cierto cuadrilátero Q (más detalladamente, Q es la preimagen de Q' al aplicarse el plano sobre Σ, la cual fue definida en el § 216).

Designemos con $S(Q')$ el área euclídea del cuadrado Q' $[S(Q') = a^2]$, con $S(Q)$, la del cuadrilátero Q, para cierta elección de la unidad de áreas sobre el plano. Subordinemos la elección de la unidad de áreas a la condición de

$$\lim_{a \to 0} \frac{S(Q)}{S(Q')} = 1.$$

Partiendo de esta condición hallaremos el valor de la constante k en la fórmula (6).

Hagamos notar que la región (cerrada) Q' en las coordenadas cartesianas (x', y') sobre la orisfera Σ se determina con las desigualdades $0 \leqslant x' \leqslant a$, $0 \leqslant y' \leqslant a$. Como al punto (x', y') de la orisfera Σ le corresponde sobre el plano un punto con las coordenadas beltramianas $x = \frac{x'}{R}$, $y = \frac{y'}{R}$, entonces la región (cerrada) Q en las coordenadas beltramianas del plano se determina con las desigualdades

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{R}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{R}.$$

De aquí hallamos:

$$S(Q) = k \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy = k \int_0^{\frac{a}{R}} \int_0^{\frac{a}{R}} \frac{R^2\, dx\, dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}.$$

Después de esto, por cálculos elementales obtenemos:

$$\lim_{a \to 0} \frac{S(Q)}{S(Q')} = \lim_{a \to 0} \frac{k \displaystyle\int_0^{\frac{a}{R}} \int_0^{\frac{a}{R}} \frac{R^2 dx\, dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}}{a^2} = k$$

Por consiguiente,

$$k = 1.$$

Vemos que con la elección señalada de la unidad de áreas el área de un dominio arbitrario Ω se expresa con la igualdad

$$S(\Omega) = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy.$$

Hagamos constar que el área del triángulo Δ en este caso viene dada por la fórmula

$$S(\Delta) = R^2 D(\Delta),$$

donde $D(\Delta)$ es el defecto (es útil comparar esta expresión con la fórmula (I') del § 48).

§ 223. Así pues, las fórmulas

$$ds^2 = E\, dx^2 + 2F\, dx\, dy + G\, dy^2, \tag{I}$$

$$\cos\varphi = \frac{E\, dx\, \delta x + F(dx\, \delta y + dy\, \delta x) + G\, dy\, \delta y}{\sqrt{E\, dx^2 + 2F\, dx\, dy + G\, dy^2}\sqrt{E\, \delta x^2 + 2F\, \delta x\, \delta y + G\, \delta y^2}}, \tag{II}$$

$$S(\Omega) = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy, \tag{III}$$

entre las cuales la primera, escrita detalladamente, tiene la siguiente forma

$$ds^2 = R^2\frac{(1 - y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1 - x^2)\,dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \qquad (^*)$$

determinan la medición de longitudes, ángulos y áreas en las coordenadas beltramianas sobre el plano de Lobachevski.

La estructura de estas fórmulas coincide exactamente con la de las (I^*), (II^*), (III^*) del § 215, mediante las cuales se determina la mediación de las magnitudes geométricas sobre el plano de Euclides. Más, por supuesto, los valores de los coeficientes E, F, G en las fórmulas (I^*) — (III^*) del § 215 difieren de los de los coeficientes E, F, G en las (I) — (III) del presente párrafo.

Como en las fórmulas (II) y (III) las magnitudes E, F, G son coeficientes de la forma (*), se dice que la forma (*) determina la métrica del plano de Lobachevski.

§ 224. Hasta ahora nos valíamos exclusivamente de las coordenadas beltramianas. Ahora vamos a ampliar la clase de sistemas de coordenadas admisibles. Partiendo de cierto sistema de coordenadas beltramianas (x, y) dado, iremos introduciendo nuevas coordenadas mediante dos relaciones cualesquiera de tipo de

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y), \qquad (^*)$$

si las funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ son diferenciables continuamente y poseen un jacobiano diferente de cero para todos los valores de x, y acotados por la condición de $x^2 + y^2 < 1$. Los números (u, v) se consideran nuevas coordenadas del punto $M(x, y)$. Las condiciones de la diferenciabilidad continua y de la desigualdad a cero del jacobiano se imponen con el fin de conservar en cuanto a las nuevas coordenadas la definición de la línea suave, enunciada en el § 220 para los sistemas de Beltrami. Además, en tales condiciones las ecuaciones (*) son invertibles, y su inversión suministra las funciones

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \qquad (^{**})$$

continuamente diferenciables, con el jacobiano desigual a cero. En las coordenadas (u, v) la dirección de la línea suave $u = u(t)$, $v = v(t)$ viene determinada por la relación $\frac{dv}{du}$; efectivamente, de las igualdades (**) tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}$$

y, por consiguiente, se conoce el parámetro director $k = \frac{dy}{dx}$ si se conoce la relación $\frac{dv}{du}$.

Transformando las fórmulas (I), (II), (III) del § 223 en cuanto a las nuevas variables (u, y), obtenemos fórmulas de la misma estructura (más con otras magnitudes E, F, G):

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad (I)$$

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}, \qquad (II)$$

$$S(D) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \qquad (III)$$

que en el sistema (u, v) expresan la diferencial del arco, el ángulo entre las líneas y el área del dominio. Para llevar cálculo mediante estas fórmulas, hay que conocer los coeficientes de la

forma cuadrática (I): $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$. A base de ello decimos que la forma cuadrática (I) determina la métrica del plano de Lobachevski en las coordenadas (u, v).

Consideremos un ejemplo importante de la transformación de coordenadas:

$$x = \operatorname{th}\frac{\xi}{R}, \quad y = \frac{\operatorname{th}\dfrac{\eta}{R}}{\operatorname{ch}\dfrac{\xi}{R}} \tag{1}$$

donde (ξ, η) son nuevas coordenadas, th y ch son símbolos que denotan la tangente y el coseno hiperbólicos. Si x, y satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < 1$, las ecuaciones (1) son invertibles unívocamente; determinan, por consiguiente, las transformaciones de las coordenadas sobre todo el plano de Lobachevski.

Sustituyendo x, y en la forma métrica

$$ds^2 = R^2\frac{(1 - y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1 - x^2)\,dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \tag{2}$$

por los segundos miembros de las igualdades (1), tras transformaciones no complicadas obtenemos la forma métrica del plano de Lobachevski en las coordenadas ξ, η:

$$s^2 = d\operatorname{ch}^2\frac{\eta}{R}\cdot d\xi^2 + d\eta^2.$$

Conforme a las fórmulas (II) y (III), de aquí

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{ch}^2\dfrac{\eta}{R}\cdot d\xi\,\delta\xi + d\eta\,\delta\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{\eta}{R}\cdot d\xi^2 + d\eta^2}\sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{\eta}{R}\cdot \delta\xi^2 + \delta\eta^2}}.$$

$$S(D) = \iint\limits_{(D)} \operatorname{ch}\frac{\eta}{R}\cdot d\xi\,d\eta.$$

En la forma métrica (2) no está presente el término con el producto $d\xi d\eta$. Hagamos notar que en las coordenadas generales (u, v) con la forma métrica correspondiente

$$ds^2 = E\,du^2 + 2E\,du\,dv + G\,dv^2$$

F será igual a cero si, y sólo si, la red de líneas de coordenadas

$$u = \text{const},$$

$$v = \text{const}$$

es ortogonal. En rigor, es evidente que las direcciones de las líneas de coordenadas se caracterizan por las diferenciales dv, $du = 0$ y $dv = 0$, du, siendo variables arbitrarias dv en el primer caso y du en el segundo. De aquí y de (II), designando con φ el ángulo entre las líneas $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, tenemos:

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

De tal modo, si $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $F = 0$, y viceversa.

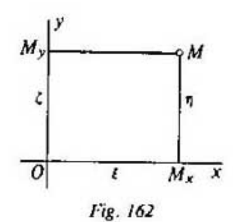


Fig. 162

La supresión del término con el producto $d\xi d\eta$ en la forma (2) significa, por lo tanto, la ortogonalidad de la red de coordenadas ξ = const, η = const.

Demos la descripción geométrica de las coordenadas ξ, η.

Consideremos los ejes recíprocamente perpendiculares Ox, Oy que sirven para determinar las coordenadas beltramianas x, y (fig. 162). Sea $M(x, y)$ un punto arbitrario de un plano; bajemos una perpendicular de M a Ox, designando su base con M_x. Comparando la primera de las fórmulas (1) $x = \text{th}\,\frac{\xi}{R}$ con la primera de las (4) del § 218, vemos que ambas son idénticas. Por consiguiente, $\xi = OM_x$. De aquí concluimos que la ecuación $\xi = c$ (donde c es una constante) determina la recta perpendicular al eje Ox. De la fórmula (2) hallamos que para esta línea $ds^2 = d\eta^2$, o $ds = \pm d\eta$. La integración de esta última relación da $M_xM = \pm\eta + a (a =$ $=$ const). Suponiendo $y = 0$ en la segunda de las fórmulas (1), obtenemos correspondientemente $\eta = 0$. Esto significa que, de estar el punto M en el eje Ox, debe ser $\eta = 0$. De tal modo, $a = 0$ y $M_xM = \pm\eta$. Hagamos constar que, en virtud de la segunda de las fórmulas (1), $\eta > 0$, si $y > 0$, y $\eta < 0$, si $y < 0$. Consiguientemente, el número η expresa el segmento M_xM, considerándose el signo según la regla ordinaria. Los números (ξ, η) se llaman *primeras coordenadas* del punto M; los números (ξ, ζ), con los cuales están denotadas las coordenadas beltramianas (x, y) en el § 218 (véase también la fig. 162), llevan el nombre de *segundas coordenadas* del punto M.

En la geometría de Lobachevski siempre $\eta \neq \zeta$.

Ahora, es fácil comprender que las líneas de coordenadas ξ = const son rectas perpendiculares al eje Ox, y las η = const son equidistantes ortogonales respecto a ellas.

4. Geometría interior de la superficie y problema de Beltrami

§ 225. Se llama geometría interior de alguna superficie el conjunto de sus propiedades tales que puedan ser reveladas mediante mediciones efectuadas sobre el mismo plano.

Evidentemente, la planimetría de Euclides es un caso particular de la geometría interior interpretada en el referido sentido.

Los resultados obtenidos por nosotros en los capítulos antecedentes, naturalmente, plantean el problema: ¿se puede considerar también, desde cierto punto de vista, la planimetria de Lobachevski como geometría interior de cierta superficie del espacio de Euclides?

Este problema planteado en la obra de Beltrami «Experiencia de la interpretación de la geometría no euclidiana» (1868) será objeto de nuestra atención en los párrafos inmediatos.

Comenzaremos por algunos hechos más sencillos de la geometría diferencial. Si bien la mayoría de ellos (si no todos) se conoce comúnmente, no obstante, parece ser conveniente proceder así, con el fin de aclarar nuestra terminología y prevenir con ello al lector de las posibles equivocaciones que puedan surgir al conocer el material subsiguiente.

Ante todo, convengamos precisamente en qué comprenderemos bajo la palabra «superficie».

Nos limitaremos con el caso más sencillo de una superficie sin puntos múltiples la cual pueda definirse como cierto conjunto de puntos del espacio (ahora suponemos euclidiano el espacio).

Sea dado un conjunto de puntos S en el espacio de Euclides. Si M_0 es un punto cualquiera del conjunto S, llamaremos entorno del punto M_0 en el conjunto S al subconjunto $U(M_0)$ del referido conjunto, que es la intersección de S con algún entorno del punto M_0 en el espacio euclidiano. La definición subsiguiente consiste en la exigencia de que los puntos M tengan entornos $U(M)$ los cuales poseen determinadas propiedades.

Para describir dichas propiedades, estimemos un sistema de coordenadas ortogonales cartesianas con el origen en el punto O y con los ejes Ox, Oy, Oz. Además, imaginémonos algún plano con un sistema de coordenadas cartesianas bidimensionales, cuyos ejes estén designados con u y v (en lo sucesivo, se llama u, v-plano).

Llamaremos superficie al conjunto S, si para todo punto M_0 existe un entorno $U(M_0)$ tal que todos sus puntos tengan coordenadas representadas por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= u(u, v), \\ z &= z(u, v), \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

y al mismo tiempo

1) $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ son funciones determinadas y unívocas en cierto dominio D del u, v-plano.

2) A cada par de números u, v perteneciente al dominio D de la ecuación (α) le corresponde un punto con coordenadas x, y, z perteneciente al entorno $U(M_0)$; a distintos pares de números u, v de la ecuación (α) les corresponden sendos puntos diferentes (es decir, con las ecuaciones (α) se establece la correspondencia biunívoca entre los puntos del dominio D y los del entorno $U(M_0)$).

3) Las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ en el dominio D son continuas, poseen derivadas parciales continuas de primer orden, y el rango de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right\| \qquad (*)$$

es igual a dos.

Algo más tarde explicaremos el sentido de esta última condición.

Sin perder la comunidad, para la evidencia, consideraremos que el dominio D es un dominio simplemente conexo del u, v-plano. Al mismo tiempo, el entorno $U(M_0)$ de un punto arbitrario M_0, que le corresponde, será un dominio simplemente conexo sobre la superficie S.

Los entornos en cuestión son llamados a veces coordenados. No complicaremos con este calificativo nuestra exposición, más en lo sucesivo, al hablar de los entornos de los puntos de una superficie, tendremos en cuenta precisamente los entornos del referido tipo.

En algunos casos, toda la superficie es entorno de un punto suyo cualquiera (por ejemplo, un plano o un paraboloide). En el caso general, una superficie constituye un conjunto de un sistema finito o infinito de dominios del tipo descrito. Así pues, al definir la superficie, admitimos que el conjunto de sus puntos puede tener, en total, una estructura bien compleja, pero cerca de cada punto su estructura debe estar canonizada en determinados aspectos.

Para hacer más cómodo en el uso el concepto de superficie, es conveniente agregar a su definición también la condición de conexión. Esta puede enunciarse, por ejemplo, en la forma siguiente.

Sean U y V algunos entornos de dos puntos de una superficie. Diremos que estos dos entornos están unidos por una cadena de entornos, si sobre la superficie existen puntos tales y sus respectivos entornos $U_1, U_2, \dots U_n$ tales que U_1 tenga una porción común con U, U_n tenga una porción común con V, y los entornos U_k, U_{k+1} tengan una porción común para cualquier $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Llamaremos *conexa* a una superficie, si sobre ella pueden unirse dos entornos cualesquiera mediante una cadema de entornos.

Ahora, consideremos algún dominio U de la superficie S representada por las ecuaciones de tipo de (α). Cada punto M del dominio U se determina mediante las ecuaciones (α) si tenemos dos números u y v prefijados. Por ende, los números u, v los llamaremos coordenadas del punto M sobre la superficie, valiéndonos de la designación usual en la geometría analítica $M(u, v)$. Estas coordenadas a menudo se denominan *interiores*.

Partiendo de las coordenadas u, v, se puede introducir infinidad de otros sistemas de coordenadas interiores en el dominio U. Para hacerlo, basta componer algunas ecuaciones:

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v),$$
$$\bar{v} = \bar{v}(u, v),$$

que permitan determinar un nuevo par de números $\bar{u}$, $\bar{v}$ para cada par de números u, v, debiendo estar subordinados los segundos miembros de las referidas ecuaciones a las mismas restricciones enunciadas en el § 224 para las ecuaciones (*).

Determinábamos la superficie mediante tres ecuaciones (α). Se puede sustituirlas por una vectorial

$$r = r(u, v), \qquad (\beta)$$

cuyo primer miembro posee el radio vector r del punto M de la superficie (es decir, el vector $\overline{OM}$), y el segundo, la función vectorial con los componentes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Si se vale de la ecuación (β), se percibe fácilmente el sentido geométrico de las condiciones 3 en la definición de la superficie aducida más arriba. Precisamente, se requieren, primero, la existencia y la continuidad de los vectores

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} \quad \text{y} \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$

y, segundo, la observancia de la desigualdad $[r_u r_v] \neq 0$, ya que los componentes de este producto vectorial lo son los determinantes de la matriz (*). Esta última desigualdad significa que los vectores r_u y r_v no son colineales; entonces determinan un plano tangente a la superficie.

Ahora, estimemos las ecuaciones de tipo de

$$u = u(t),$$
$$v = v(t);$$

éstas determinan una línea (la trayectoria del punto $M(u, v)$, con t variable) sobre una superficie. La dirección de esta línea en el espacio se representa por el vector

$$\frac{dr}{dt} = r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt}.$$

Por lo visto, quedará determinada la dirección de la línea, si se da la relación de las diferenciales $du : dv$. Por ende, $du : dv$ la llamaremos *parámetro de la dirección*.

Introduzcamos designaciones usuales en la geometría diferencial:

$$r_u^2 = E, \quad r_u r_v = F, \quad r_v^2 = G.$$

Entonces podemos hallar el cuadrado de la diferencial del arco de la línea sobre la superficie, suponiendo

$$ds^2 = dr^2 = (r_u du + r_v dv)^2 = E\, du^2 + 2\, du\, dv + G\, dv^2.$$

Además, si $du : dv$ y $\delta u : \delta v$ son los parámetros de dos direcciones a los cuales les corresponden los vectores dr y δr tangentes a la superficie, entonces el ángulo φ entre estas direcciones viene dado por la igualdad

$$\cos\varphi = \frac{dr\ \delta r}{\sqrt{dr^2}\sqrt{\delta r^2}} = \frac{(r_u du + r_v dv)(r_u \delta u + r_v \delta v)}{ds\ \delta s} =$$

$$= \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

Al fin, como se conoce del análisis elemental, si un dominio U de una superficie corresponde a un dominio D del u, v-plano entonces el área del dominio U se calcula según la fórmula

$$\sigma = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Así pues, tenemos tres relaciones básicas:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad \text{(I)}$$

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\Delta v^2}}, \qquad \text{(II)}$$

$$\sigma = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \qquad \text{(III)}$$

que expresan la diferencial de arco, el ángulo entre dos líneas y el área de dominio en el sistema de coordenadas u, v mediante las funciones $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$. De estas fórmulas se ve que las mediciones de longitudes, ángulos y áreas sobre una superficie vienen determinadas por completo por los coeficientes de la forma cuadrática

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \qquad \text{(I)}$$

Por eso se dice que la forma (I) determina la métrica de la superficie; la llaman *métrica*.

Es cierto que con el la variación del sistema de coordenada cambian los coeficientes de forma métrica y, al mismo tiempo, las diferenciales de las coordenadas, correspondientes a algún desplazamiento de un punto según una línea situada sobre la superficie. En este caso, si E, F, G son coeficientes de forma métrica en un sistema de coordenadas interiores, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ son coeficientes en otro sistema, y du, dv y $d\bar{u}$, $d\bar{v}$ son diferenciales de las coordenadas viejas y nuevas determinadas por un mismo elemento de la línea, entonces

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \bar{E}\,d\bar{u}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{G}\,d\bar{v}^2,$$

ya que el primer miembro y el segundo expresan una misma magnitud ds^2.

Conociendo las fórmulas de transformación de las coordenadas y E, F, G, es fácil calcular $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$. Hagamos notar que la dependencia entre E, F, G y $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ se obtiene formalmente a base de los cálculos algebraicos. Por eso, la computación de $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ a partir de E, F, G dados puede operarse aplicando las fórmulas (5) del § 221, donde resolvimos un problema justamente igual, desde el punto de vista algebraico, que ésta.

Si los coeficientes de dos formas están ligados por las relaciones (5) del § 221, diremos que estas dos formas pasan una en otra transformándose las coordenadas. Tales formas se llaman *equivalentes*.

En correspondencia con esta definición, se puede decir que la métrica de cada superficie en coordenadas interiores diferentes se determina por formas métricas distintas, mas, todas estas formas son equivalentes entre sí.

§ 226. Consideremos algún dominio U sobre una superficie S y un dominio U' sobre una superficie S'. Supongamos que entre los puntos del dominio U y entre los del U' se ha estable-

cido una correspondencia biunívoca y continua en ambos sentidos. Entonces tendremos también una correspondencia entre las líneas del dominio U y las del U'; a saber, a cada línea L del dominio U le corresponde en el dominio U' una línea L' constituida por puntos correspondientes a los de la línea L. De manera justamente igual, a cada dominio V situado dentro de U, le corresponde en U' un dominio V' compuesto por los puntos que corresponden a los del V. La figura A' (por ejemplo, una línea) del dominio U', correspondiente a la figura A del U, la llamaremos *imagen de la figura A*.

Si cada arco suave l en el dominio U tiene por su imagen en U' un arco suave l' de la misma longitud que l, entonces la correspondencia se llama isométrica o simplemente isometría. Los dominios U y U', entre los cuales se puede establecer la correspondencia isométrica, se llaman isométricos uno respecto al otro.

Para obtener una rasgo analítico del carácter isométrico de los dominios, imaginémonos que en el dominio U están introducidas algunas coordenadas interiores u, v. En el dominio U' introduciremos un sistema de coordenadas interiores relacionado de un modo peculiar con el sistema u, v del dominio U. A saber, cada punto M' situado en U' lo compararemos con dos números (serán las coordenadas del mismo) iguales a las coordenadas en el sistema (u, v) en U de aquel punto M de este dominio U, que corresponda al punto M'. Hablando brevemente, el sistema de coordenadas en el dominio U' se introduce de modo que los puntos correspondientes en U y U' tengan coordenadas numéricamente iguales.

Sean $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ y $E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2$ las formas métricas de los dominios U y U' en las coordenadas dadas. Consideremos los elementos correspondientes de dos líneas en U y U'. Se caracterizan por unas mismas diferenciales du, dv. Según la condición de la isometría debemos tener:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2. \qquad (*)$$

Ya que nada limita la elección del par de elementos correspondientes de dos líneas pertenecientes a los dominios U y U', entonces en la igualdad (*) du y dv son magnitudes absolutamente arbitrarias. Por eso obtenemos de (*):

$$E = E', \ F = F', \ G = G'.$$

De tal modo, en las coordenadas dadas (u, v), los dominios U y U' tienen formas métricas iguales. Es obvia la proposición recíproca: si dos superficies tienen formas métricas iguales, son isométricas.

(Notemos que en coordenadas arbitrarias las formas métricas de las superficies isométricas pueden no coincidir, pero sí, serán equivalentes.)

De las fórmulas (I) — (III) del § 225 se sigue que *en el caso de isometría, siendo iguales las longitudes de los arcos correspondientes, también resultan iguales los valores de los ángulos entre las direcciones correspondientes, así como las áreas de las superficies correspondientes.*

Por ende, todas las propiedades de la superficie que puedan revelarse mediante las mediciones que se efectún sobre ella, resultan iguales para las superficies isométricas. Esto da motivo para decir que las superficies isométricas tienen una geometría interior común. Una geometría interior común para todo el conjunto de superficies isométricas entre sí, se determina por una misma forma métrica.

Para demostrar evidentemente, cómo se construye infinidad de superficies diferentes con una geometría interior común, pediremos al lector que se imagine que la superficie físicamente está realizada a partir de un material elástico, pero no extensible. Deformemos esta superficie de modo que no haya pliegues ni rupturas. Las superficies obtenidas de tal modo, a consecuencia de que el material no es extensible, serán isométricas entre sí y, por consiguiente, tendrán una geometría interior común.

Por ejemplo, dando forma cilíndrica a una hoja de papel, demostraremos de un modo evidente que un trozo de superficie y cierta parte del cilindro tienen una geometría interior igual. Si tratamos de superponer una hoja de papel sobre una esfera o una ensilladura (paraboloide

hiperbólico), entonces, en el primer caso, se formarán pliegues, en el segundo, rupturas. Esta circunstancia demuestra claramente el hecho de que la geometría interior de cada trozo de una esfera o de una ensilladura se diferencia sustancialmente de la geometría de cualquier sector del plano.

La deformación continua de una superficie para la cual se conserva la geometría interior de ésta, se llama *doblado*.

Remitámonos a lo enunciado en el § 224. Allí determinamos la forma métrica del plano de Lobachevski y dedujimos las fórmulas (I) — (III), mediante las cuales se expresan las longitudes de líneas, las mangitudes de ángulos y las áreas de dominios. La estructura de estas fórmulas es del todo idéntica a la de las (I) — (III) del § 225. Naturalmente, por eso surge la pregunta: ¿existe en el espacio de Euclides una superficie, cuya forma métrica sea equivalente a la del plano de Lobachevski? Puede esperarse que la geometría interior de una superficie de tal género coincidirá con la planimetría de Lobachevski, es decir, incluirá todos los axiomas de la planimetría de Lobachevski en el sistema de sus proposiciones.

Si formulamos precisamente en términos de la isometría la pregunta formulada, de pronto puede verse que la misma conduce a dos problemas distintos:

1) Hállese una superficie, para cada punto de la cual exista un entorno isométrico respecto a cierto dominio del plano de Lobachevski.

En cuanto a una superficie tal, aún no puede decirse que su geometría en total sea idéntica a la del plano de Lobachevski.

(Así, por ejemplo, cada punto de un cilindro circular tiene un entorno que puede desarrollarse y superponerse sobre cierto sector del plano euclidiano. Sin embargo, la geometría del cilindro circular, en total, difiere sustancialmene de la geometría de un plano.)

Diremos que sobre una superficie que satisfaga las condiciones del problema, la geometría de Lobachevski se realiza «localmente».

2) Hállese una superficie que admita su aplicación isométrica sobre todo el plano de Lobachevski.

La geometría interior de tal superficie debe representar la realización de la planimetría no euclidiana dentro del espacio de Euclides. De la solución positiva del segundo problema se deduciría directamente la consistencia lógica del sistema no euclidiano bidimensional. Precisamente, tal objetivo lo perseguía Beltrami al que se debe, como se dijo más arriba, el planteo de estos problemas. Pero Beltrami dejó resuelto sólo el primero. En lo que respecta al segundo, según se supo más tarde, éste no tiene solución. A saber, D. Hilbert demostró que en el espacio de Euclides no existe una superficie que tenga la propiedad requerida*).

Expondremos bien detalladamente los resultados de Beltrami que de por sí respresentan un interés geométrico, independientemente de la demostración de la consistencia de la geometría de Lobachevski.

5. Geometría sobre la superficie de curvatura constante

§ 227. Nuestro objeto es hallar, si es posible, en el espacio euclidiano una superficie, para cada punto de la cual exista un entorno isométrico respecto a cierto dominio del plano de Lobachevski. Supongamos que tal superficie existe; designémosla con S. Tratemos de estudiar las propiedades que debe de poseer la superficie S. En lo sucesivo, esto ayudará a revelar la existencia de tal superficie.

---

*) *D. Hilbert,* Fundamentos de la geometría, Apéndice V (*D. Hilbert,* «Die Grundlagen der Geometrie», Siebente Auflage, Lpz. — Berl., 1930). Cabe notar que en este teorema de Hilbert se trata sobre las superficies, cuyo radio vector instantáneo satisface la condición de la diferenciabilidad continua triple respecto a las coordenadas interiores (u, v).

Sean M_1 y M_2 dos puntos arbitrarios de la superficie S. Según la condición, para cada uno de ellos existe sobre S un entorno isométrico respecto a cierta porción del plano de Lobachevski. Designemos con U_1 y U_2 tales entornos de los puntos M_1 y M_2, respectivamente. Aplíquese isométricamente U_1 sobre el dominio U_1' del plano de Lobachevski, aplicándose el punto M_1 en el punto M_1' dentro de U_1'; análogamente, denotemos con U_2' el dominio obtenido por la aplicación isométrica del entorno U_2 sobre el plano de Lobachevski, y con M_2', el punto correspondiente al M_2 en esta aplicación.

Sobre el plano de Lobachevski, dentro del dominio U_1' existe otro dominio $\bar{U}_1'$ que cubre el punto M_1' y tiene dimensiones tan pequeñas que para su desplazamiento congruente que haga coincidir el punto M_1' con M_2' cubrirá una parte de U_1' del plano, que está por entero dentro de U_2'. Además, al desplazarse el dominio $\bar{U}_1'$ a su nueva posición $\bar{U}_2'$, cualquier dirección junto al punto M_1' se puede hacerla coincidir con cualquier dirección junto al punto M_2' (a esta propiedad del conjunto de movimientos la llamamos en el § 45 transitividad respecto a elementos lineales). Ahora, designemos con $\bar{U}_1$ y $\bar{U}_2$ los dominios sobre la superficie S, que corresponden a los $\bar{U}_1'$ y $\bar{U}_2'$ del plano de Lobahevski en las aplicaciones isométricas de U_1 y U_2 sobre U_1' y U_2'.

A consecuencia de la isometría de los dominios $\bar{U}_1'$ y $\bar{U}_2'$, deben ser isométricos uno respecto a otro también los dominios $\bar{U}_1$ y $\bar{U}_2$. De tal modo, cualquiera que sea el punto M_1 de la superficie S, siempre existe un entorno del mismo, que puede aplicarse isométricamente sobre cierta porción de la superficie S de modo que el punto M_1 se aplique en cualquier otro punto M_2 prefijado de la misma superficie. Además, de los razonamientos aducidos se desprende que, al mismo tiempo, cualquier dirección que parta del punto M_1 sobre la superficie S, puede ser aplicada sobre cualquier dirección que parta del punto M_2.

Si convenimos en llamar congruentes desde el punto de vista de la geometría interior de la superficie S los dominios isométricos de ésta, y utilizamos la terminología introducida en el § 45, entonces el resultado obtenido puede formularse de la manera siguiente: *la superficie S admite un conjunto de movimientos transitivo respecto a elementos lineales.*

Sólo hay que tener en cuenta dos circunstancias:

1) Los dominios isométricos de la superficie S como imágenes del espacio euclidiano circundante, hablando en general, no son congruentes.

En el caso dado se trata de los movimientos en el sentido de la geometría interior de la superficie y ni mucho menos de los movimientos en el sentido de la geometría euclidiana del espacio.

2) La superficie S EN TOTAL puede carecer de la aptitud de desplazarse sobre sí misma tan libremente para que el conjunto de estos movimientos sea transitivo en cuanto a elementos lineales, aun cuando se los considere desde el punto de vista de la geometría interior.

En el caso dado se trata no de los movimientos de toda la superficie sobre sí misma, sino de los movimientos de sus trozos suficientemente pequeños sobre ella.

No obstante para estas restricciones, se puede percibir una gran analogía entre la superficie S, cuya geometría interior «localmente» es la geometría de Lobachevski, y las superficies, sobre las que se realiza la geometría elemental en el sentido en que definimos este concepto en el § 45.

Para tener una idea clara sobre el movimiento en el sentido de la geometría interior, imaginémonos un trozo de película flexible pero NO EXTENSIBLE, aplicada fuertemente a una superficie. El desplazamiento de este trozo sobre la superficie representa el movimiento en el sentido de la geometría interior, si el trozo desplazado sigue adherido a la superficie en cada nueva posición. La superficie S que nos interesa, debe estar deformada de modo que un trozo de la película flexible extensible adherido a ella en cualquier lugar, sin despegarse, pueda ser desplazado libremente sobre ella y girar alrededor de su punto cualquiera; no obstante, además, el tamaño del trozo que permite tales desplazamientos, puede depender de desde qué punto hacia cuál lo desplacemos.

Acotemos la clase de las superficies sujetas al examen con condiciones complementarias de «suavidad de tercer orden». Esto significa que los segundos miembros de las ecuaciones (α) del § 225 se suponen ser funciones tres veces diferenciables continumente. En tal caso, se hace aplicable a las superficies en cuestión la teoría clásica de las superficies.

Tomando en consideración el teorema de Gauss de la invariación de la curvatura total en las aplicaciones isométricas*), a base de lo expuesto podemos concluir: *la superficie S necesariamente tiene una curvatura total igual en todos los puntos.*

Tal superficie se llama *superficie de curvatura constante.*

Demostremos el teorema: *cada superficie de curvatura constante admite un conjunto de movimientos interpretados en el sentido de la geometría interior, transitivo respecto a los elementos lineales.*

Primero, realicemos algunos cálculos preparatorios. Sea S cualquier superficie de curvatura constante. Tomemos sobre esta superficie un punto arbitrario M_0 y tracemos a través de él una línea geodésica Γ. En Γ, a partir de M_0, tracemos un arco de una longitud u y a través de su extremo tracemos una geodésica de una longitud v, perpendicular respecto a Γ, designando su extremo con M. En cierto entorno $U(M_0)$ del punto M_0 las magnitudes u, v pueden considerarse como coordenadas del punto M. A saber, u, v serán las coordenadas semigeodésicas en el entorno $U(M_0)$. En el sistema u, v la forma métrica tiene el aspecto de $ds^2 = E\,du^2 + dv^2$.

Convengamos en llamar la línea $\Gamma(v = 0)$ línea geodésica básica del sistema de coordenadas u, v, el punto $M(u = 0, v = 0)$, punto inicial o, simplemente, origen.

Como la coordenada u es igual a la longitud del arco de la línea Γ, entonces para $v = 0$ debe tenerse $ds^2 = du^2$. Comparando esta igualdad con la relación $ds^2 = E\,du^2$ que resulta de la forma métrica si $v = 0$, hallamos:

$$E(u, 0) \equiv 1.$$

Hagamos notar seguidamente que, por cuanto Γ es una geodésica, a lo largo de Γ la curvatura geodésica debe ser igual a cero: $\dfrac{1}{\rho_g} = 0$. Valgámonos de una fórmula conocida en la teoría de las superficies

$$\frac{1}{\rho_g} = \sqrt{EG - F^2}\left\{\begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix}\right\},$$

que expresa la curvatura geodésica de la línea de coordenadas $v = \text{const}$. Como $\dfrac{1}{\rho_g} = 0$, entonces, para $v = 0$

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix}\right\} = \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Pero en el sistema semigeodésico $F(u, v) = 0$; de tal modo, a base de esta última igualdad tenemos:

$$E_v(u, 0) = 0.$$

---

*) Se llama curvatura total de una superficie en un punto dado el producto de sus curvaturas principales en dicho punto: $K = \dfrac{1}{R_1R_2}$. La demostración del teorema de Gauss, al igual que la demás información de la teoría de las superficies que se usa en el presente párrafo las puede hallar el lector en el libro de *P. K. Rashevski*, Geometría diferencial (*К. П. Рашевский. Дифференциальная геометрия*).

Ahora, determinaremos la función $E(u, v)$, partiendo de que una superficie con la forma métrica

$$ds^2 = E\,du^2 + dv^2$$

tiene una curvatura total constante.

Se conoce que en las coordenadas semigeodésicas la curvatura total K de una superficie se determina con la igualdad

$$K = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial v^2}.$$

Por consiguiente, nos veremos obligados a integrar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial v^2} + K\sqrt{E} = 0 \qquad (\alpha)$$

suponiendo que $K = \text{const}$, para las condiciones iniciales

$$E(u, 0) = 1, \quad E_v(u, 0) = 0. \qquad (\beta)$$

Consideremos tres casos:

1. $K = 0$. A base de la ecuación (α) hallamos:

$$\sqrt{E} = \varphi(u)v + \psi(u).$$

En virtud de las condiciones iniciales (β), tenemos: $\psi(u) \equiv 1$ y $\varphi(u) \equiv 0$. De tal modo, la forma métrica se presenta

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \qquad \text{(A)}$$

2. $K > 0$. Integrando la ecuación (α) como una ecuación lineal de segundo orden, obtenemos la ecuación general

$$\sqrt{E} = \varphi(u)\cos(\sqrt{K}\ v) + \psi(u)\operatorname{sen}(\sqrt{K}\ v).$$

Para satisfacer las condiciones iniciales (β), hay que elegir funciones de integración arbitrarias $\varphi(u) \equiv 1$ y $\psi(u) \equiv 0$. De tal modo, la forma métrica tiene el aspecto:

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K}\ v)\,du^2 + dv^2. \qquad \text{(B)}$$

3. $K < 0$. En este caso la solución general de la ecuación (α) será:

$$\sqrt{E} = \varphi(u)e^{\sqrt{-K}\,v} + \psi(u)e^{-\sqrt{-K}\,v}. \qquad \text{(B)}$$

En virtud de las condiciones iniciales

$$\sqrt{E(u, 0)} = \varphi(u) + \psi(u) \equiv 1,$$
$$(\sqrt{E(u, 0)})_v = (\varphi(u) - \psi(u))\sqrt{-K} = 0.$$

De aquí

$$\varphi(u) \equiv \psi(u) \equiv \frac{1}{2}$$

y

$$\sqrt{E} = \frac{e^{\sqrt{-K}\,v} + e^{-\sqrt{-K}\,v}}{2} = \operatorname{ch}(\sqrt{-K}\ v).$$

La forma métrica tiene el aspecto:

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}\ v)\,du^2 + dv^2. \qquad \text{(C)}$$

De tal modo, vemos que *en coordenadas semigeodésicas con la línea básica geodésica la forma métrica de una superficie de curvatura constante K se determina únicamente por el valor numérico de K.*

Ahora, tomemos dos puntos arbitrarios M_1 y M_2 sobre la superficie S, estimando cada uno de ellos como origen de un sistema de coordenadas semigeodésicas. La dirección de las geodésicas básicas puede elegirse bien arbitrariamente. Denotemos con U_1 el dominio de existencia del sistema semigeodésico con el punto inicial M_1, y con U_2, el de existencia del sistema semigeodésico con el punto inicial M_2.

Si el número positivo ε es suficientemente pequeño, entonces para $-\varepsilon < u < +\varepsilon$, $-\varepsilon < v < +\varepsilon$ el punto que tenga coordenadas (u, v) del primer sistema, pertenece a U_1, perteneciendo a U_2 el punto con coordenadas (u, v) del segundo sistema.

Sean Q_1 y Q_2 dominios determinados por las desigualdades $-\varepsilon < u < +\varepsilon$, $-\varepsilon < v < +\varepsilon$ (Q_1 y Q_2 tienen una forma parecida al cuadrado) en los sistemas de coordenadas primero y el segundo, respectivamente. De los razonamientos recién expuestos se deduce que la forma métrica del dominio Q_1 en las coordenadas del primer sistema coincide con la del Q_2 en las del segundo sistema. Por ende, si establecemos correspondencia entre los puntos de dichos dominios a base de la igualdad de las coordenadas, entonces esta correspondencia será isométrica. De tal modo, desde el punto de vista de la geometría interior de la superficie S, los dominios Q_1 y Q_2 son congruentes. Del hecho de que se eligen arbitrariamente las geodésicas básicas en los sistemas de coordenadas usados en este razonamiento, se desprende que el conjunto de desplazamientos congruentes sobre la superficie S es transitivo respecto a los elementos lineales. El teorema queda demostrado.

La investigación aducida de la forma métrica de una superficie de curvatura constante permite enunciar también el teorema siguiente:

Cualesquiera que sean dos superficies de una misma curvatura constante, cada porción suficientemente pequeña de cualquiera de ellas puede ser aplicada isométricamente sobre cierta porción de la otra.

Dos superficies de curvatura constante igual, localmente, tienen geometría interior igual.

Hagamos notar que dos superficies que tengan curvaturas constantes diferentes, no pueden ser isométricas una respecto a la otra. En efecto, si en algunas coordenadas estas superficies tuvieran formas métricas iguales, entonces, al calcular las curvaturas totales de dichas superficies, deberíamos obtener constantes iguales.

§ 228. A base de todo lo expuesto, llegamos a concluir lo siguiente: al investigar localmente la geometría interior de las superficies de una curvatura constante dada, es suficiente estudiar sólo algún representante de esta clase.

Consideremos tres casos de valores posibles de la curvatura total $K = \text{const}$: $K = 0$, $K > 0$ y $K < 0$.

1) La superficie más elemental de curvatura nula constante es el plano. La geometría interior de un plano es la planimetría de Euclides.

Esta viene determinada por la forma métrica

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \tag{*}$$

Como la forma métrica de cualquier superficie de curvatura nula constante puede reducirse a (*), entonces cada porción suficientemente pequeña de tal superficie puede ser aplicada isométricamente o, como se dice, desarrollada sobre el plano. En virtud de ello, las superficies de curvatura nula se llaman *desarrollables*. Al mismo tiempo, las superficies desarrollables pueden concebirse como superficies obtenidas en el proceso de deformación de un plano o de una porción del mismo, o como superficies compuestas por porciones planas deformadas.

Por ejemplo, un cilindro parabólico se obtiene mediante la deformación de un plano entero. En total, su geometría interior es idéntica a la planimetría de Euclides.

Un cilindro circular se obtiene mediante la deformación de una franja plana; al mismo tiempo, deben unirse de dos en dos los puntos situados en los bordes de esta franja. Localmente, el cilindro circular tiene geometría interior de Euclides, no obstante, en total, su geometría difiere sustancialmente de la del plano euclidiano.

Lo mismo puede decirse también acerca del cono, cuyo ejemplo es cómodo para mostrar el movimiento en el sentido de la geometría interior y aclarar el sentido de las restricciones en los teoremas referentes a este concepto.

Designemos con D una parte de un cono circular, cubierta tan sólo una vez por un círculo con el centro en el punto M (el lector puede imaginarse el cono en forma de un modelo de madera, y el círculo hecho de papel). Cada otra parte del cono que pueda cubrirse con el mismo círculo, es isométrica a D. De tal modo, los movimientos del círculo sobre el cono son movimientos en el sentido de la geometría interior. La no identidad de los movimientos en el sentido de la geometría interior del cono respecto a los movimientos en el espacio, se expresa evidentemente con la deformación del círculo durante su movimiento sobre el cono.

Al desplazarse el círculo, podemos hacer coincidir su centro situado inicialmente en el punto M, con cualquier punto M' del cono. No obstante, si el punto M' está dado cerca del vértice del cono, entonces habrá que limitar correspondientemente el tamaño del círculo. En todo caso, si la distancia entre el punto M' y el vértice es menor que el radio del círculo, entonces, al coincidir el centro con M', el círculo no cabrá sobre el cono; además, hay que tener en cuenta que la parte del cono próxima al vértice, puede cubrirse varias veces con el círculo (por eso en los teoremas del movimiento sobre una superficie se trata de su porción suficientemente pequeña).

2) La superficie más elemental de curvatura positiva constante $K > 0$ es una esfera, cuyo radio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Ubiquemos el centro de la esfera en el origen de un sistema ortogonal de coordenadas cartesianas del espacio e introduzcamos sobre la esfera coordenadas interiores u, v iguales a las geográficas (es decir, a la longitud y la latitud) multiplicadas por R. En el espacio, cada punto de la esfera será determinado por las ecuaciones

$$x = R\cos\frac{u}{R}\cos\frac{v}{R},$$
$$y = R\,\mathrm{sen}\frac{u}{R}\cos\frac{v}{R},$$
$$z = R\,\mathrm{sen}\frac{v}{R}.$$

Entonces, en cualquier parte de la esfera exenta del polo superior y del interior, para los cuales $v = \pm\frac{1}{2}\pi R$, tenemos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \cos^2\frac{v}{R}\,du^2 + dv^2.$$

Suponiendo aquí $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, obtendremos:

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K}\,v)\,du^2 + dv^2,$$

lo cual coincide exactamente con la expresión (B) hallada en el párrafo antecedente.

De tal modo, el sistema u, v es un sistema semigeodésico, cuya línea básica lo es el ecuador en el plano $z = 0$.

Deformando cierta parte de la esfera, podemos obtener un conjunto infinito de otras superficies con curvatura positiva constante.

3) Una de las superficies más elementales de curvatura negativa constante $K < 0$ es *la seudoesfera*.

Ahora, vamos a ofrecer la descripción de esta superficie.

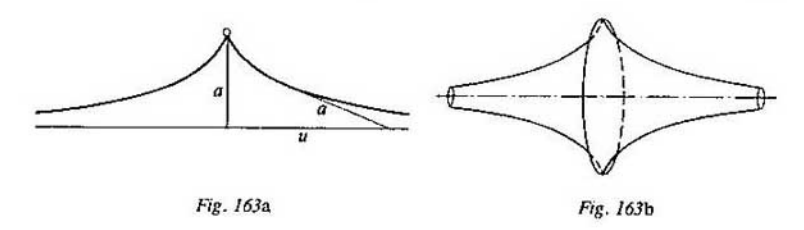


*Fig. 163*a *Fig. 163*b

Examinemos una línea plana conocida con el nombre de tractriz, caracterizada por la propiedad siguiente: el segmento de su tangente desde el punto de tangencia hasta el de intersección con cierta recta determinada, es una magnitud constante.

Para no gastar tiempo en razonamientos prolijos, pediremos al lector que, al examinar la fig. 163a, donde está representada *una tractriz*, adopte sin demostraciones algunas de sus peculiaridades.

En la fig. 163a, la longitud del segmento constante de la tangente está denotada con la letra a, la recta, por la cual se desliza un extremo de este segmento, con la letra u. Ante todo, es evidente que la tractriz tiene un punto de retroceso situado a una distancia a respecto a u; es el punto de la tractriz más alejado de u. Desde el punto de retroceso parten dos ramas recíprocamente simétricas, cada una de las cuales se aproxima indefinidamente hacia la recta u. De tal modo, esta recta es la asíntota de la tractriz. También es fácil comprender que en los puntos no singulares la tractriz tiene convexidad hacia la asíntota. La superficie formada por el giro de la tractriz alrededor de la asíntota, se llama *seudoesfera* (fig. 163 b).

La seudoesfera tiene dos partes que constan de puntos regulares; cada una de estas dos partes, alejándose al infinito, se encoge hacia el eje de revolución. Estas partes están unidas una con la otra a lo largo de la arista de retroceso. De acuerdo con nuestra definición de la superficie (véase el § 225), tenemos que considerar que la arista de retroceso no pertenece a la superficie. En lo sucesivo, al hablar sobre la seudoesfera, tendremos en cuenta una de sus dos partes regulares. Ahora, demostraremos que la seudoesfera tiene una curvatura negativa constante en todos los puntos. Para ello, baste demostrar que la curvatura de la seudoesfera es constante (y negativa) a lo largo de alguno de sus meridianos.

Elijamos un sistema ortogonal cartesiano (x, y, z) de modo que el eje x coincida con el de revolución de la seudoesfera, y el plano $x = 0$ contenga la arista de retroceso. Examinemos el meridiano de la seudoesfera situado en el primer cuadrante del plano (x, y); sea $y = f(x)$ su ecuación. Para todo $x > 0$ tendremos $a > y > 0$; además, dado que, al crecer x, el punto de la tractriz se aproxima al eje x, entonces $y' < 0$, y como la convexidad de la tractriz mira hacia el eje x, entonces $y'' > 0$.

Designemos con M un punto arbitrario del meridiano $y = f(x)$ y construyamos en este punto una normal exterior de la seudoesfera. Tomando en consideración que las direcciones principales de la superficie de revolución son direcciones de su meridiano y latitud, calcularemos las curvaturas principales de la seudoesfera en el punto M.

La normal de la seudoesfera da hacia la concavidad de la curva $y = f(x)$, por eso la curvatura principal $\frac{1}{R_1}$ correspondiente a la dirección del meridiano, es positiva y exactamente igual a la curvatura del referido meridiano, es decir,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

La curvatura de la latitud es $\frac{1}{y}$; por consecuencia, la segunda curvatura principal $\frac{1}{R_2}$ puede determinarse con la fórmula

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos\varphi}{y},$$

donde φ es el ángulo entre la normal y el segmento y. Evidentemente, este ángulo es igual al de inclinación de la tangente al eje x, por consiguiente, $\operatorname{tg}\varphi = y'$ y $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$.

De aquí

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}.$$

Ahora, podemos expresar la curvatura total $K = \frac{1}{R_1R_2}$ en los puntos del meridiano $y = f(x)$ con la fórmula

$$K = -\frac{y''}{y(1+y'^2)^2}. \tag{1}$$

Construyamos en el punto $M(x, y)$ una tangente a la curva $y = f(x)$ y denotemos con $(X, 0)$ las coordenadas del punto de intersección de esta tangente con el eje x. De la ecuación

$$Y - y = y'(X - x),$$

para $Y = 0$, hallamos

$$X - y = -\frac{y}{y'}.$$

Según la definición de la tractriz,

$$X - x = -a\cos\varphi \ (a = \text{const}).$$

De tal modo, tenemos la igualdad

$$\frac{y}{y'} = a\cos\varphi.$$

Sustituyendo $\cos\varphi$ con la expresión $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, obtendremos la ecuación diferencial de la tractriz

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'} = -a.$$

De aquí

$$y'^2(a^2 - y^2) = y^2,$$
$$y''(a^2 - y^2) = y(1 + y'^2).$$

De estas dos últimas relaciones hallamos:

$$y'' = \frac{y'^2(1+y'^2)}{y},$$

de donde, en virtud de (1),

$$K = -\frac{y'^2}{y^2(1+y'^2)}$$

A consecuencia de la ecuación (2) tenemos, al fin:

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Con esto mismo queda demostrado que en todos los puntos la seudoesfera tiene una misma curvatura negativa igual a $-\frac{1}{a^2}$, donde a es un parámetro de la tractriz, mediante cuya revolución se ha formado la seudoesfera dada. Evidentemente, existe una seudoesfera con cualquier curvatura negativa dada con anterioridad. Para construir un meridiano de una seudoesfera con una curvatura dada, sólo hay que integrar la ecuación (2) para un valor dado del parámetro a. A base de lo anterior podemos afirmar que en el entorno de cualquier punto de la seudoesfera la forma métrica tiene el aspecto siguiente en las coordenada semigeodésicas (con la geodésica básica)

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}\, v)\, du^2 + dv^2$$

(§ 227, fórmula (C)).

Deformando cierto trozo de la seudoesfera, se puede obtener infinidad de otras superficies de curvatura negativa constante

Así pues, cualquiera que sea K $(-\infty < K < +\infty)$, en el espacio de Euclides existe una superficie de curvatura constante K.

En lo que se refiere a la solución del problema de Beltrami, llegamos a la conclusión que sigue: si en el espacio euclidiano existen superficies, sobre las cuales se realiza localmente la geometría de Lobachevski, entonces una de tales superficies será o bien esfera, o bien plano, o bien seudoesfera.

Notemos que la construcción de las coordenadas semigeodésicas de la superficie se efectúa del mismo modo que la de las primeras coordenadas en el plano de Lobachevski (véase el § 224). Por eso, en las coordenadas semigeodésicas, la forma métrica de una superficie con la geometría interior de Lobachevski debe coincidir con la forma métrica del plano de Lobachevski, expresada en las primeras coordenadas. Al final del § 224 encontramos la expresión de la forma métrica del plano de Lobachevski en las primeras coordenadas ξ, η:

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2\frac{\eta}{R}\, d\xi^2 + d\eta^2. \qquad (**)$$

Nos queda cotejar esta expresión con las formas métricas de la esfera, del plano y la seudoesfera, las cuales, según sabemos, tienen el aspecto siguiente en las coordenadas semigeodésicas, respectivamente:

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K}\, v)\, du^2 + dv^2,$$
$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$
$$ds^2 = \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}\, v)\, du^2 + dv^2.$$

Vemos que (**) coincide precisamente con la última de las tres formas $\left(\text{para } \frac{1}{R} = \sqrt{-K}\right)$.

De aquí sigue el teorema de Beltrami:

En el entorno de cada punto de una seudoesfera tiene lugar la geometría de Lobachevski.

Cortemos una seudoesfera a lo largo de alguno de sus meridianos; obtendremos un dominio simplemente conexo D acotado por la arista de retroceso y los bordes del corte. Sea D' un dominio de un plano de Lobachevski, isométrico al dominio D. Procuraremos describir el dominio D' *) con términos de la geometría de Lobachevski. Como los meridianos son las geodésicas de la seudoesfera, entonces, en la aplicación isométrica de D sobre D' los meridianos se

*) Habría que demostrar la existencia del dominio D', mas, no nos detendremos en esto.

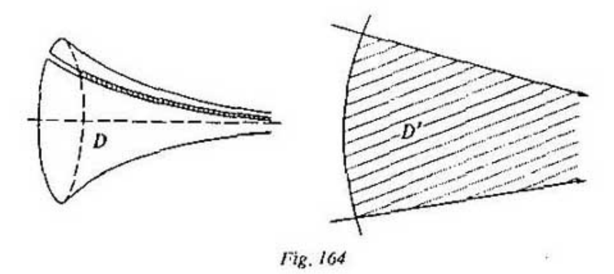


Fig. 164

aplicarán sobre cierto sistema de rectas. Será un sistema de rectas paralelas una a otra en el sentido de Lobachevski. Esto último se desprende de la aproximación asintótica de los meridianos y, por lo tanto, de sus aplicaciones. Evidentemente, serán aplicaciones de las latitudes las trayectorias ortogonales del referido sistema de rectas paralelas, es decir, los oriciclos (más bien, los arcos de oriciclos).

Así pues, el dominio D' está acotado por dos rayos de un haz parabólico (véase el § 39) y el arco de un oriciclo ortogonal a este haz. En la fig. 164 este dominio está señalado con rayado.

Mediante cierto procedimiento artificial en el espacio euclidiano se puede realizar también una parte más extensa del plano de Lobachevski. Para ello, imaginémonos un conjunto numerable de seudoesferas iguales y coincidentes una con otra. En la disposición de estas seudoesferas concebimos un determinado orden, a saber: sobre la seudoesfera designada con A_0 está superpuesta la A_1, sobre ésta, la seudoesfera A_2, etc.; además, la seudoesfera A_0 misma está superpuesta sobre la A_{-1}, y esta última, sobre la A_{-2}, etc. Ahora, cortemos todas las seudoesferas a lo largo de alguno de sus meridianos comunes. Para el observador que esté mirando la sección del lado del eje, un borde del corte de cada seudoesfera es izquierdo y el otro, derecho. Unamos el borde izquierdo de cada seudoesfera A_n con el derecho de la A_{n+1}. Entonces resultará una superficie Σ que puede concebirse en forma de una cinta sin fin arrollada apretadamente en un molde seudoesférico. La superficie Σ, evidentemente, es isométrica a la parte del plano de Lobachevski que está del lado de la concavidad de cierto oriciclo.

Puede decirse de otro modo: la parte del plano de Lobachevski situada del lado de la concavidad del oriciclo, puede ser realizada en el espacio euclidiano en forma de una envoltura sin fin (o, como se dice, una superficie que cubre) de la seudoesfera.

Como ya señalábamos antes, Hilbert había demostrado que en el espacio de Euclides no existía una superficie que fuera isométrica a TODO el plano de Lobachevski. De tal modo, la tentativa de Beltrami de realizar la planimetría euclidiana en forma de la geometría interior de cierta superficie, no podía ser coronada por el éxito.

A pesar de esto, las investigaciones de Beltrami revisten una gran importancia de principio.

Primero, incluso una realización parcial de la planimetría no euclidiana en el espacio euclidiano cambió la actitud escéptica de los geómetras ante las obras de Lobachevski. Por lo tanto, los descubrimientos de Beltrami jugaron un papel importante en el desarrollo general de la ciencia.

Segundo, gracias a Beltrami, la planimetría de Euclides, la de Lobachevski y la geometría sobre la esfera resultaron unidas en un esquema geométrico-diferencial general. Precisamente, se supo que todos estos sistemas geométricos se realizaban sobre una superficie de curvatura constante K y correspondían a los casos de $K = 0$, $K < 0$ y $K > 0$.

En virtud de todo lo expuesto, queda determinada la fuente analítica de la estrecha dependencia existente entre la geometría de Lobachevski y la geometría esférica.

En rigor, la forma métrica de la esfera

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K}\, v)\, du^2 + dv^2 \qquad (*)$$

y la forma métrica de la seudoesfera

$$ds^2 = \mathrm{ch}^2(\sqrt{-K}\, v)\, du^2 + dv^2 \qquad (**)$$

son diferentes en el dominio real. Más, si se admiten valores imaginarios para la magnitud $\sqrt{K}$ o para $\sqrt{-K}$, entonces, como se sabe,

$$\cos(\sqrt{K}\, v) = \mathrm{ch}(\sqrt{-K}\, v).$$

De tal modo, al ser sustituido $\sqrt{K}$ por $\sqrt{-K}$, las formas (*) y (**) se convierten una en otra.

6. Deducción de las relaciones métricas fundamentales en la geometría de Lobachevski

§ 229. En la presente sección ofreceremos una serie de proposiciones de la geometría de Lobachevski que han quedado al margen de la línea fundamental de nuestra exposición.

No encontraremos más ningunas dificultades de principio. Tras establecidas las más principales fórmulas métricas de la geometría de Lobachevski (§§ 216 — 222), todos los demás problemas de carácter métrico que surjan en esta geometría, se resuelven fácilmente aplicando las fórmulas obtenidas.

En la base de nuestros cálculos pondremos cierto sistema de coordenadas beltramianas (x, y). Como es sabido (véase el § 216), las coordenadas beltramianas de un punto arbitrario del plano de Lobachevski están ligadas mediante la relación

$$x^2 + y^2 < 1. \qquad (*)$$

Consideremos un plano euclidiano Σ con un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas (x, y). La relación (*) determina un dominio interior de un círculo unitario k_1 sobre Σ. Comparemos un punto del plano Σ (situado dentro del círculo k_1), cuyas coordenadas cartesianas son los números x, y, con un punto arbitrario del plano de Lobachevski, cuyas coordenadas cartesianas son los mismos x, y. Con esto mismo estableceremos cierta aplicación especial de todo el plano de Lobachevski sobre el interior del círculo k_1; para esta aplicación serán imágenes de las rectas de Lobachevski las cuerdas del círculo k_1 (desde luego, con los extremos excluidos).

Introduzcamos una métrica artificial dentro del círculo k_1. A saber, llamaremos distancia entre dos puntos internos del círculo k_1 a un número igual a su distancia entre sus preimágenes sobre el plano de Lobachevski, convendremos en considerar valor del ángulo entre dos cuerdas a y b un número igual al valor del ángulo entre dos rectas de Lobachevski que sirven de preimágenes de las cuerdas a y b; de manera análoga determinaremos las áreas de dominios.

Prácticamente, esto significa que el cálculo de las magnitudes geométricas fundamentales lo debemos llevar en coordenadas cartesianas mediante las fórmulas de la geometría de Lobachevski que expresen las correspondientes magnitudes en coordenadas de Beltrami.

De tal manera obtenemos cierta realización del plano de Lobachevski dentro del círculo euclidiano k_1. Manejaremo esta realización en lo sucesivo.

Es importante notar que nuestras deducciones tendrán un carácter general, es decir, no estarán relacionadas con las particularidades de la realización elegida. Esto está claro, pues la relación (*) y las fórmulas métricas fundamentales de la geometría de Lobachevski deducidas

por nosotros a partir de axiomas de la geometría de Lobachevski, independientemente de en qué objetos se consideren realizados dichos axiomas*).

§ 230. LA EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN $\Pi(l)$ A TRAVÉS DE FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES.

Sean dados sobre el plano de Lobachevski una recta arbitraria a y un punto O a una distancia $l > 0$ de esta recta. Del punto O bajemos una perpendicular OP a la recta a y, a través de O, tracemos una recta b paralela a la recta a. El ángulo agudo α entre las rectas b y OP se llama ángulo de paralelismo para el segmento $OP = l$, constituyendo la función del argumento l: $\alpha = \Pi(l)$ (véase el § 33). Ahora, mostraremos que $\Pi(l)$ se expresa mediante una fórmula bien sencilla a través de las funciones trascendentes elementales del argumento l.

Ubiquemos el origen de las coordenadas beltramianas en el punto O, dirijamos el eje Ox según el segmento OP; el punto P tendrá las coordenadas beltramianas $x = x_1$, $y = 0$. A base de lo expuesto en el § 218, la recta a viene determinada por la ecuación $x = \operatorname{th}\frac{l}{R} = x_1 (= \text{const})$; por consiguiente, al representar los objetos del plano de Lobachevski dentro del círculo k_1, la recta a se representará por una cuerda perpendicular al eje Ox (fig. 165), la recta b, por la cuerda convergente con la cuerda a en la frontera del círculo k_1 (esto deriva de la definición del paralelismo de las rectas en la geometría de Lobachevski). Como fue mostrado en el § 221, la fórmula que determina el ángulo entre dos direcciones junto a cierto punto M sobre el plano de Lobachevski, coincide con la fórmula de Euclides (II), del § 215, si M se halla en el origen de coordenadas. De aquí concluimos que el ángulo euclidiano entre la cuerda b y el segmento OP es igual a α.

Tenemos una relación trigonométrica euclidiana $x_1 = \cos\alpha$. Junto con ésta, tenemos la dependencia $x_1 = \operatorname{th}\frac{l}{R}$ (véase la primera de las fórmulas (4) del § 218). De estas últimas relaciones obtenemos: $\cos\alpha = \operatorname{th}\frac{l}{R}$, o, después de transformaciones no complicadas, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{l}{R}}$. Tomando en consideración que $\alpha = \Pi(l)$, de aquí encontramos la fórmula de Lobachevski:

$$\Pi(l) = 2\operatorname{arctg} e^{-\frac{l}{R}}.$$

§ 231. TRIGONOMETRÍA DE LOBACHEVSKI.

Ahora, estableceremos relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo no euclidiano. Consideremos, ante todo, un triángulo rectangular ABC con los catetos $CB = a$, $CA = b$, con la hipotenusa $AB = c$ y los ángulos agudos $CAB = \alpha$, $CBA = \beta$. Ubiquemos el origen de coordenadas beltramianas en el punto A, dirigiendo el eje de abscisas según el cateto AC (fig. 166). Denotemos con x_1, y_1 las coordenadas del punto C, con x_2, y_2, las del punto B. Tenemos $x_1 = \operatorname{th}\frac{b}{R}$, $y_1 = 0$, $x_2 = x$; trataremos de determinar la coordenada y_2 de la

---

*) No obstante, no podemos afirmar que hemos demostrado la completitud del sistema de los axiomas de la geometría bidimensional de Lobachevski (el concepto de completitud del sistema de axiomas está expuesto en el § 75). Para ello, habría que deducir las fórmulas métricas fundamentales de la geometría de Lobachevski sin acudir a axiomas especiales. Tal conclusión fue dada por H. Liebmann, mas, se saca mediante razonamientos bastante largos (véase el apéndice VII en el libro de *N. I. Lobachevski,* Investigaciones geométricas de la teoría de las líneas paralelas (Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий.) Una deducción más sencilla fue sacada por A. V. Pogorélov hace poco; está expuesta en el libro «Fundamentos de la geometría»

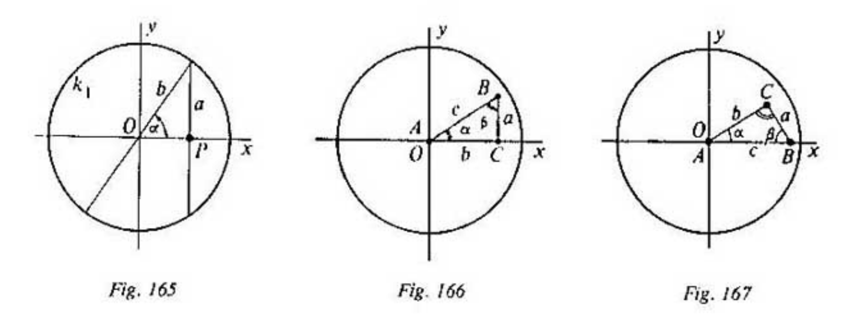


Fig. 165 *Fig. 166* *Fig. 167*

fórmula (3) del § 217. En esta fórmula, suponiendo $\rho(B, C) = a$, hallaremos:

$$a = \frac{R}{2} \ln \frac{1 - x_1^2 + y_2\sqrt{1 - x_1^2}}{1 - x_1^2 - y_2\sqrt{1 - x_1^2}} = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + y_2 \operatorname{ch} \frac{b}{R}}{1 - y_2 \operatorname{ch} \frac{b}{R}}.$$

De aquí

$$y_2 = \frac{\operatorname{th} \frac{a}{R}}{\operatorname{ch} \frac{b}{R}}.$$

Aplicando la relación euclidiana $y_2 = x_1 \operatorname{tg} \alpha$ al triángulo ABC como objeto de la geometría de Euclides, obtenemos la fórmula de la geometría de Lobachevski:

$$\operatorname{th} \frac{a}{R} = \operatorname{sh} \frac{b}{R} \operatorname{th} \alpha, \tag{1}$$

(la dependencia entre dos catetos y un ángulo agudo).

Ahora, hagamos notar que la longitud euclidiana c_e del segmento AB se expresa a través de la longitud c del referido segmento en el sentido de la geometría de Lobachevski mediante la fórmula $c_e = \operatorname{th} \frac{c}{R}$ (para demostrarlo, basta dirigir el eje de abscisas desde el punto A a lo largo del segmento AB y aplicar la primera de las fórmulas (1) del § 218). Tomando en consideración esto, de la fórmula euclidiana $b_e = c_e \cos \alpha$ obtenemos de inmediato la fórmula siguiente de la geometría de Lobachevski:

$$\operatorname{th} \frac{b}{R} = \operatorname{th} \frac{c}{R} \cos \alpha \tag{2}$$

(la dependencia entre la hipotenusa, un cateto y el ángulo agudo adyacente).

Ahora, ubiquemos los ejes de coordenadas respecto al triángulo ABC, así como están en la fig. 167. Expresemos el ángulo β mediante la fórmula (3) del § 221. Ante todo, en las expresiones (7) del § 220 para los coeficientes E, F, G sustituyamos la coordenadas del punto B :

$x = \operatorname{th}\frac{c}{R}$; $y = 0$; la fórmula (3) del § 221 tendrá el aspecto siguiente:

$$\cos\beta = \frac{dx\,\delta x + \left(1 - \operatorname{th}^2\frac{c}{R}\right) dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + \left(1 - \operatorname{th}^2\frac{c}{R}\right) dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \left(1 - \operatorname{th}^2\frac{c}{R}\right)\delta y^2}}.$$

Considerando que dx, dy corresponden al desplazamiento según el eje Ox ($dy = 0$), δx, δy corresponden al desplazamiento según la recta BC $\left(\frac{\delta y}{\delta x} = -\operatorname{th}\beta_e\right.$, donde β_e es el valor euclídeo del ángulo $\left.ABC\right)$, y colocando

$$1 - \operatorname{th}^2\frac{c}{R} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{c}{R}},$$

de la igualdad antecedente obtenemos:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2\beta_e}{\operatorname{ch}^2\frac{c}{R}}}}.$$

Comparando esta última relación con la fórmula conocida $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}$, hallamos

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R}\cdot\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta_e. \qquad (*)$$

Notemos que en el centro del círculo k_1 los ángulos euclidianos coinciden con los ángulos en el sentido de Lobachevski; por lo tanto, $\alpha_e = \alpha$ y $\operatorname{tg}\beta_e = \operatorname{ctg}\alpha_e = \operatorname{ctg}\alpha$. De aquí y de la fórmula (*) obtenemos una nueva relación de la trigonometría de Lobachevski:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R}\cdot\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha \qquad (3)$$

(la dependencia entre la hipotenusa y dos ángulos agudos).

La fórmula (3) establece la dependencia entre una magnitud lineal y las magnitudes angulares. En la geometría euclidiana no hay un análogo para esta fórmula, pues en ella tiene lugar la semejanza de figuras.

Volvamos a la posición del triángulo de la fig. 166. Tenemos una relación euclidiana

$$c_e^2 = x_1^2 + y_2^2, \quad \text{donde } c_e = \operatorname{th}\frac{c}{R}, \quad x_1 = \operatorname{th}\frac{b}{R}, \quad y_2 = \frac{\operatorname{th}\frac{a}{R}}{\operatorname{ch}\frac{b}{R}};$$

tras cálculos no complicados, de aquí obtenemos:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}\cdot\operatorname{ch}\frac{b}{R} \qquad (4)$$

(la dependencia entre la hipotenusa y dos catetos).

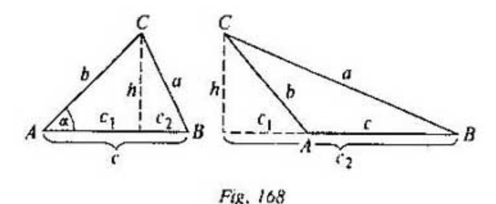


Fig. 168

Señalaremos dos fórmulas más, cuya deducción la efectuará fácilmente el lector mismo:

$$\operatorname{sh}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{c}{R}\operatorname{sen}\alpha \tag{5}$$

(la dependencia entre la hipotenusa, un cateto y el ángulo agudo opuesto) y

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R}\sin\beta = \cos\alpha \tag{6}$$

(la dependencia entre un cateto y dos ángulos agudos).

§ 232. Ahora, sea ABC un triángulo arbitrario del plano de Lobachevski. Trazando en él la altura h (como se muestra en la fig. 168) y aplicando la fórmula (4); obtenemos

$$\operatorname{ch}\frac{h}{R} = \frac{\operatorname{ch}\frac{b}{R}}{\operatorname{ch}\frac{c_1}{R}} = \frac{\operatorname{ch}\frac{a}{R}}{\operatorname{ch}\frac{c_2}{R}}$$

(los segmentos c_1 y c_2 se ofrecen en la fig. 168). De aquí

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{\operatorname{ch}\frac{b}{R}}{\operatorname{ch}\frac{c_1}{R}}\operatorname{ch}\frac{c_2}{R} = \frac{\operatorname{ch}\frac{b}{R}}{\operatorname{ch}\frac{c_1}{R}}\operatorname{ch}\left(\frac{c}{R} \mp \frac{c_1}{R}\right) = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\left(\operatorname{ch}\frac{c}{R} \mp \operatorname{sh}\frac{c}{R}\cdot\operatorname{th}\frac{c_1}{R}\right);$$

pero a consecuencia de la fórmula (2) tenemos:

$$\operatorname{th}\frac{c_1}{R} \pm \operatorname{th}\frac{b}{R}\cos\alpha.$$

De las dos últimas relaciones se deduce la fórmula

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\cdot\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha. \tag{A}$$

§ 233. Las fórmulas (1) — (6), al igual que la fórmula (A), fueron establecidas antes, en el § 61. Sin embargo, en el § 61 estas fórmulas fueron demostradas por nosotros sólo para un modelo especial de la geometría de Lobachevski. Aquí demostramos las fórmulas (1) — (6), (A) partiendo de axiomas de la geometría de Lobachevski, sin hacer suposiciones algunas acerca de la naturaleza de los elementos geométricos. Con esto mismo dejamos demostradas las fórmulas (1) — (6), (A) para cualquier modelo de la geometría de Lobachevski.

En el § 62 cotejamos la fórmula (A) con la fórmula básica de la trigonometría esférica:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos\alpha. \tag{B}$$

La fórmula (B) pasa a (A) mediante la sustitución de R por Ri ($i = \sqrt{-1}$). Esto quiere decir que la trigonometría de Lobachevski puede estimarse como trigonometría sobre la esfera de un radio imaginario. Tal dependencia entre las fórmulas de Lobachevski y fórmulas de la trigonometría esférica se explica exhaustivamente desde el punto de vista geométrico-diferencial. Es que la geometría de Lobachevski es la trigonometría de curvatura negativa constante $K = -\frac{1}{R^2}$, la geometría sobre la esfera es la geometría de curvatura positiva constante $K = \frac{1}{R^2}$. Con la sustitución de R por Ri, la forma métrica de la esfera pasa a forma métrica del plano de Lobachevski. Al mismo tiempo, todas las relaciones métricas de la geometría esférica también pasan a correspondientes relaciones de la geometría de Lobachevski.

Capítulo IX

FORMAS ESPACIALES DE LA GEOMETRÍA DE CURVATURA CONSTANTE

1. Variedades bidimensionales con métrica geométrico-diferencial

§ 234. Sabemos que cada superficie del espacio euclidiano tiene una geometría interior bien determinada. Pero la geometría interior, por su parte, no determina ni mucho menos la superficie que la posee. Efectivamente, mediante la deformación se puede obtener infinidad de superficies diferentes en forma, pero con una geometría interior común.

De tal modo, la estructura de la disposición espacial de los puntos de una superficie es una circunstancia en mucho grado aleatoria para su geometría interior. Y, en todo caso, si se conoce la forma métrica de la superficie para cierto sistema de coordenadas interiores, entonces todos los hechos de la geometría interior de esta superficie pueden obtenerse sin apelación alguna al espacio circundante. Por eso surge la idea de generalizar el concepto de geometría interior de modo que se pueda hacer abstracción absoluta del espacio circundante.

La conveniencia de tal generalización podemos verla, en particular, si acudimos al material de la sección antecedente. Así, sabemos que la métrica del plano de Lobachevski, al igual que la de cada superficie del espacio euclidiano, es determinada por la forma cuadrática. Abstractamente, el plano de Lobachevski existe, esto fue demostrado al final del capítulo III. Mas, es imposible superponerlo TOTALMENTE sobre alguna superficie del espacio de Euclides. En el caso dado, al igual que en muchos otros problemas geométricos, resultan ser demasiado estrechos los marcos de la teoría clásica de las superficies.

Al expandirlos, llegaremos a una concepción de la geometría tan general que podremos incluir en un esquema sistemas geométricos más variados y, entre ellos, el de Lobachevski.

§ 235. Sea dado algún conjunto R (para nosotros es indiferente la naturaleza concreta de sus elementos). Llamaremos puntos a los elementos de este conjunto, denotándolos con las letras x, y, z, etc. Sea determinado un número $\rho(x, y)$ por concepto de distancia para cada par de puntos x, y. El conjunto R con las distancias dadas entre sus puntos se llama *espacio métrico*, si su función $\rho(x, y)$ satisface las condiciones:

1. $\rho(x, x) = 0$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$ con $x \neq y$;
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Las condiciones señaladas se llaman axiomas del espacio métrico; la última de ellas se denomina axioma del triángulo.

Aunque estos axiomas presentan exigencias bien poco rigurosas ante la función $\rho(x, y)$, no obstante, dan la posibilidad de establecer una serie de importantes conceptos y teoremas para un espacio métrico arbitrario. Así, en cualquier espacio métrico puede definirse *el concepto de sucesión convergente de puntos;* la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ converge hacia el punto a, si $\rho(x_n, a) \to 0$. Es fácil demostrar que *una misma sucesión no puede converger hacia dos puntos diferentes.* En rigor, admitamos que $x_n \to a$ y $x_n \to b$, siendo $a \neq b$; como a consecuencia del segundo axioma $\rho(a, b) > 0$, para n suficientemente grande tenemos: $\rho(x_n, a) < \frac{1}{2}\rho(a, b)$ y

$\rho(x_n, b) < \frac{1}{2}\rho(a, b)$; pero de aquí $\rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \rho(a, b)$, lo cual contradice al tercer axioma.

Luego, de manera natural se define *el concepto de aplicación continua de un espacio métrico sobre otro*: la aplicación $x' = f(x)$ del espacio R sobre el espacio R' (es decir, la confrontación de cierto punto x' perteneciente a R' con cada punto x de R) se llama *continua* en el punto a si cada sucesión $x_1, x_2, \dots, x_n$ convergente hacia el punto a se aplica sobre la sucesión $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ convergente hacia el punto $f(a)$; simbólicamente,

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Si la aplicación $x' = f(x)$ es continua en cada punto del espacio R, se llama continua en todo el espacio o, simplemente, continua.

A título de ejemplos del espacio métrico podemos señalar, en primer lugar, el plano euclidiano (así como el espacio euclidiano) y el plano de Lobachevski (así como el espacio de Lobachevski). A continuación consideremos alguna superficie S del espacio euclidiano (suponiéndola determinada, al igual que en el § 225). No es difícil probar que dos puntos x, y cualesquiera de la superficie S pueden unirse con un arco suave o suave a trozos sobre una superficie; un arco tal es necesariamente rectificable, es decir, tiene una determinada longitud. Si llamamos distancia interior entre dos puntos x, y en la superficie S a un número $\rho(x, y)$ igual a la cota inferior de las longitudes de las líneas que unen los puntos x e y en la superficie, entonces $\rho(x, y)$ satisfará los axiomas 1 — 3 (omitimos la demostración). De tal modo, cualquier superficie con distancias interiores determinadas entre puntos sobre ella, es también un espacio métrico.

Vemos que el concepto de espacio métrico abarca todos los sistemas geométricos conocidos como casos bien particulares. Para subrayar la generalidad de este concepto, señalemos que en cualquier conjunto se puede fijar distancias entre pares de puntos, observando los axiomas 1 — 3.

Sea dado un conjunto M cualquiera con los elementos $x, y, z, \dots$ Convengamos en considerar $\rho(x, y) = 0$, si $x = y$, $\rho(x, y) = 1$, si $x \neq y$. Con esto, evidentemente, quedan satisfechos los axiomas 1 — 3 y, por consiguiente, el conjunto M con las distancias dadas es un espacio métrico.

Tal generalidad del concepto de espacio métrico indica que, para construir una teoría geométrica enjundiosa, son demasiado pobres los axiomas 1 — 3. Ahora, agregaremos una serie de nuevas exigencias más rigurosas a los axiomas 1 — 3. Con ello, obtendremos una clase concreta y, al mismo tiempo, muy general de espacios métricos; los llamaremos *variedades de Riemann* (bidimensionales) *o variedades de métrica geométrico-diferencial*.

He aquí estas exigencias.

1) Convengamos en llamar ε-entorno (ε es un número positivo) o simplemente entorno de un punto a de un espacio métrico al conjunto de todos sus puntos x, para los cuales sea válida la desigualdad $\rho(x, a) < \varepsilon$.

Exigiremos que para cada punto a del espacio exista un entorno U que permita una aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos sobre el plano euclidiano.

En el entorno U, introduciremos cierto sistema de coordenadas, a saber: llamaremos coordenadas u, v del punto a del entorno U a las coordenadas cartesianas de aquel punto de la superficie euclidiana, que corresponda a x en virtud de la referida aplicación. Las condiciones de continuidad planteadas ante esta aplicación significan lo siguiente: si x_0 es un punto constante de las coordenadas u_0, v_0, siendo x un punto variable con las coordenadas u, v, entonces, cada vez que $u \to u_0$, $v \to v_0$, tiene lugar $\rho(x, x_0) \to 0$, y viceversa, si $\rho(x, x_0) \to 0$, entonces $u \to u_0$, $v \to v_0$.

2) Tengan una parte común ciertos dos entornos con coordenadas dadas en ellos. *Exigiremos que en la parte común de los dos entornos, las coordenadas de un punto arbitrario dadas*

en un entorno, se expresen a través de las coordenadas del mismo, dadas en el otro entorno por ecuaciones unívocamente convertibles, cuyos segundos miembros tengan derivadas parciales continuas y un determinante funcional diferente de cero.

Para estas dos condiciones, llamaremos *variedad bidimensional suave* al espacio métrico.

Se puede definir el concepto de línea suave y de dirección para la variedad suave.

Llamaremos *arco suave cerrado* o, más brevemente, *segmento* en entorno U de la variedad S a un conjunto de puntos del referido entorno, cuyas coordenadas se determinen por las ecuaciones

$$u = u(t), \; v = v(t),$$

donde t pertenece a cierto intervalo cerrado $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, si 1) las funciones $u(t)$, $v(t)$ para $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ son continuas y poseen derivadas continuas, 2) si las derivadas $u'(t)$, $v'(t)$ no se anulan simultáneamente, sea cual fuere el valor de t y 3) si las funciones $u(t)$, $v(t)$ no toman simultáneamente valores iguales para dos valores diferentes de t.

Los puntos del segmento correspondientes a los valores de $t = \alpha$ y $t = \beta$ los llamaremos *extremos* del mismo.

Evidentemente, se conservan las propiedades enumeradas de las ecuaciones que determinan cierto segmento si se pasa a las coordenadas de un otro entorno cualquiera que contenga dicho segmento.

De tal modo, por cuanto, al definirse un segmento, es indiferente la elección del entorno que lo cubre, el concepto de segmento tiene un sentido invariante.

Diremos que en cada uno de sus puntos un arco suave tiene *una dirección* que se da por la relación de diferenciales $du = u'(t)\,dt$, $dv = v'(t)\,dt$ (aquí es importante que $u'(t)$ y $v'(t)$ no pueden anularse simultáneamente, pues en caso contrario la relación $du : dv$ podría ser indefinida); en el nuevo sistema de coordenadas (u^*, v^*) la dirección de la misma curva se da por la relación de diferenciales

$$du^* = \frac{\partial u^*}{\partial u} du + \frac{\partial u^*}{\partial v} dv, \quad dv^* = \frac{\partial v^*}{\partial u} du + \frac{\partial v^*}{\partial v} dv.$$

Un sistema finito de segmentos suaves (hablando en general, pertenecientes a distintos entornos de una variedad) se llama arco suave a trozos, si, con una numeración adecuada de dichos trozos, un extremo del primero de ellos coincide con un extremo del segundo, el otro extremo del segundo coincide con un extremo del tercero y así sucesivamente. Los extremos libres del primero y el último segmentos se llaman extremos de un arco suave a trozos.

Si los trozos vecinos tienen direcciones coincidentes en los extremos comunes, entonces, en este caso, el sistema de trozos constituye *un arco suave* que ha de llamarse *cerrado*, pues posee extremos (lo son los extremos libres del primero y del último segmentos).

Análogamente a esto se puede definir el concepto de arco suave abierto y suave a trozos compuesto de un conjunto numerable de segmentos $i_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ unidos de modo que un extremo del segmento i_n coincide con el comienzo del segmento i_{n+1}. Llamaremos simplemente línea a un arco suave abierto.

3) En el espacio métrico se puede definir el concepto de arco rectificable y el de su longitud, al igual que se hace en el espacio euclidiano*). *Exigiremos que cada arco cerrado fijado*

---

*) En un espacio R, sea dado un arco continuo L, es decir, dada una imagen continua de un segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, cuyos puntos (de la imagen) están marcados con los valores correspondientes de sus preimágenes del segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ y se consideran ordenados en función del crecimiento de las marcas. Examinemos un sistema arbitrario de puntos $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} \leqslant t_n = \beta$ del segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; en el arco L, le corresponde un sistema de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Compongamos la suma $\sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1})$. Si un conjunto de todas las sumas de este tipo (como un conjunto de números) está acotado, entonces el arco L se llama rectificable; la cota superior de este conjunto es la longitud del arco L.

de cualquier línea suave $u = u(t)$, $v = v(t)$) sea rectificable y que, sobre la línea suave, la longitud del arco con un extremo fijo y con un extremo variable $(u(t), v(t))$ sea una función diferenciable del parámetro t.

4) *Al fin, exigiremos que en cada entorno con un sistema de coordenadas (u, v) dado existan tres funciones continuas $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$, mediante las cuales la diferencial del arco de una línea suave $u = u(t)$, $v = v(t)$ se determina por la fórmula*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad \text{donde } du = u'(t)\,dt, \quad dv = v'(t)\,dt.$$

Al espacio metrico que satisfaga todas las condiciones planteadas, lo llamaremos *variedad geométrico-diferencial bidimensional o variedad de Riemann bidimensional.* Por lo tanto, para hacer más cómodo en el uso este concepto, es conveniente imponer también, además de las exigencias enumeradas, la condición de conexión; se puede enunciarla justamente de la misma forma que la condición de conexión de una superficie (véase el § 225).

§ 236. Convengamos en llamar ángulo entre las direcciones $du : dv$ y $\delta u : \delta v$ a la magnitud φ determinada por la igualdad

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

La magnitud que constituye aquí el segundo miembro, es invariante respecto al cambio de las coordenadas (lo que puede ser demostrado, al igual que en el § 221); por consiguiente, es indiferente la elección del sistema de coordenadas, al determinarse el ángulo.

Al fin, llamemos área del dominio D de la variedad S al valor de la integral

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

extendida sobre el dominio D. La invariación de tal definición está demostrada en el § 222.

De tal modo, el cálculo de longitudes, ángulos y áreas de una variedad geométrico-diferencial arbitraria se realiza exactamente a base de las mismas fórmulas que sobre una superficie (véase el § 225, las fórmulas (I), (II), (III)).

Luego, podemos llamar curvatura total de una variedad en su punto arbitrario a la magnitud K que se calcula mediante la fórmula que expresa la curvatura total de una superficie a través de los coeficientes de su forma métrica; de manera análoga se puede determinar la curvatura geodésica de una línea. No obstante, al calcular estas magnitudes, es preciso diferenciar dos veces los coeficientes de la forma métrica E, F, G y los segundos miembros de las ecuaciones de una línea $u = u(t)$, $v = v(t)$. Por ende, NOS VEREMOS OBLIGADOS A LIMITAR CON EXIGENCIAS ADICIONALES DE SUAVIDAD EL CONCEPTO DE UNA VARIEDAD SUAVE Y SU MÉTRICA; a saber, *supondremos que las funciones E, F, G son continuamente diferenciables hasta el segundo orden, y todas las transformaciones admisibles de las coordenadas, hasta el tercero.*

Para estas condiciones adicionales, la variedad geométrico-diferencial se llama *regular**). Sobre una variedad regular se puede determinar de manera ordinaria las líneas geodésicas: o bien como extremales del problema variacional mín $\int ds$, o bien como líneas de curvatura geodésica nula. Para hallar las geodésicas podemos valernos del sistema conocido de ecuaciones

---

*) Si se pasa a nuevas coordenadas $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$, entonces las funciones $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ correspondientes a estas coordenadas se expresan a través de E, F, G y $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}}$ (véanse las fórmulas (5) del § 221); por eso la suavidad de las funciones $\bar{u}(u, v)$, $\bar{v}(u, v)$ debe ser en uno mayor que la suavidad de las funciones E, F, G.

diferenciales:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0;$$

la familia de geodésicas coincide con la de curvas integrales de este sistema. De aquí se deduce que a través de cada punto de una variedad regular en cualquier dirección pasa una línea geodésica.

En la geometría de la variedad, las geodésicas juegan el papel de rectas.

Aplicamos todos los objetos de la geometría interior de la superficie al caso de la variedad geométrico-diferencial bidimensional abstracta. Con esto mismo obtuvimos un concepto en todo caso más amplio que el de geometría interior de una superficie del espacio euclidiano, pues abarca, por ejemplo, también la geometría del plano de Lobachevski.

Determinamos la variedad geométrico-diferencial partiendo del concepto de espacio métrico, mediante una serie de condiciones adicionales. Estas condiciones las expresamos en términos analíticos. Trataremos de revelar su sentido geométrico.

Consideremos un punto arbitrario $M_0(u_0, v_0)$ de una variedad con la forma métrica $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$. Sean E_0, F_0, G_0 los valores de las funciones E, F, G en el punto M_0. Mediante cálculos (no los vamos a aducir aquí) se puede demostrar lo siguiente:

Sean $M(u, v)$ y $M'(u + \Delta u, v + \Delta v)$ dos puntos de una variedad y $\rho(M, M')$, la distancia entre ellos; si los puntos M y M' tienden a M_0, entonces

$$\lim \frac{\rho\,(M, M')}{\sqrt{E_0 \Delta u^2 + 2F_0 \Delta u\, \Delta v + G_0 \Delta v^2}} = 1. \qquad (*)$$

Ahora, en el plano euclidiano E, tomemos en sistema de coordenadas oblicuas (u, v), cuyos vectores de escala e_1, e_2 fueron elegidos bajo las condiciones

$$|e_1| = \sqrt{E_0}, \; |e_2| = \sqrt{G_0},$$

$$\cos(e_1, e_2) = \frac{F_0}{\sqrt{E_0 G_0}}\,^{*)}.$$

Si $M^*(u, v)$ y $M^{*\prime}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ son dos puntos del plano E, entonces la distancia euclídea $\rho_E(M^*, M^{*\prime})$ entre ellos se expresa por la fórmula

$$\rho_E(M^*, M^{*\prime}) = \sqrt{E_0 \Delta u^2 + 2F_0 \Delta u\, \Delta v + G\, \Delta u^2}.$$

Tomando en consideración esto y a base de la relación (*) podemos llegar a la conclusión que sigue.

Para cada punto M_0 de una variedad existe un entorno que permite una aplicación tal sobre el plano euclidiano E que si M y M^* son dos puntos del entorno y M^*, $M^{*\prime}$ son sus imágenes, entonces

$$\rho(M, M') = \rho_E(M^*, M^{*\prime}) + \eta(M, M')\, \rho(M, M')$$

donde $\eta(M, M')$ es un infinitésimo si $\rho(M_0, M)$ y $\rho(M_0, M')$ son infinitésimos.

---

*) Estas condiciones pueden observarse, pues a consecuencia de la determinación positiva de la forma métrica $E_0 > 0$, $G_0 > 0$ y $F_0^2 < E_0 G_0$.

En otros términos, $\rho(M, M')$ difiere de $\rho_E(M^*, M^{*\prime})$ en un infinitésimo de orden superior con respecto a las dimensiones del entorno.

En esto precisamente radica el sentido geométrico fundamental de las condiciones que determinan las variedades de Riemann. Puede decirse que mediante estas condiciones distinguimos una clase de espacios métricos que tienen carácter euclidiano en lo localmente infinito.

La idea expuesta aquí se ilustra bien con el material de los §§ 220 — 222, donde las propiedades geométrico-diferenciales del plano de Lobachevski fueron establecidas mediante cierta aplicación de éste sobre el plano euclidiano representado en forma de una orisfera.

§ 237. Sea dada alguna variedad geométrico-diferencial (de Riemann). Sobre ella, consideremos un dominio arbitrario H. Es fácil cerciorarnos de que H, a su vez, es una variedad geométrico-diferencial. Naturalmente, esta variedad forma parte de una otra, más extensa; si fuera dada sólo la variedad H, la podríamos «prolongar», es decir, incluirla en una otra variedad, a saber, en la inicial.

Al investigar la geometría interior de variedades, es deseable que se descarten las que puedan ser «prolongadas»; en el caso contrario, esta investigación se perderá en la masa de detalles nada interesantes.

Tomando en consideración lo dicho, impondremos sobre estas variedades *la exigencia de completitud* (la cual, no obstante, es más rigurosa que la de no prolongabilidad). La formulación de esta exigencia emplea el concepto de sucesión fundamental conocida por el lector en el caso de la geometría euclidiana en el curso del análisis elemental.

La sucesión de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ se llama fundamental, si $\rho(x_n, x_m)$ tiende a cero, cuando los números n y m crecen infinitamente. En el plano euclidiano, cualquier sucesión fundamental es convergente, es decir, si $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(x_n, x_m) = 0$, entonces existe un punto x tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. En el análisis elemental esta propiedad del plano euclidiano se llama principio general de convergencia.

En el caso de una variedad geométrico-diferencial arbitraria, el principio de convergencia puede no verificarse. Para convencernos de ello, es suficiente considerar un ejemplo sencillo que sigue.

En el plano de Euclides, tomemos una sucesión de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ convergente hacia un punto x: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Al mismo tiempo, esta sucesión será una sucesión fundamental. Excluyamos el punto x del plano, dejando invariable la métrica de la porción restante. En la variedad que obtendremos de tal modo, los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ siguen constituyendo una sucesión fundamental, mas, ésta no tiene límite.

Las variedades geométrico-diferenciales en las que existen sucesiones fundamentales carentes de límite, se llaman incompletas. Cada variedad completa es improlongable.

En lo sucesivo, las variedades incompletas no se consideran.

§ 238. Al definir la variedad bidimensional geométrico-diferencial, hemos hecho una importante generalización del concepto de superficie y de su geometría interior. Expliquemos su sentido y ventaja.

En la teoría clásica de las superficies, éstas se consideran como objetos del espacio euclidiano. Si cierta superficie tiene la ecuación exterior

$$r = r(u, v),$$

entonces su geometría interior se determina mediante la forma cuadrática $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + D\,dv^2$ con los coeficientes bien determinados

$$E = r_u^2, \quad F = r_u \cdot r_v, \quad G = r_v^2.$$

De tal modo, cada superficie tiene una determinada métrica, o una geometría interior. En otros términos, la geometría interior de una superficie se determina por las particularidades de la disposición espacial de sus puntos. Si queremos realizar la geometría interior con propieda-

des dadas a base de métodos de la teoría de las superficies, entonces debemos encontrar una superficie que tenga la geometría interior requerida, es decir, se distinga por una disposición espacial de sus puntos tal, a la cual le corresponda justamente la métrica que nos interesa. Mientras tanto, por el carácter del problema de estudio de la geometría INTERIOR de una superficie, la estructura espacial de la superficie no ofrece interés.

Cuando consideramos la geometría interior de una variedad abstracta, la cual no ha de concebirse necesariamente dentro de algún espacio, estamos libres de la necesidad de tomar en consideración una circunstancia adventicia, esto es, la forma de la superficie como objeto espacial. Abstrayéndonos de las propiedades adventicias de las imágenes sujetas al estudio, facilitamos nuestra investigación.

Por otra parte, el problema de hallar una superficie, cuya métrica posea determinadas propiedades, puede carecer de solución, es decir, en el espacio puede no existir en absoluto una superficie con la métrica necesaria. No obstante, puede suceder que esta misma métrica se realice en alguna variedad abstracta, pues podemos asignar a nuestra discreción, con un grado de arbitrariedad bien grande, la métrica de la variedad abstracta. El problema de Beltrami sirve de ejemplo. En las páginas inmediatas se citarán otros ejemplos numerosos.

En la sección siguiente consideraremos variedades bidimensionales de curvatura CONSTANTE, es decir, las variedades, cuya curvatura total es igual en todos los puntos (la definición de la curvatura total de una variedad fue aducida en el § 236).

Las variedades de curvatura constante merecen ser consideradas en primer lugar, debido a muchas de sus propiedades. Basta decir que ellas, y sólo ellas, entre todas las variedades geométrico-diferenciales bidimensionales, permiten el movimiento libre sobre sí mismas de sus porciones suficientemente pequeñas. Si llamamos congruentes a dos dominios isométricos de una variedad, entonces la aserción enunciada la podemos formular con más exactitud así:

Las variedades de curvatura constante, y sólo ellas, admiten tales desplazamientos congruentes de sus porciones suficientemente pequeñas (es decir, tales aplicaciónes isométricas de una sobre otra) que el conjunto de estos desplazamientos es transituvo respecto a los elementos lineales. Para cerciorarse de ello, el lector tiene que acudir al § 227, donde se ha demostrado una aserción justamente igual para las superficies. Como los razonamientos del § 227 estaban enmarcados exclusivamente en la esfera de conceptos de la geometría interior de la superficie, son aplicables directamente a variedades metrizadas abstractas.

Además, a base de los resultados obtenidos en el § 227, podemos afirmar que cada variedad de una curvatura constante K localmente, para $K = 0$, tiene la geometría de Euclides; para $K < 0$, la de Lobachevski, y, para $K > 0$, tiene la geometría sobre la esfera.

De tal modo, las variedades abstractas de curvatura constante, al igual que las superficies, al ser estudiadas localmente, se dividen en tres clases solamente.

Mas, al estudiar estas variedades «en total», descubriremos una enorme riqueza de diferencias en su naturaleza, la cual sería inconcebible si siguiéramos ateniéndonos a la teoría elemental de las superficies.

2. Formas espaciales parabólicas

§ 239. *Cada variedad geométrico-diferencial completa de curvatura constante se llama forma espacial de la geometría de una curvatura constante dada* (la condición de completitud se ha enunciado en el § 237). Convengamos en considerar equivalentes dos formas espaciales de la geometría de una curvatura dada, si tienen igual tipo topológico, es decir, si admiten una aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos de una sobre otra. Desde el punto de vista de la clara evidencia, esto quiere decir que admitimos deformaciones de la forma espacial que excluyan «rupturas» y «pegaduras».

Con tal condición se obtiene una distribución natural de todas las formas espaciales en un conjunto fácilmente visible de clases de formas equivalentes entre sí; cada clase se caracteriza con la indicación de algún representante.

Sin proponernos dar una clasificación topológica completa de las variedades bidimensionales, señalaremos solamente que todas las variedades bidimensionales se dividen en *abiertas* y *cerradas*. Una variedad se llama cerrada, si de cualquier conjunto infinito de sus puntos se puede elegir una sucesión convergente (es decir, si para esta variedad es válido el principio de Bolzano-Weierstrass).

La variedad que no sea cerrada, se llama abierta.

Ejemplos de variedades cerradas: la esfera, el toro. Ejemplos de variedades abiertas: el plano, cualquier dominio sobre un plano, cualquier dominio sobre una esfera que no la cubra por entero.

En lo sucesivo, llamaremos *parabólica* a la geometría de curvatura constante K, si $K = 0$; *elíptica*, si $K > 0$, e *hiperbólica*, si $K < 0$.

§ 240. Entre las formas espaciales parabólicas, en primer lugar, debe señalarse *el plano euclidiano* (como ejemplos de formas equivalentes a él, pueden mencionarse el cilindro parabólico, la porción conexa del cilindro hiperbólico, la orisfera del espacio de Lobachevski, etc.).

Además del plano euclidiano (y de las formas equivalentes a él) existen cuatro formas espaciales de geometría parabólica más; sus representantes topológicos son: el cilindro ordinario, el cilindro unilateral, el toro y el toro unilateral. Considerémoslos en el orden citado.

Partamos un plano en franjas iguales mediante un sistema de rectas paralelas $\{a\}$ (fig. 169) y asignemos una dirección en el plano, por ejemplo, perpendicular a las rectas $\{a\}$ (se excluye la asignación de la dirección de las mismas rectas $\{a\}$). En alguna franja tomemos un punto arbitrario M. Desplazando la franja elegida en la dirección dada, podemos superponerla sobre cualquier otra; en este caso el punto M ocupará cierta nueva posición; aquí lo designaremos nuevamente con la letra M. El conjunto de todos los puntos que se obtienen de tal modo a partir del punto M, lo denotaremos con el símbolo $\{M\}$. Convendremos en considerar cada conjunto de puntos $\{M\}$ como un elemento («punto») del nuevo conjunto R. En el conjunto R introduciremos una métrica: si $x = \{M\}$ e $y = \{N\}$ son dos puntos de R, entonces, por concepto de distancia $\rho(x, y)$ asignaremos un mínimo de distancias euclídeas entre los puntos del conjunto $\{M\}$ y los del conjunto $\{N\}$. Según la definición, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Convenzámonos de que $\rho(x, y)$ satisface todos los axiomas del espacio métrico (véase el § 235).

1) Si los conjuntos $\{M\}$ y $\{N\}$ son idénticos, entonces la distancia euclídea mínima de los puntos $\{M\}$ hasta los puntos $\{N\}$ es igual a cero, por consiguiente, para $x \equiv y$ tenemos $\rho(x, y) = 0$.

2) Si los conjuntos $\{M\}$ y $\{N\}$ son diferentes, entonces la distancia euclídea mínima de los puntos $\{M\}$ hasta los puntos $\{N\}$ es superior a cero; a consecuencia de esto y según la definición de la función $\rho(x, y)$ para $x \not\equiv y$, tenemos $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$.

3) Sean $x = \{M\}$, $y = \{N\}$ y $z = \{P\}$ tres puntos arbitrarios del espacio R. Denotemos con N_1 algún punto de $\{N\}$; en los conjuntos $\{M\}$ y $\{P\}$ existen respectivos puntos M_1 y P_1

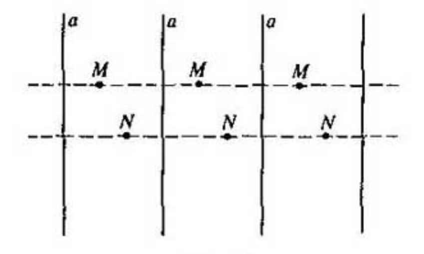


Fig. 169

tales que $\rho(x, y) = M_1N_1$ y $\rho(y, z) = N_1P_1$, donde M_1N_1 y N_1P_1 son distancias euclídeas. Para las distancias euclídeas tenemos: $M_1N_1 + N_1P_1 \geqslant M_1P_1$; pero $M_1P_1 \geqslant \rho(x, z)$, por consiguiente, $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Con esto mismo queda establecido que R es un espacio métrico.

La función $\rho(x, y)$ está definida de modo que un ε-entorno suficientemente pequeño de un punto arbitrario $x = \{M\}$ del espacio R es isométrico a un ε-entorno de un punto M del plano euclidiano; de aquí se deduce que R es una variedad bidimensional de curvatura nula.

Por fin, dada la completitud del plano euclidiano, la variedad R también es completa. De tal modo, R es cierta forma espacial parabólica.

Para dar más evidencia a nuestros razonamientos, imaginémonos que el plano, a modo de una cinta sin fin, está arrollado en un cilindro circular de manera que cada franja envuelve el cilindro justamente una vez, coincidiendo todos los puntos de cualquier conjunto $\{M\}$ con un punto situado sobre el cilindro. Con esto mismo, se establece evidentemente que el cilindro circular es una forma espacial de la geometría parabólica, equivalente a la variedad R considerada antes.

Llegaremos al mismo resultado si convenimos simplemente en identificar todos los puntos de cada conjunto $\{M\}$, en particular, los que están «uno frente al otro» en distintas fronteras de una franja cualquiera. Está claro que la unión de dos en dos de los puntos pertenecientes a distintas fronteras de una franja (como se muestra en la fig. 170, donde los puntos unidos están denotados con una misma letra), da un «tubo».

Así pues, *descubrimos la clase de formas espaciales de la geometría de curvatura nula, cuyo tipo topológico se concibe en forma de cilindro circular.*

Volvamos nuevamente al plano partido por las rectas paralelas $\{a\}$ en franjas iguales; asignemos una recta b más, perpendicular a las rectas $\{a\}$ (fig. 171). Sea M un punto arbitrario tomado en alguna franja. Desplacemos la franja elegida a lo largo de la recta b de modo que coincida con una franja vecina; en este caso, el punto M ocupará una nueva posición. Apliquemos especularmente el punto obtenido respecto a la recta b, volviendo a designar su imagen con la letra M. Desarrollando este proceso, obtendremos un conjunto infinito de puntos $\{M\}$.

Convendremos en considerar cada conjunto de puntos $\{M\}$ como un elemento de un nuevo espacio métrico R; la distancia $\rho(x, y)$ entre dos puntos $x = \{M\}$ e $y = \{N\}$ del espacio R, al igual que en el caso antecedente, la adoptaremos igual al mínimo de distancias euclídeas entre los puntos del conjunto $\{M\}$ y los del $\{N\}$.

Es fácil comprender que R constituye un forma espacial de la geometría de curvatura nula.

Obtendremos esta misma forma espacial, si, limitándonos con una franja, identificamos sus puntos de frontera concurrentes en un mismo conjunto $\{M\}$ (el esquema de la identificación de los puntos se ofrece en la fig. 172, donde los puntos identificados están denotados con letras iguales). La variedad que se obtiene de tal modo, se llama *cilindro unilateral*.

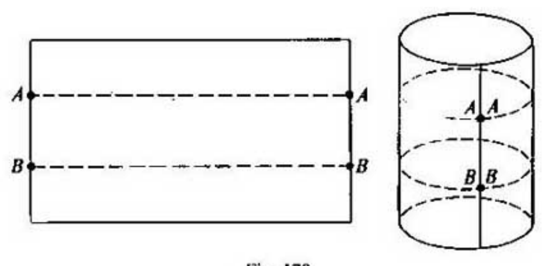


Fig. 170

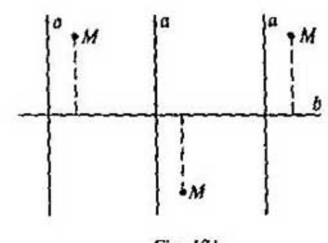


Fig. 171

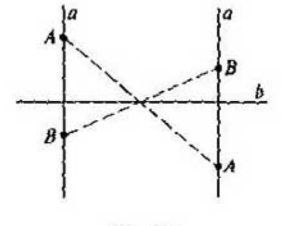


Fig. 172

Ahora, en lugar de una franja sin fin de un plano, consideremos un conjunto de puntos situados dentro de cierto rectángulo $ABCD$ y en sus lados AB y CD, excluyendo los propios puntos A, B, C, D (de tal modo, quedan excluidos totalmente los segmentos AD y BC). Fácilmente se demuestra que tal conjunto es topológicamente equivalente a una franja sin fin del plano acotada por dos rectas paralelas (es decir, admite la aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos sobre esta franja). Ahora, identifiquemos de dos en dos los puntos de los segmentos AB y CD situados simétricamente respecto al centro del rectángulo (con esto, el punto A se unirá con el C, el punto B, con el D; en la fig. 173 las flechas indican la dirección de los segmentos AB y CD que deben coincidir, después de unidos estos segmentos). Así obtendremos una variedad con métrica euclidiana, topológicamente equivalente al cilindro unilateral (no obstante, no es una forma espacial, pues no satisface la condición de completitud), se la llama *cinta de Moebius*.

La unión de los lados opuestos de un rectángulo descrita arriba, se puede realizarla de hecho mediante una tira de papel, construyendo así un modelo de la cinta de Moebius (fig. 174). Valiéndonos de este modelo, nos cercioraremos fácilmente de que la superficie representada por él, es *unilateral*: no se puede pintarla de dos colores de modo que éstos se junten sólo en el canto. El modelo de la cinta de Moebius hace hasta cierto grado evidente nuestra noción sobre el cilindro unilateral, justificando también su nombre.

Así pues, *descubrimos la tercera clase de formas espaciales parabólicas representadas por el cilindro unilateral y topológicamente equivalentes a la cinta de Moebius.*

Ahora, sobre un plano, consideremos dos sistemas de rectas paralelas $\{a\}$ y $\{b\}$ que lo parten en rectángulos iguales (fig. 175). Tomemos un punto arbitrario M en alguno de ellos. Desplazando el rectángulo elegido según los sentidos de las rectas $\{a\}$ y $\{b\}$, podemos hacerlo coincidir con cualquier otro rectángulo; con esto, el punto M ocupará un conjunto infinito de nuevas posiciones; en cada una de ellas volveremos a designarlo con la letra M. Así se obtiene un conjunto infinito de puntos $\{M\}$; convengamos en considerarlo como un elemento de un conjunto R. De manera plenamente análoga con lo anterior, introducimos métrica en el conjunto R: si $x = \{M\}$ e $y = \{N\}$ son dos puntos de R, entonces $\rho(x, y)$ son el mínimo de distancias euclídeas entre los puntos del conjunto $\{M\}$ y los del $\{N\}$. El espacio métrico obteni-

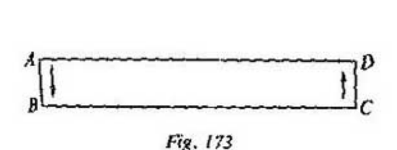


Fig. 173

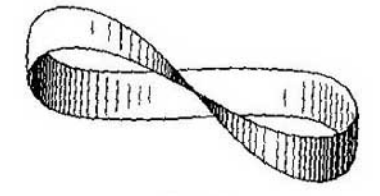


Fig. 174

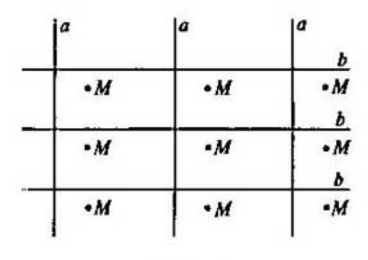


Fig. 175

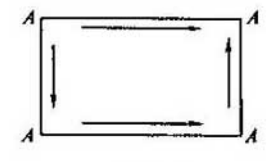


Fig. 176

do de tal manera resulta ser una variedad completa de curvatura nula, es decir, una forma espacial de la geometría parabólica.

Una idea clara de esta forma la da un rectángulo con los puntos identificados de dos en dos de sus lados opuestos (fig. 176, donde las flechas indican los sentidos de los lados, que deben coincidir al ser identificados dichos lados; como todos los vértiçes del rectángulo se unen en un mismo punto, están designados con unas mismas letras). Ahora, hagamos notar que al ser identificados dos lados opuestos del rectángulo, se forma un «tubo»; la identificación ulterior de los otros dos lados proporciona un toro (fig. 177).

De tal modo, *el tipo topológico de la nueva clase de formas espaciales viene representado por el toro (por eso se llaman anulares).*

Volvamos al plano partido en rectángulos iguales por las rectas $\{a\}$ y $\{b\}$, pero, tracemos complementariamente una línea media entre dos rectas vecinas $\{b\}$ en cada franja (fig. 178). Sea M un punto arbitrario de algún rectángulo; desplazando el rectángulo elegido a lo largo de la franja entre dos rectas $\{a\}$ y superponiéndolo sucesivamente sobre todos los demás rectángulos de dicha franja, obtendremos una serie infinita de nuevas posiciones del punto M; denotemos con la letra M todos estos puntos. Ahora, cada rectángulo de la franja en cuestión lo desplazaremos a lo largo de las rectas $\{b\}$ a una franja vecina, aplicando especularmente el punto señalado en él, respecto a la línea media del rectángulo (que pasa entre las rectas $\{b\}$); volveremos a designar con la letra M todos los puntos obtenidos. Iremos efectuando infinitamente este proceso. Los conjuntos de puntos $\{M\}$ obtenidos de tal forma convendremos en considerarlos como elementos de un nuevo espacio métrico R, cuya métrica es determinada justamente por la misma condición que en todos los casos antecedentes.

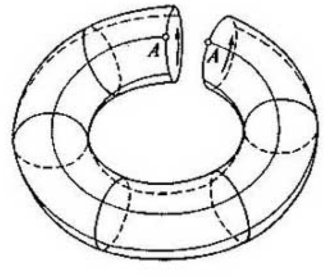


Fig. 177

Fig. 178

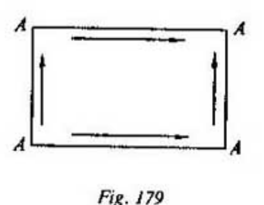


Fig. 179

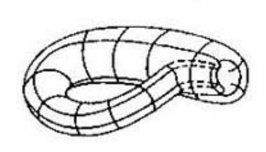


Fig. 180

Llegamos a una forma espacial parabólica que se concibe en forma de rectángulo con puntos de los lados opuestos, identificados de dos en dos, según el esquema de la fig. 179. Esta variedad se llama *toro unilateral*.

Tratemos de hacer un modelo de un toro unilateral.

Uniendo dos lados horizontales del rectángulo representado en la fig. 179, obtenemos un «tubo»; pero, para unir luego los lados verticales del rectángulo así, como lo exige el esquema de la fig. 179, tendremos que hacer pasar un extremo de este tubo a través de la pared y unirlo con el otro extremo por dentro (fig. 180). Es imposible concebir en el espacio un toro inilateral en forma de una superficie sin puntos múltiples.

Las formas espaciales parabólicas representadas por el toro unilateral se llaman unilateralmente anulares.

Acabamos de establecer que existen variedades de curvatura nula, topológicamente equivalentes tanto al toro ordinario como al unilateral. Este resultado se ha obtenido sólo merced a que habíamos introducido el concepto de variedad geométrico-diferencial abstracta. Nunguna superficie regular del espacio euclidiano que tenga el tipo topológico de toro ordinario o unilateral, puede tener una métrica natural de curvatura nula en todo punto. De tal modo, no habríamos podido descubrir formas parabólicas anulares si hubiéramos seguido ateniéndonos a la teoría euclidiana de las superficies.

§ 241. Descubrimos cinco clases de formas espaciales de la geometría parabólica, cuyos representantes topológicos son:

1) el plano,
2) el cilindro circular,
3) el cilindro unilateral,
4) el toro,
5) el toro unilateral.

Entre las variedades enumeradas existen tres variedades abiertas (primera, segunda y tercera) y dos cerradas (cuarta y quinta); al mismo tiempo, entre ellas tenemos tres variedades bilaterales (primera, segunda y cuarta) y dos unilaterales (tercera y quinta). En la topología se demuestra que todas estas variedades son topológicamente diferentes.

Además de las cinco variedades enumeradas, no hay otras variedades bidimensionales que puedan llevar geometría parabólica, es decir, no pueden ser metrizadas parabólicamente, con la observación de la exigencia de completitud. La demostración de esta afirmación se ha trazado sucintamente en el libro de Klein «Geometría no euclidiana», capítulo IX (Klein, «Nicht-Euklidische Geometrie»). Desde luego, todo dominio de un plano, un cilindro, etc. es una variedad metrizada con geometría de curvatura nula, sin embargo, en todos estos casos no se satisface la exigencia de completitud. Todas las formas parabólicas, por su definición misma, localmente, tienen la misma geometría que el plano euclidiano. Mas, en general, a cada forma espacial le corresponde un sistema geométrico, en el cual son puntos los elementos de la variedad de una forma dada, siendo rectas sus líneas geodésicas. Las relaciones recíprocas entre los puntos y las rectas se subordinan a todos los axiomas de Hilbert solamente en el sistema geométrico de la primera de las cinco formas espaciales parabólicas enumeradas. En los sistemas

geométricos de las cuatro formas restantes tienen lugar proposiciones completamente distintas, en su mayoría diferentes de las euclidianas.

Por ejemplo, en la geometría del cilindro, cuyas geodésicas son las hélices y circunferencias ortogonales respecto a las generatrices, es inválida la aserción de que a través de dos puntos pasa sólo una recta.

3. Formas espaciales elípticas

§ 242. Existen dos clases de formas espaciales elípticas; sus representantes son: 1) la esfera, 2) el plano elíptico.

El hecho de que la esfera es una forma espacial de la geometría elíptica, se percibe de inmediato, pues la curvatura total de una esfera de un radio r es igual a $\frac{1}{r^2}$ en todos sus puntos. De tal modo, la esfera como una superficie del espacio euclidiano, tiene métrica natural de una curvatura positiva constante.

Ahora, vamos a demostrar que existe una variedad geométrico-diferencial completa de una curvatura positiva constante que es topológicamente inequivalente a la esfera.

Sea dada en el espacio euclidiano una esfera S de un radio r.

Consideremos un conjunto R, cuyos elementos son pares de puntos diametralmente opuestos de la esfera S. Introduciremos una métrica en el conjunto R; a saber, si $x = \{M_1, M_2\}$ e $y = \{N_1, N_2\}$ son dos elementos del conjunto R (aquí M_1, M_2 y N_1, N_2 son pares de puntos diametralmente opuestos de la esfera S), entonces, por concepto de distancia $\rho(x, y)$ asignaremos el mínimo de distancias sobre la esfera entre los puntos del par $\{M_1, M_2\}$ y los del $\{N_1, N_2\}$.

Es fácil demostrar (mediante razonamientos análogos a los aducidos al comienzo del § 240) que la función $\rho(x, y)$ satisface los axiomas 1 — 3 del § 235, es decir, que R es un espacio métrico.

Luego, es evidente que para cada punto $x = \{M_1, M_2\}$ del espacio R existe un ε-entorno isométrico al ε-entorno del punto M_1(o M_2) sobre la esfera S. Consiguientemente, R es una variedad geométrico-deferencial de curvatura positiva constante. Por fin, de la completitud de la esfera S se deduce la de la variedad R.

De tal modo, R es una forma espacial de la geometría de curvatura constante. Esta forma (al igual que todas las formas equivalentes a ella) se llama *plano elíptico*..

Topológicamente, la esfera y el plano elíptico no son equivalentes. Para convencernos de ello, notemos que la esfera tiene la propiedad siguiente: cada curva cerrada simple que esté sobre la esfera, la divide en dos partes. Esta propiedad debe conservarse, cualquiera que sea la aplicación topológica de la esfera, es decir, para la aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos de la esfera sobre una otra variedad. Mientras tanto, el plano elíptico carece de tal propiedad. En rigor, consideremos un conjunto de pares de puntos diametralmente opuestos de un círculo grande de la esfera S; denotémoslo con L. El conjunto L, como un subconjunto de R, topológicamente equivale a la circunferencia. Por consiguiente, sobre el plano elíptico R, el conjunto L es una simple curva cerrada. Mas, la curva L no divide R en dos partes, pues dos pares cualesquiera de puntos diametralmente opuestos de la esfera, que no pertenezcan al conjunto L (es decir, dos puntos cualesquiera de R, que no pertenezcan a L), pueden pasar continuamente uno en el otro, sin pasar por L. Precisamente de aquí se deduce que la esfera y el plano elíptico son topológicamente diferentes.

Así pues, descubrimos dos formas espaciales de la geometría de curvatura constante, que determinan dos clases diferentes de formas; ambas formas son cerradas.

No existen otras formas elípticas. Sin embargo, la demostración de esta afirmación no es fácil, y no la vamos a aducir aquí.

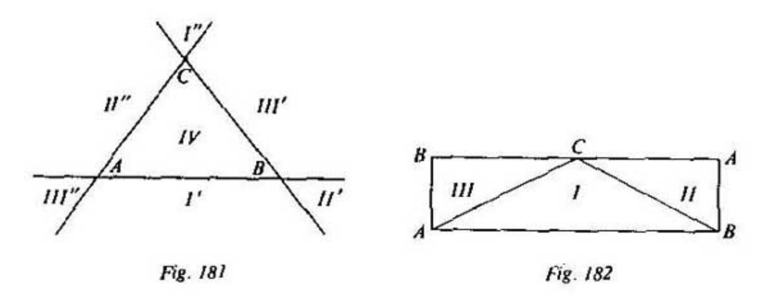


Fig. 181

Fig. 182

§ 243. Aquí vamos a describir dos nuevas representaciones del plano elíptico.

1) Designemos con T un conjunto, cuyos elementos son todas las rectas que pasen por el centro de la esfera S (es decir, un haz de rectas concéntrico con S). En el conjunto T introduciremos una métrica, suponiendo $\rho(x, y) = \alpha r$, donde α es el ángulo mínimo entre dos rectas x e y, r es el radio de la esfera S.

Si a cada recta de T le asignamos un par de puntos diametralmente opuestos de la esfera S, en los cuales esta recta interseca la esfera, obtendremos una aplicación isométrica de T sobre R. De aquí sigue que el haz T con la métrica establecida es una nueva representación del plano elíptico.

2) Completemos el espacio euclidiano con elementos infinitamente elejados así, como se hace en la geometría proyectiva (véase el § 80). En el espacio tomemos un plano arbitrario α, considerándolo como un plano proyectivo, es decir, tomando en consideración los puntos infinitamente alejados. Introduciremos métrica en el plano proyectivo α.

Con este objeto, tomemos algún haz de rectas T, cuyo centro no se halle en el plano α. Con cada recta u del haz T confrontemos un punto x del plano α, situado en la recta u. La confrontación resulta ser biunívoca (aquí es importante lo que el plano está completado por puntos infinitamente alejados; gracias a esto, a las rectas del haz, paralelas al plano α, les corresponden sus puntos infinitamente alejados). Como distancia entre dos puntos x, y del plano α asignemos el número $\rho(x, y)$ igual a la distancia entre aquellos elementos del haz T que corresponden a los puntos x, y (la métrica del haz T se ha determinado más arriba). Está claro que con tal definición de distancias sobre el plano α, es isométrica la correspondencia entre los puntos del plano α y rectas del haz T. Consiguientemente, un plano proyectivo metrizado del modo referido es una forma espacial equivalente a T. Obtenemos una nueva representación del plano elíptico, en forma de un plano proyectivo metrizado.

§ 244. Tratemos de hacer un modelo topológico del plano proyectivo en forma de una superficie del espacio euclidiano, topológicamente equivalente a él.

Sobre un plano euclidiano α, tomemos tres rectas que no pasen por un mismo punto; las mismas parten el plano α en siete dominios marcados con I', I", II', II", III', III", IV en la fig. 181. Adicionados los puntos infinitamente alejados al plano α, los dominios I' y II", inicialmente diferentes, se unen conformando un único dominio conexo; lo designaremos con la cifra romana I y lo denominaremos triángulo, pues está acotado por segmentos de tres rectas. Análogamente, los dominios II' y II" se unen conformando un triángulo II, y los III' y III", un triángulo III. De tal modo, el plano completado por puntos infinitamente alejados, con sus tres rectas queda partido en cuatro triángulos I, II, III, IV. Ahora, notemos que si eliminamos el triángulo IV de la variedad en cuestión, el dominio que se queda será topológicamente equivalente a la cinta de Moebius.

Esto quedará evidentemente claro si representamos los triángulos I, II, III así, como lo muestra la fig. 182. El lector se cerciorará de que el esquema de la unión recíproca de los triángulos I, II, III de la fig. 182 no se diferencia del de la unión de los triángulos anotados con las

mismas cifras en la fig. 181. Además, los vértices A y B del triángulo II han de considerarse unidos con los vértices designados con las mismas letras en el triángulo III. Es evidente que con tal unión los triángulos I, II, III conforman la cinta de Moebius, cuyo contorno consta de los lados rectilíneos CA, AB, BC. El plano completado con puntos infinitamente alejados se obtiene mediante la unión del contorno de la cinta de Moebius con el del triángulo IV.

Es sabido que el triángulo es topológicamente equivalente a aquella porción de la esfera que queda después de abrirse en la esfera algún orificio redondo. De tal modo, la unión del contorno $CABC$ de la cinta de Moebius con el del triángulo IV da una superficie topológicamente equivalente a la que resulta con la pegadura de la esfera con un orificio mediante la cinta de Moebius. Esta superficie es unilateral. En el espacio euclidiano tridimensional, es imposible realizar la referida construcción de la superficie sin puntos múltiples. La representación del plano proyectivo en forma de una esfera con un orificio pegado por la cinta de Moebius, permite interpretar claramente las particularidades de la disposición mutua de las rectas proyectivas sobre el plano proyectivo. A base de esto, por ejemplo, se percibe fácilmente que una recta proyectiva no divide el plano proyectivo en dos partes.

Nos cercioraremos de esto si cortamos un círculo pequeño en el plano proyectivo, sin tocar la recta dada a; la parte del plano proyectivo que se quede, será cinta de Moebius, a la que pertenece la recta a; para mayor evidencia nos imaginaremos que esta recta a coincide con la línea media de dicha cinta de Moebius, mas, el corte cerrado de la cinta de Moebius no la divide en dos partes según la línea media, lo cual se revela con un sencillo modelo de papel.

§ 245. A dos formas espaciales elípticas les corresponden dos sistemas geométricos: la geometría sobre la esfera y la geometría sobre el plano elíptico. La geometría sobre el plano elíptico no es sino la geometría bidimensional de Riemann (véanse los §§ 63 — 67). Correspondientemente a ello, el plano elíptico se llama también plano de Riemann.

4. Formas espaciales hiperbólicas

§ 246. A diferencia de la geometría elíptica que tiene dos clases de formas espaciales equivalentes topológicas, y la parabólica, en la cual existen cinco clases, la geometría hiperbólica puede realizarse con la observación del principio de completitud en un conjunto infinito de variedades bidimensionales topológicamente diferentes. Incluso entre las variedades cerradas existe infinidad de tales variedades, en las cuales puede darse la métrica de curvatura constante $K < 0$.

A base de los resultados expuestos en los §§ 216 — 222 y 227 — 228, podemos afirmar que en el espacio de Lobachevski axiomáticamente determinado, cada plano constituye una variedad geométrico-diferencial de curvatura negativa constante; esta variedad es completa, lo cual se demuestra exactamente del mismo modo que la completitud del plano euclidiano (empleando solamente axiomas de la geometría absoluta). Por consiguiente, podemos concluir que *el plano de Lobachevski es una de las formas espaciales hiperbólicas. La clase determinada por ella se caracteriza de la manera siguiente: sus representantes son variedades geométrico-diferenciales completas de curvatura negativa constante, topológicamente equivalentes al plano ordinario (euclidiano). Todas estas variedades se llaman planos hiperbólicos.*

§ 247. Considerando dado cierto plano hiperbólico, mostraremos cómo hay que construir un conjunto infinito de otras formas hiperbólicas. Ante todo, ocupémonos de las formas cerradas.

Nos valdremos de un método de construir variedades bidimensionales cerradas conocido en la topología elemental. Durante cierto tiempo nos atendremos a un punto de vista netamente topológico, es decir, admitiremos cualesquiera deformaciones continuas de figuras, aunque alteren sus propiedades métricas. Además, para facilitar la exposición, nos valdremos de métodos evidentemente descriptivos.

Imaginémonos un cuadrado hecho de película de goma fina (fig. 183). Uniendo sus lados designados con la letra a de modo que coincidan las direcciones de estos lados indicadas por

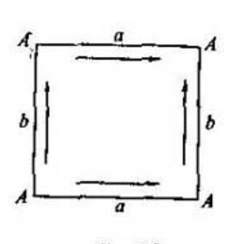


Fig. 183

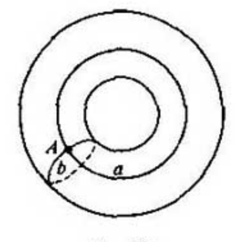


Fig. 184

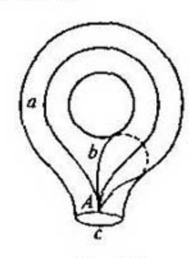


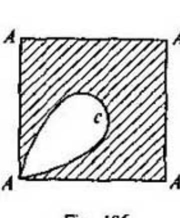
Fig. 185

las flechas, convertiremos este cuadrado en un tubo. Además, uniendo las fronteras de las bocas del tubo, obtendremos un toro (fig. 184). De tal manera, el toro puede estimarse como un cuadrado con los lados opuestos pegados de dos en dos, coincidiendo sus direcciones indicadas por las flechas en la fig. 183 y uniéndose los cuatro vértices en un punto (en la fig. 183, los lados unidos están denotados con una misma letra: los cuatro vértices están designados con una misma letra A; en la fig. 184, donde está representado un toro hecho, las designaciones corresponden a las usadas en la fig. 183).

Imaginémonos que en el toro se ha hecho un orificio, de forma que dicho toro se convierte en un «asa» (fig. 185). Pase por el punto A el borde de este orificio. Entonces, en el cuadrado inicial el borde del orificio se representará en forma de una línea cerrada c que pasa por el punto A (fig. 186). Rompiendo la línea c en el punto A y produciendo cierta deformación de la figura representada en la fig. 186, podemos convertirla en pentágono dado en la fig. 187. A la inversa, pegando los lados de este pentágono marcados con la letra a de manera que coincidan sus direcciones señaladas con las flechas; pegando análogamente los lados denotados con la letra b, y dejando libre el lado c como frontera de la figura, nuevamente obtendremos un asa.

Pegando las fronteras de dos asas, obtendremos un «bollo» (fig. 188). Al mismo tiempo, se podrá considerarlo, evidentemente, como un octángulo, cuyos lados están pegados según el esquema mostrado en la fig. 189, donde los lados a unir vienen designados con letras iguales, y las flechas marcan las direcciones que han de coincidir. En efecto, tal octángulo surge de dos pentágonos que representan asas, al ser empalmados sus lados libres.

Análogamente a que el toro es una superficie del género 1 engendrada por la unión de dos en dos de los lados de un cuadrado, el bollo es una superficie del género 2 engendrada por la



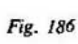


Fig. 186

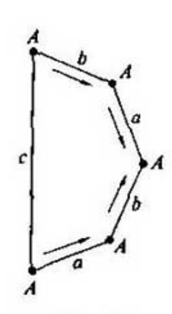


Fig. 187

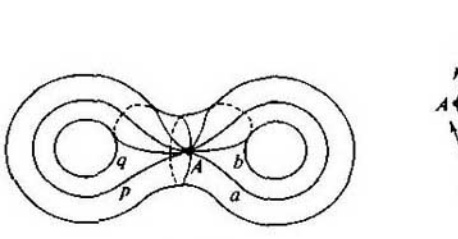


Fig. 188

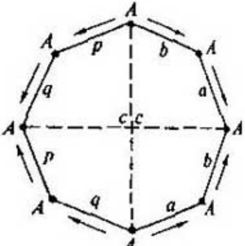


Fig. 189

unión de dos en dos de los lados de un octángulo, cada superficie bilateral cerrada del género p puede obtenerse mediante la unión de dos en dos de los lados de un 4υ-ágono regular según un determinado esquema, el cual se muestra para un caso particular $p = 3$ en las figs. 190, 191.

Ahora, ocupémonos de la construcción de formas espaciales cerradas de la geometría hiperbólica. Ante todo, demostremos que existe una forma topológicamente equivalente a la superficie de género $p = 2$ (es decir, al «bollo» en forma de 8).

Consideremos cierto punto O sobre el plano de Lobachevski, trazando cuatro rectas a través de él de modo que constituyan una estrella regular. Trazando en cada una de estas rectas segmentos congruentes de longitud r en ambos sentidos a partir del punto O, y uniendo con segmentos rectilíneos sus extremos, obtendremos un octágono regular P_8. Exluyamos de la consideración los puntos del plano de Lobachevski exteriores respecto a este triángulo, identificando de dos en dos sus lados, siguiendo el esquema dado en la fig. 189. Además, se supone que, al ser identificados dos lados, se identifican de dos en dos los puntos que dividen estos lados en proporciones iguales. Designemos con R un conjunto, cuyos elementos son: 1) los puntos interiores del octágono P_8; 2) los pares de puntos identificados de los lados; 3) los ocho vértices (identificados). Suponiendo que todos los puntos del plano de Lobachevski que representen cierto elemento x del conjunto R, están denotados con la letra M, escribiremos este elemento simbólicamente en forma de $x = \{M\}$. Convengamos en designar la distancia entre los puntos P y Q del plano de Lobachevski con $d(P, Q)$.

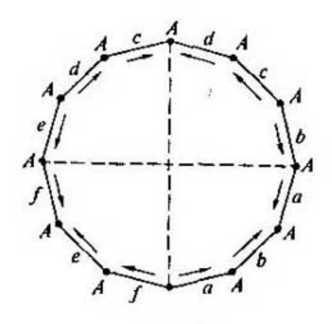


Fig. 190

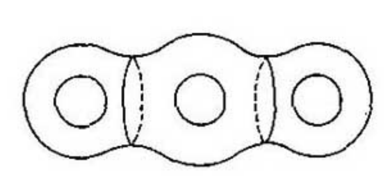


Fig. 191

Introduciremos métrica en el conjunto R. A saber, si $x = \{M\}$ e $y = \{N\}$ son dos elementos de R, entonces por $\rho(x, y)$ eligiremos el menor de los dos números:

$$d_1 = d(M, N),$$
$$d_2 = \min\,[d(M, T_1) + d(N, T_2)],$$

donde T_1 y T_2 son dos puntos identificados cualesquiera. De este modo, R se convierte en un espacio métrico topológicamente equivalente al «bollo». Podemos concebir R en forma de un «bollo», sobre el cual viene dada una métrica artificial mediante la superposición del octágono P_8 sobre el «bollo» (es decir, mediante cierta aplicación del octágono P_8 sobre el «bollo»). Esta métrica será la métrica ordinaria de Lobachevski en cada entorno suficientemente pequeño de cualquier punto del «bollo», menos, tal vez, el entorno de aquel punto en el cual coinciden todos los vértices del octágono.

El punto señalado será un punto particular del «bollo» metrizado si la suma de los ángulos internos del octángulo se diferencia de cuatro ángulos rectos. Para que la métrica dada en el «bollo» sea regular en todo punto, debemos usar un octágono tal en el cual la suma de los ángulos internos sea igual a cuatro rectos.

De tal modo, la cuestión de la posibilidad de metrización hiperbólica regular del «bollo» se reduce al problema de la existencia de un octágono regular con la suma requerida de ángulos en la geometría de Lobachevski. Este problema se resuelve fácilmente en el sentido positivo.

En rigor, sea $S(r)$ la suma de los ángulos internos del octángono P_8; con r está designada la distancia del vértice del octágono hasta su centro (esta magnitud fue citada durante la construcción de P_8). Notemos que sobre el plano de Lobachevski la suma de los ángulos internos de un triángulo que disminuye infinitamente, tiende a π. Por ende, $S(r) \to 6\pi$ para $r \to 0$ (es decir, $S(r)$ tiende a la suma de los ángulos internos del octágono de Euclides). De aquí se deduce que, siendo suficientemente pequeño, $r = r_0S(r_0) > 2\pi$. De otro lado, si designamos con $\beta(r)$ el valor de la mitad de un ángulo del octágono P_8, y con $\delta = \delta(r)$, la mitad del lado del referido octágono entonces, evidentemente, $\beta(r) < \Pi(\delta(r))$, donde Π es la función de Lobachevski.

Como para $r \to \infty$ también $\delta(r) \to \infty$ (véase el lema II del § 30), y para $\delta \to \infty$ $\Pi(\delta) \to 0$, entonces, a consecuencia de la desigualdad antecedente para $r \to \infty \beta(r)$ tiende a cero. De aquí, si $r \to \infty$ tenemos $S(r) = 16\beta(r) \to 0$. De tal modo, para r suficientemente grandes debe ser

$$S(r) < 2\pi.$$

En virtud de la continuidad de la funcion $S(r)$, existe $r = r_1$ tal que $S(r_1) = 2\pi$. Con esto queda demostrado lo que se necesitaba.

Al notar que sobre el plano de Lobachevski todo cuadrilátero tiene una suma de los ángulos internos inferior a 2π, es fácil comprender que con nuestro método es imposible construir una métrica hiperbólica determinada en todo punto del toro. Se puede probar que el toro (el cual es una superficie del género $p = 1$), en general, no es un representante topológico de las formas espaciales de la geometría hiperbólica.

Al contrario, cada superficie cerrada bilateral del género $p > 2$, al igual que en el caso considerado del $p = 2$, puede ser hiperbólicamente metrizada. Esto se deduce de inmediato de que sobre el plano de Lobachevski existe un $4p$-polígono regular con la suma de los ángulos internos igual a 2π.

Consideraciones análogas permiten establecer que cada superficie cerrada unilateral, salvo el plano proyectivo y el toro unilateral, también admite la metrización hiperbólica[*].

---

[*] Las superficies cerradas unilaterales se engendran a base de $2n$-polígonos regulares mediante la identificación de dos en dos de sus lados según un esquema especial; en un caso particular $n = 2$ mostramos este esquema en el § 240 al construir un toro unilateral. Una información sucinta, pero suficiente para el problema dado, sobre la topología de las superficies cerra-

Todo lo expuesto en este párrafo lo resumimos con el teorema siguiente.

Existe infinidad de diferentes clases de formas espaciales hiperbólicas cerradas; sus representantes topológicos son todas las superficies cerradas, excepto aquellas que representen formas espaciales parabólicas y elípticas.

§ 248. Diremos sólo unas cuantas palabras acerca de las formas espaciales abiertas de la geometría hiperbólica. Existe también un conjunto infinito de tales formas. Para que todo esté claro, basta mostrar unos cuantos ejemplos.

Sobre el plano de Lobachevski consideremos una franja infinita P_1 acotada por dos rectas PARALELAS. Sea P_2 una otra franja exactamente igual. Si identificamos las rectas que acotan la franja P_1, con las que acotan la P_2, considerando diferentes los puntos internos de estas franjas, entonces resultará una variedad homeomorfa a cilindro, con una métrica hiperbólica determinada en todos los puntos de ella. En este caso se cumple con clara evidencia la condición de completitud.

Se puede proceder de otra manera: tomar dos ejemplares de una franja del plano de Lobachevski acotada por dos rectas DIVERGENTES, superponerlos uno sobre el otro e identificar las fronteras coincidentes. Entonces de nuevo se engendrará un cilindro hiperbólicamente metrizado.

A propósito, las variedades hiperbólicamente metrizadas obtenidas por los dos métodos referidos, localmente, tienen una misma geometría interior, un mismo tipo topológico, siendo completas las dos, pero, en general, sus propiedades métricas son sustancialmente diferentes (una de estas variedades es un tubo que se ensancha infinitamente en un sentido, estrechándose infinitamente en el otro; la otra variedad es un tubo que se ensancha infinitamente en ambos sentidos).

Si consideramos dos «triángulos» con los lados extendidos infinitamente, superpuestos uno sobre el otro (evidentemente, existen tales figuras sobre el plano de Lobachevski) e identificamos los puntos de sus fronteras, entonces resultará una variedad abierta hiperbólicamente metrizada completa de un nuevo tipo tipológico.

Se puede variar infinitamente este método. Sin embargo, con tal procedimiento no se puede obtener, por ejemplo, una métrica hiperbólica sobre la esfera; si identificáramos puntos de la frontera de dos círculos coincididos del plano de Lobachevski, obtendríamos una esfera con la métrica hiperbólica, mas, con una línea especial. En el caso dado, el método no da una variedad con una métrica determinada en todo punto, pues el plano de Lobachevski (al igual que el de Euclides) no es simétrico respecto a la circunferencia.

§ 249. Resumamos nuestra investigación. Obtuvimos infinidad de diversas variedades que llevan geometría de curvatura constante. Todas las variedades que posean la métrica de una curvatura dada, localmente, tienen geometría común. Cada una de ellas admite desplazamientos sobre sí misma, congruentes en el sentido de su geometría, de sus porciones suficientemente pequeñas, y el conjunto de estos desplazamientos es transitivo respecto a los elementos lineales. Mas, las variedades metrizadas de tipos topológicos diferentes, en total, poseen geometrías distintas. A cada una de ellas le corresponde su sistema de teoremas que expresan propiedades pertenecientes a esta variedad de objetos. La clase de tales geometrías es una generalización natural de las geometrías de Euclides, Lobachevski y Riemann.

En esta sección nos ocupamos exclusivamente de geometrías de dos dimensiones. Las geometrías no euclidianas de la dimensión $n \geqslant 3$ las puede conocer el lector en los libros de *F. Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie, *P. K. Rashevski*, Geometría de Riemann y análisis tensorial (П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ), E. Cartan, Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann. Par Élie Cartan. 2-me éd., revue et augm. P., Gauthier — Villars, 1946 (véase también la primera edición del presente libro).

---

das, así como fotografías de modelos de algunas superficies unilaterales cerradas en el espacio euclidiano (con puntos múltiples, por supuesto) la encontrará el lector en el libro de D. Hilbert y S. E. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, N. Y. Dover Publications, 1944.

Indice alfabético de materias y nombres

A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I—110, GSP, URSS.